33 – 34
47 – 48

Срђан Огњановић * Живорад Ивановић

МАТЕМАТИКА

4

Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа

осмо прерађено издање

КРУГ
БЕОГРАД

Аутори: *Живорад Ивановић*, професор
Мр Срђан Огњановић, професор

МАТЕМАТИКА 4

Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа

Издавач: „КРУГ", Београд, Захумска 31

Рецензенти: *др Владимир Мићић*, проф. Универзитета у Београду
Ирена Золнаи, проф. Гимназије "С. Марковић" у Н. Саду

Уредник: *Живорад Ивановић*

$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX-обрада: *мр Зоран Огњановић*

Дизајн корица: *Ивана Андрејевић*
Коректура: *аутори*

Цртежи: *дипл инг Гордана Лазић*

Ослобођено пореза на промет на основу мишљења
Министарства за културу и јавно информисање
број 413-00-00325/2003-06 од 28.03.2003. г.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37 . 016 : 51 (075.3) (076)

IVANOVIĆ, Živorad
Matematika 4 : zbirka zadataka i testova
za IV razred gimnazija i tehničkih škola /
Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović ; [crteži
Gordana Lazić] . - 9. izd. - Beograd :
Krug, 2005 (Lapovo : Kolor pres). - 224
str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 3.000. - Bibliografija: str.[225] .

ISBN 86-7136-114-4
1. Ognjanović, Srđan
COBISS. SR-ID 123815692

Тираж: 3000 примерака

Штампа: "Колор прес" Лапово

Предговор

Ова збирка задатака писана је по новом наставном плану и програму за IV разред гимназија и техничких школа који се примењује од школске 1992/93. године. У њој су обрађени задаци следећих тема:

1. Функције
2. Извод функције
3. Апроксимације функција
4. Интеграл
5. Комбинаторика
6. Вероватноћа и статистика.

Свака од наведених тема обрађена је у посебној глави, а свака глава је подељена на већи број поглавља. На почетку сваког поглавља дате су дефиниције и тврђења чије је познавање неопходно за решавање задатака из тог поглавља. У сваком поглављу задаци су поређани, почев од најједноставнијих, ради репродукције научених садржаја, ка тежим који су дати за утврђивање и продубљивање обрађене материје. На крају сваке главе дат је додатак са разним задацима у коме су задаци веће тежине и за чије је решавање потребно уложити одређен степен креативности.

Посебну захвалност дугујем рецензентима др В. Мићићу, В. Пауновићу и И. Золнаи који су детаљно проучили рукопис и дали низ корисних примедби и сугестија.

На крају напомињем да сам приликом састављања ове збирке користио ауторске странице из књига Математископ 5 и Математика 4.

У Београду, маја 1994. Аутор

Предговор осмом прерађеном издању

Збирка је допуњена новим задацима, исправљене су уочене штампарске грешке и додати су тестови за проверавање знања ученика.

У Математичкој гимназији у Београду од 1986. год. и на факултетима Београдског универзитета од 1990. год. где се за упис полаже математика, проверавање знања кандидата врши се помоћу тестова. Како је досадашње искуство показало да је то *поуздан* и *једноставан* начин проверавања знања, предлажемо да се тестирање повремено користи и у оцењивању ученика средње школе.

Тестови на крају књиге су само *предлог* и *модел* како састављати нове тестове. Уколико би се користили само приложени тестови – то би била

антипропаганда математике. Запоставили бисмо оно што управо радимо у настави: развијање мисаоности, тачности, радозналости, креативности, склоности према стваралаштву, или кратко речено ученици би били ускраћени за стицање математичке културе.
Срдачно захваљујемо рецензентима новог издања који су дали много корисних примедби и сугестија.

У Београду, августа 1999. Аутори

Грчки алфабет

$\mathrm{A}\ \alpha$ алфа	$\mathrm{I}\ \iota$ јота	$\mathrm{P}\ \rho$ ро
$\mathrm{B}\ \beta$ бета	$\mathrm{K}\ \kappa$ капа	$\Sigma\ \sigma$ сигма
$\Gamma\ \gamma$ гама	$\Lambda\ \lambda$ ламбда	$\mathrm{T}\ \tau$ тау
$\Delta\ \delta$ делта	$\mathrm{M}\ \mu$ ми	$\Upsilon\ \upsilon$ ипсилон
$\mathrm{E}\ \epsilon$ епсилон	$\mathrm{N}\ \nu$ ни	$\Phi\ \varphi$ фи
$\mathrm{Z}\ \zeta$ зета	$\Xi\ \xi$ кси	$\mathrm{X}\ \chi$ хи
$\mathrm{H}\ \eta$ ета	$O\ o$ омикрон	$\Psi\ \psi$ пси
$\Theta\ \theta$ тета	$\Pi\ \pi$ пи	$\Omega\ \omega$ омега

При томе слова A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, T и X читамо као слова латинице.

САДРЖАЈ

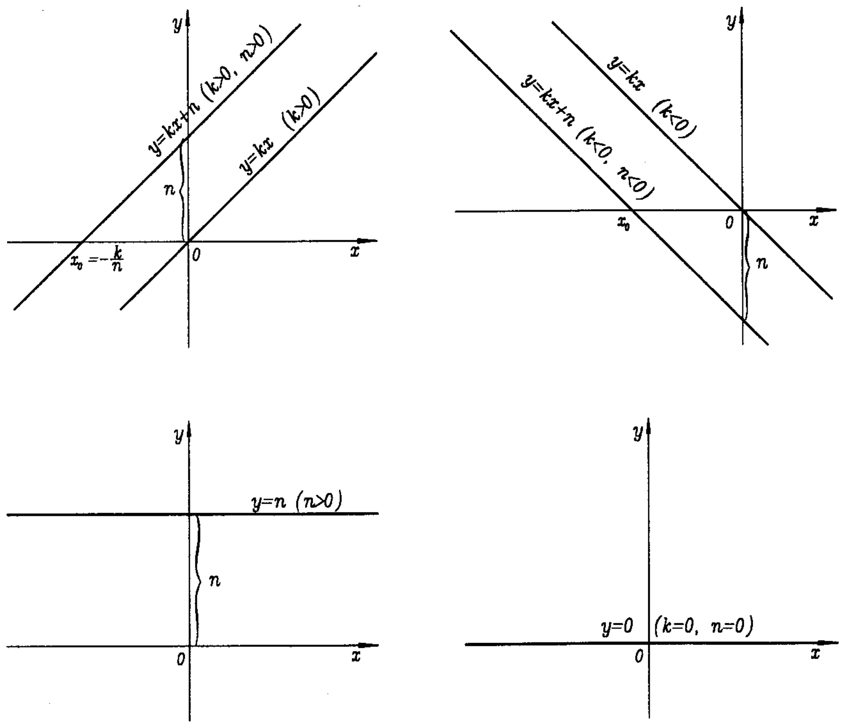
Глава I

ФУНКЦИЈЕ

1.1. ПРЕГЛЕД НАЈВАЖНИЈИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

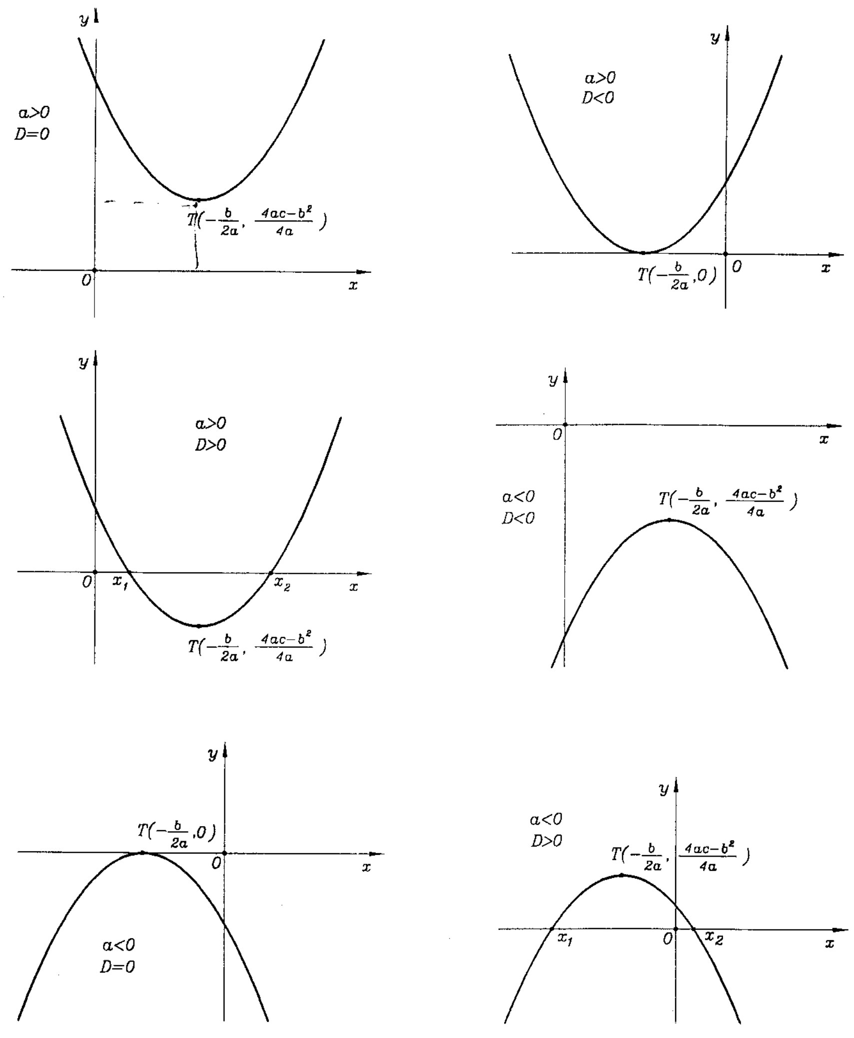
1° *Линеарна функција*

График функције је права чији је општи (експлицитни) облик: $y=kx+n$ $(k,n\in\mathbf{R})$ при чему је $k=\operatorname{tg}\varphi$ – коефицијент правца праве (где је φ угао према позитивном смеру x-осе), а n слободан члан (одсечак праве на y-оси од координатног почетка).

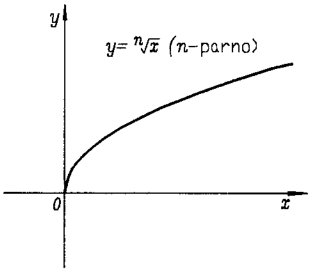


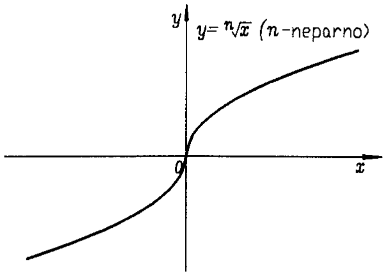
2° *Квадратна функција*

График функције, чији је општи облик: $y=ax^2+bc+c$ ($a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq0$), је парабола. Нуле функције су реална решења једначине $ax^2+bx+c=0$, тј. $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Дискриминанта је $D=b^2-4ac$. Теме графика функције је тачка $T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. У зависности од знака коефицијента a и дискриминанте D разликујемо шест карактеристичних случајева.



3° *Функције облика* $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$

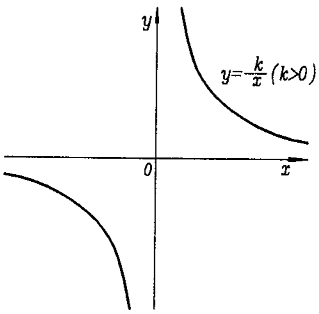


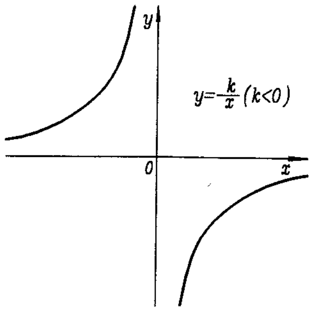


Ако је n паран број, функција $y = \sqrt[n]{x}$ је дефинисана за $x \geq 0$.
Ако је n непаран број, функција $y = \sqrt[n]{x}$ је дефинисана за свако x.

4° *Функције облика* $y = \dfrac{k}{x}$, $k \in \mathbf{R}$

Графике функције је хипербола, дефинисан за $x \neq 0$. Асимптоте функције су y-оса и x-оса.

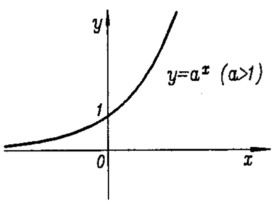


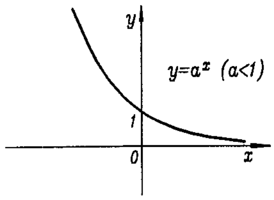


5° *Експоненцијална функција*

То је функција облика $y = x^a$ ($a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$). Функција је дефинисана и позитивна за $x \in \mathbf{R}$.

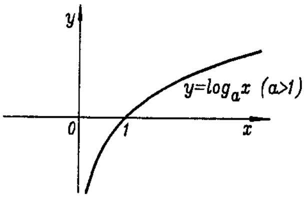
$y = a^x$

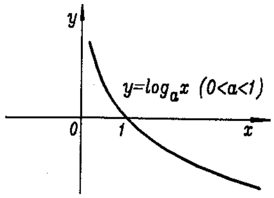




6° *Логаритамска функција*

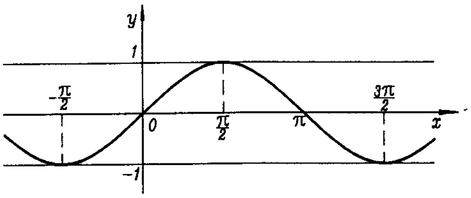
То је функција облика $y=\log_a x$ $(a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$. Дефинисана је за $x>0$. Нула функције је $x_0=1$.



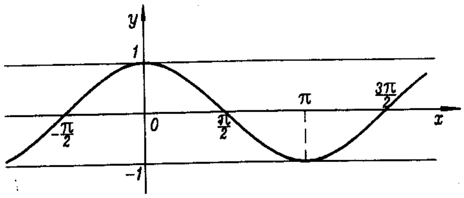


7° *Тригонометријске функције*

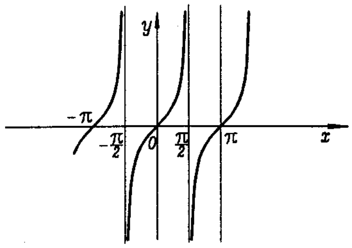
Функција $y=\sin x$
- дефинисана је за $x\in\mathbf{R}$
- период је $T=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y=0$ за $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y_{max}=1$, за $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y_{min}=-1$, за $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.



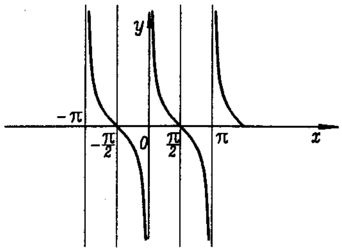
Функција $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$
- дефинисана је за $x\in\mathbf{R}$
- период је $T=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y=0$ за $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y_{max}=1$, за $x=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y_{min}=-1$, за $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.



Функција $y=\text{tg}\ x$
- за $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ није дефинисана и у тим тачкама има вертикалне асимптоте
- период је $T=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y=0$ за $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- функција је моното растућа за $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$



Функција $y=\text{ctg}\ x$
- за $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ није дефинисана и у тим тачкама има вертикалне асимптоте
- период је $T=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- $y=0$ за $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$
- функција је моното опадајућа за $x\in(\pi k,\pi+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$

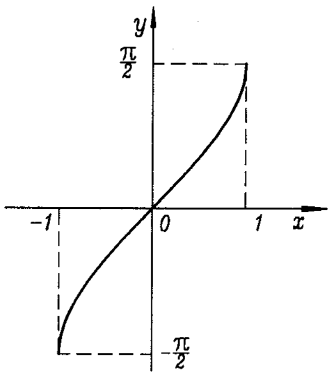


8° *Функција* $y = a\sin(bx+c)$, $(a, b, c \in \mathbf{R}$, *за* $a, b \neq 0)$

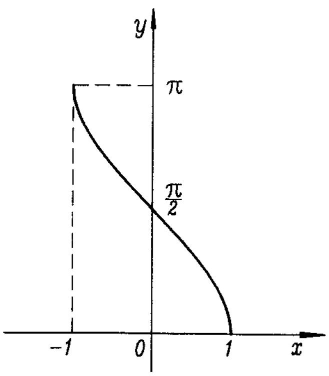
График функције је померен у односу на координатни почетак, и то улево ако је $c>0$, а удесно ако је $c<0$. Основни период је $T=\frac{2\pi}{|b|}$. Нуле функције добијамо из једначине $bx+c=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ако је $a>0$ функција има максималну вредност a за $bx+c=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а минималну $-a$ за $bx+c=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

9° *Инверзне тригонометријске функције, arcus–функције*

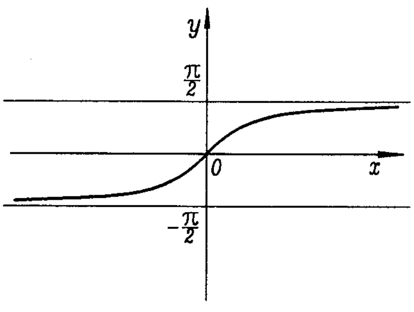
- Инверзна функција функције $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ је $y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$
- Инверзна функција функције $y=\cos x$, $x\in[0,\pi]$ је $y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$
- Инверзна функција функције $y=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ је $y=\operatorname{arctg} x$, $x\in\mathbf{R}$
- Инверзна функција функције $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0,\pi)$ је $y=\operatorname{arcctg} x$, $x\in\mathbf{R}$



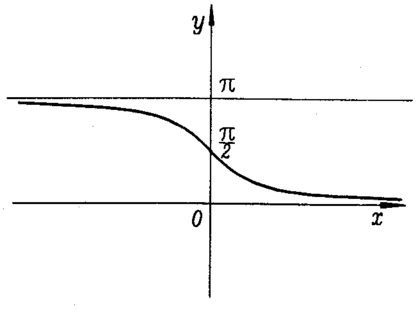
y=arcsinx



y=arccosx



y=arctgx



y=arcctgx

1. Скицирати графике функција:

а) $y=-1$; б) $y=-\frac{1}{2}x$; в) $y=3x$;

г) $y=\frac{2}{3}x+2$; д) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$; ђ $y=-x-2$.

2. У функцији $y=kx+n$, одредити параметре $k,n\in\mathbf{R}$ тако да график функције садржи тачку $M(x,y)$:

а) $y=kx+3,\ M(-2,3)$; б) $y=kx+2,\ M(-7,-12)$;

в) $y=-3x+n,\ M(-2,4)$; г) $y=x+n,\ M(-5,-4)$,

а затим за добијене вредности k и n скицирати график функције.

Скицирати график функција (задаци 3 – 5):

3. а) $y=\frac{1}{2}x^2$; б) $y=-x^2+1$; г) $y=x^2-3x+2$;

д) $y=-x^2+2x+3$; ђ) $y=x^2-|x|$; е) $y=|x^2+x|$;

4. а) $y=\sqrt{x},\ x\geq 0$; б) $y=\sqrt{-x},\ x\leq 0$; г) $y=\sqrt[3]{x}$;

д) $y=\sqrt[3]{x^2}$; ђ) $y=3^{-x}$; е) $y=2^{x+1}-1$;

ж) $y=2^{-|x|}$; з) $y=\log_2(x-1)$; и) $y=\log_2(2-x)$;

ј) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$;

5. а) $y=\sin(-2x)$; б) $y=\cos\frac{1}{2}x$;

в) $y=3\sin\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$; г) $y=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

д) $y=\frac{3}{2}-\sin x$; ђ) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

е) $y=\operatorname{ctg}2x$.

Израчунати (задаци 6 – 9):

6. а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}1$; г) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

7. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

д) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; ђ) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. а) $\arcsin\left(\cos\left(4+\frac{\pi}{2}\right)\right)$; б) $\arccos\left(\sin\left(6+\frac{\pi}{2}\right)\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(3+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

9. а) $\cos(2\operatorname{arcctg} 2)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$.

10. Дата је функција $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x-1}{x+1}$. Израчунати:

а) $f(2)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f(a)$;

г) $f(a^2-1)$; д) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; ђ) $f(\sqrt{a})$.

11. Дата је функција $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$. Израчунати:

а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f(x+2)$; г) $f(x)+2$.

12. Дата је функција $F(x)=x^3+2$. Одредити:

а) $F^3(x)-1$; б) $F(2y)$; в) $F(a+3b)$;

г) $F(x+10)$; д) $F(a)+3F(b)$.

13. Функција $f(x)$ задата је на следећи начин:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ако је } x \text{ рационално и } |x|<1;\\ -x^2, & \text{ако је } x \text{ ирационално и } |x|<1;\\ x^2+4, & \text{ако је } x \text{ рационално и } |x|\geq 1;\\ -x^2-4, & \text{ако је } x \text{ ирационално и } |x|\geq 1.\end{cases}$$

Одредити $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

14. Функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дефинисане су на скупу $A=\{0,1,2,3,4\}$ таблично:

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0	-1	2	1	-3
$f_2(x)$	1	0	-1	0	2

Формирати таблице за функције:

а) $f_1(x)+f_2(x)$; б) $2f_1(x)-f_2(x)$; в) $f_1(x)f_2(x)$;

г) $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$; д) $|f_1(x)-f_2(x)|$.

15. Решити једначину $f(x)=g(x)$ за функције $y=f(x)$ и $y=g(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & x < 0; \\ 7x + 3, & x > 0; \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 5, & x < 0; \\ x + 8, & x > 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $g(x) = 2x$, $x \neq 2$.

16. Да ли су једнаке функције:

а) $f(x) = \sqrt{x^2}$ и $g(x) = x$; б) $f(x) = \log x^2$ и $g(x) = 2\log x$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ и $g(x) = x$; г) $f(x) = e^{\ln x}$ и $g(x) = x$?

д) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2}}$, $x < 0$ и $g(x) = \sqrt{\dfrac{(1-x)^2}{x^2}}$, $0 < x < 1$;

ђ) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ и $g(x) = \log_5 5^{\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2}$.

17. Нека је $f(t) = 2t^3 + \dfrac{2}{t^3}$. Доказати да је за све $t \neq 0$ важи $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

18. Ако је $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$, одредити функцију $g(x) = f\left(\dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}\right)$.

19. Ако је $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$, доказати да је $f(x+2) = \dfrac{(x+2)f(x+1)}{x}$, $(x \neq 0)$.

Одредити област дефинисаности функција (задаци 20 – 31):

20. а) $f(x) = x^2 + 2$; б) г) $y = x^3 + x^2 - x$;

в) $P(a) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - површина једнакостраничног троугла;

г) $P(r) = \pi r^2$ - површина круга.

21. а) $y = \dfrac{x+3}{x-5}$; б) $y = \dfrac{x}{x+2}$; в) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$;

г) $y = \dfrac{x+6}{x^2-4}$; д) $y = \dfrac{3x+4}{x^2-6x+8}$; ђ) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-4x+3}$;

е) $y = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$; ж) $y = \dfrac{2x+3}{x^4-16}$; з) $y = \dfrac{x^2+1}{x^4-1}$.

22. а) $y = \dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$; б) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$;

в) $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}$; г) $y = \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$.

23. а) $y = \sqrt{x-2}$; б) $y = \sqrt{3x+2}$; в) $y = \sqrt{1-x}$;

г) $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}$; д) $y = (\sqrt{x})^2$; ђ) $y = \sqrt{x^2}$;

е) $y = \sqrt{9-x^2}$; ж) $y = \sqrt{2x-x^2}$; з) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$;

и) $y = \sqrt{12 + x - x^2}$; ј) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$; к) $y = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x - 2}}$;

л) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2 + x - x^2}}$.

24. а) $y = \sqrt{\dfrac{3 + x}{3 - x}}$; б) $y = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{x + 5}{4x - x^2 - 3}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x - 4}{6 - x - x^2}}$.

25. а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \sqrt[5]{5 - x}$;

в) $y = \sqrt[5]{x^2 - 4x}$; г) $y = \sqrt[7]{\dfrac{2x + 1}{x^2 - 5x}}$;

26. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 1}$; б) $y = 2x - \sqrt{x^2 - 4x}$;

в) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{12 + x - x^2}$; г) $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt[4]{5 - x}$;

д) $y = x + \sqrt[3]{x + 7}$; ђ) $y = 2 - x^2 + \sqrt[5]{x^2 - 9}$.

27. а) $y = 5^x$; б) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; в) $y = 2^{\frac{x}{x - 2}}$;

г) $y = 2^{\sqrt{3x - x^2}}$; д) $y = -2^{\sqrt{4 - x}}$; ђ) $y = 4^{\sqrt{2x + 3}}$.

28. а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{1/2} x$;

в) $y = \log_3(x + 5)$; г) $y = \lg(x - 2) + \lg(x + 2)$;

д) $y = \lg(x^2 - 4)$; ђ) $y = \log_4(x^2 - 4x)$;

е) $y = \lg(2x^2 - x - 6)$; ж) $y = \log_2 \sqrt[3]{x^3 - 8}$.

29. а) $y = \log_2(4 - x^2) + \sqrt{36 - x^2}$;

б) $y = \log_2(-2x^2 + 5x + 3) + \log_{1/3}(x^2 - 2x)$;

в) $y = \dfrac{\log_2(3x^2 - 2x - 8)}{x - 5}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\lg(3x - 5)}$;

д) $y = \lg \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$; ђ) $y = \ln \dfrac{1 - 2x}{x + 2}$, $x \geq -1$;

е) $y = \dfrac{2 + \sqrt{x - 1}}{\ln(2 - x)}$.

30. а) $y = \operatorname{cosec} x$; б) $y = \sec x$; в) $y = \sin \sqrt{x}$;

г) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$; д) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$; ђ) $y = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$;

е) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{1}{x^2}$; ж) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$; з) $y = \sqrt{\sin \dfrac{1}{x}}$;

и) $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$; j) $y=\arcsin\dfrac{2}{1-x}$; к) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

л) $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.

31. а) $y=\sqrt{1-|x|}$; б) $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; в) $y=\log_2\log_3\log_4 x$;

г) $y=\lg|4-x^2|$; д) $y=\lg(3^x-3^{-x})$; ђ) $y=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;

е) $y=\dfrac{\sqrt{\lg\cos x}}{\sin x}$; ж) $y=\log_2(\sin x-\cos x)$.

32. Одредити област вредности следећих функција:

а) $y=\arcsin x$; б) $y=\sin x\cos x$; в) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$;

г) $y=x+\dfrac{1}{x}$; д) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; ђ) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$;

е) $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$; ж) $y=\sqrt{-x^2+x+2}$; з) $y=\sin x+\cos x$;

и) $y=\lg(1-2\cos x)$; j) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; к) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

33. Дате су функције $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{(x+1)(x-2)}$ и $g(x)=\dfrac{4+x}{(x+1)(x-2)}$, $x\neq -1$, $x\neq 2$. Одредити област вредности функције $f(x)-g(x)$.

1.2. СВОЈСТВА РЕАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Ограниченост

За функцију $f: A\to \mathbf{R}$ $(A\subseteq \mathbf{R})$ каже се да је ограничена одозго (односно, ограничена одоздо) ако је такав скуп њених вредности, тј. ако постоји такав реалан број M да за свако $x\in A$ важи $f(x)\le M$ (односно $f(x)\ge M$). Ако је функција ограничена и одоздо и одозго, каже се да је ограничена.

Монотоност

За функцију $f: A\to \mathbf{R}$ $(A\subseteq \mathbf{R})$ се каже да је:
1° *растућа* ако за свако $x_1, x_2\in A$ из

$$x_1\le x_2 \quad \text{следи} \quad f(x_1)\le f(x_2);$$

2° *опадајућа* ако за свако $x_1, x_2\in A$ из

$$x_1\le x_2 \quad \text{следи} \quad f(x_1)\ge f(x_2).$$

Парност и непарност

Функција $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subseteq \mathbf{R}$) је *парна* ако:
1° скуп A је симетричан у односу на тачку 0,
2° за свако $x \in A$ важи $f(-x) = f(x)$.

Функција $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subseteq \mathbf{R}$) је *непарна* ако:
1° скуп A је симетричан у односу на тачку 0,
2° за све $x \in A$ важи $f(-x) = -f(x)$.

Периодичност

За функцију $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subseteq \mathbf{R}$) се каже да је периодична ако постоји такав број $T \neq 0$ да за свако $x \in A$ важи $x \pm T \in A$ и $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Број T се назива периодом функције f. Ако постоји најмањи позитиван период, он се назива основним периодом.

Нула функције

Нула функције $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subseteq \mathbf{R}$) је сваки реалан број $x_0 \in A$ такав да је $f(x_0) = 0$.

34. Доказати да су функције $y = x^2$ и $y = x^3$ ограничене на интервалу $[-2, 6]$.

35. Одредити које од следећих функција су ограничене на интервалу $(-1, 1)$:

а) $y = \dfrac{1}{x+1}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; в) $y = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$; д) $y = \dfrac{1}{x^2+4}$.

36. Испитати које од следећих функција су ограничене на скупу $\mathbf{R}$:

а) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; в) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$;

г) $y = \dfrac{3}{x^2+6x+10}$; д) $y = \sin x + \cos x$; ђ) $y = \dfrac{1}{2}\log_2 x$.

37. Доказати да су следеће функције парне:

а) $y = x^4$; б) $y = |x|$; в) $y = \cos x$; г) $y = x^2 + \dfrac{1}{2}|x|$.

38. Доказати да су следеће функције непарне:

а) $y = x^3$; б) $y = x|x|$; в) $y = \sin x$;

г) $y = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$; д) $y = x + \dfrac{1}{2}x^3 - \arcsin x$.

39. Испитати парност, односно непарност следећих функција:

а) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$; б) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$;

в) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$; г) $y = x + \operatorname{tg} x$;

д) $y = x^2 - \dfrac{1}{2}\cos x$; ђ) $y = \sin x + \cos x$;

е) $y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$; ж) $y = \dfrac{x^2|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

40. Одредити све функције које су и парне и непарне.

41. Доказати да су следеће функције периодичне и одредити њихове основне периоде:

а) $y = \sin 2\pi x$; б) $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ $A, B, \alpha \in \mathbf{R}$, $A, B \neq 0$, $\alpha > 0$;

в) $y = \sin(ax+b)$ $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$; г) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; д) $y = \cos^2 x$;

ђ) $y = \sin^4 x$; е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; ж) $y = |\cos x|$;

з) $y = \sin^3 x$; и) $y = \{x\}$ — разломљени део броја x;

ј) $y = \cos\dfrac{3x}{2} - \sin\dfrac{x}{3}$.

42. Нека за функцију $f(x)$ постоји константа C тако да за све x важи $f(x+C) = \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$. Доказати да је $f(x)$ периодична функција.

43. Нека за функцију $f(x)$ постоји константа a тако да за све x важи $f(x+a) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Доказати да је $f(x)$ периодична функција.

44. Доказати да функције:

а) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = x^2$

нису периодичне.

45. Испитати знак и одредити нуле функције:

а) $y = \dfrac{x^2+4x-21}{x^2+3x-4}$; б) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; в) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$;

г) $y = (x^2-4x+3)e^x$; д) $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$; ђ) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

е) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$; ж) $y = \arcsin\dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}$;

з) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}$; и) $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$;

ј) $y = [x]$, највећи цео број $\leq x$; к) $y = \log_3(x^2-5x+7)$.

46. Доказати да функција $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ строго расте на интервалу $(0,1)$ и строго опада на интервалу $(1,+\infty)$.

47. Доказати да функција $f(x) = x^3 - 3x$ строго расте на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, а строго опада на интервалу $(-1,1)$. Наћи, затим, нуле те функције и интервале у којима је она позитивна, односно негативна. На основу овога скицирати график те функције.

48. Испитати монотонију следећих функција:

а) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x,\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; б) $y = (x^2-1)^2 \ \ -1 < x < 1$;

в) $y = x^3 + 2x + 1$; г) $y = 3^{(x^2-1)^3+1}$.

д) $y = \dfrac{3x-1}{3-x}$; ђ) $y = \dfrac{5-2x}{x-1}$.

49. Наћи све вредности x за које функција добија најмању вредност:

а) $y = \sin x - \cos^2 x - 1$;

б) $y = |x^2-1| + |x^2-4| + |x+2| + |x+1|$;

в) $y = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d| \ \ a,b,c,d \in \mathbf{R},\ \ a < b < c < d$;

г) $y = \dfrac{1+x^2}{1+x}$, за $x \geq 0$.

50. Одредити највећу вредност функције:

а) $y = \sin 2x \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$;

в) $y = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2 \dfrac{8}{x}$, за $1 \leq x \leq 64$;

г) $y = \dfrac{x}{ax^2+b}$, $\ a > 0,\ b > 0$.

51. Дате су функције:

а) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$;

б) $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Одредити: 1° област дефинисаности; 2° област вредности; 3° основни период; 4° нуле функције; 5° испитати парност сваке од ових функција.

1.3. СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА. ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Нека је $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тада је сложена функција $h = g \circ f$ дефинисана као $h(x) = g(f(x))$ за свако $x \in A$ и тада је $h : A \to C$.

Ако је $f : A \to B$ бијективна („1-1“ и „на“) функција тада је инверзна функција за f — функција $f^{-1} : B \to A$ таква да за свако $x \in A$ важи $f^{-1}(f(x)) = x$ и за свако $y \in B$ важи $f(f^{-1}(y)) = y$. Графици узајамно инверзних функција симетрични су међусобно у односу на симетралу првог и трећег квадранта.

52. Дате су функције $x = g(t)$ и $y = f(x)$. Одредити сложену функцију $y = f(g(t))$:

а) $x = t^3 + 1,\ y = x^2$; б) $x = t^2 + 4,\ y = \sqrt{1-x}$;

в) $x = -t^2 - 9,\ y = \sqrt{x}$; г) $x = t^2 + 1,\ y = \dfrac{1}{x+4}$.

53. Дате су функције:

а) $f(x) = 2x - 1$; б) $fx) = \dfrac{1}{2x},\ x \neq 0$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \neq -1$; г) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2},\ x \neq -2$.

Одредити $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$.

54. Израчунати $(f{\circ}g){\circ}h$ и $f{\circ}(g{\circ}h)$, ако је $f(x) = x - 3$, $g(x) = -2x$ и $h(x) = 4x - 11$, $x \in \mathbf{R}$.

55. Нека је $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Доказати да је $g{\circ}h = f$, $f{\circ}h = g$, $((f{\circ}g){\circ}h)(x) = x$, $((g{\circ}f){\circ}h)(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

56. Дате су функције:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x \geq 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Одредити $f{\circ}f$, $f{\circ}g$, $g{\circ}f$ и $g{\circ}g$.

57. Одредити $f(x)$ ако је:

а) $f(x+1) = 3x^2 + 2x + 5$; б) $f(1-x) = x + 1$;

в) $f(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$; г) $f(3x+1) = 9x^2 + 3x + 1$;

д) $f(x-4) = \dfrac{x-7}{x-2}$; ђ) $f(x+2) = \dfrac{x}{x+5}$;

е) $f\left(\dfrac{3x-1}{x}\right) = 2x$; ж) $f\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) = x - 3,\ x \neq -3$;

з) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0$; и) $f\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 - 1$;

ј) $f(x^2) = \dfrac{4}{x}$.

58. Наћи инверзне функције следећих функција и скицирати њихове графике:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$;

в) $f(x) = 2^{-x}$; г) $f(x) = x^4, x < 0$;

д) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ -1 \leq x \leq 0$; ђ) $f(x) = \sqrt[4]{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$;

е) $f(x)=\begin{cases} x, & -\infty < x < 1,\\ x^2, & 1 \le x \le 4,\\ 2^x, & 4 < x < +\infty, \end{cases}$; ж) $f(x)=\sin x,\quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$;

з) $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$; и) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$; ј) $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x>0$.

59. Дата је функција $f(x)=\sqrt{x}\sqrt[3]{\sqrt{x}}$, $x>0$. Одредити $f^{-1}(4)+f^{-1}(16)$.

60. Да ли следеће функције имају инверзну функцију:

а) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(x \ne -\dfrac{d}{c})$; б) $y=\dfrac{\sin x+6}{\sin x-4}$;

в) $y=\dfrac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$.

61. Показати да су функције

$$y=x^2-x+1, \qquad \text{за } x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad \text{и}$$

$$y=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}, \qquad \text{за } x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

међусобно инверзне.

62. Дате су функције $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

а) Доказати да функција $f(x)$ има инверзну функцију и наћи њен аналитички израз.

б) Доказати да функција $g(x)$ нема инверзну функцију, али да је има ако се за њену област дефинисаности усвоји интервал $[0,+\infty)$, а за област вредности $[1,+\infty)$. Одредити аналитички израз за ту функцију.

1.4. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈА

Нека је $f : A \to \mathbf{R}$ реална функција реалне променљиве и $x_o \in \mathbf{R}$ тачке нагомилавања скупа A. За функцију f кажемо да има *граничну вредност* (*лимес*) b ($b \in \mathbf{R}$) у тачки x_0 и пишемо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ ако

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x \in A)\big(0<|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon\big).$$

Ако постоје $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, $a,b \in \mathbf{R}$, тада је

1° $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2° $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, ако је $b \neq 0$.

Нека је $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$, $A, B \subseteq \mathbf{R}$ и нека је x_0 тачка нагомилавања скупа A. Даље, нека је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, тада је $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

Одредити следеће граничне вредности (задаци 63 – 69):

63. а) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2 - 3x + 2)$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6x+5}{4x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x^2+1}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}+1\right)$.

64. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\sqrt{x}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -1} 2^x$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 3^x$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; ђ) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; ж) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x$; з) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\operatorname{ctg} x$.

65. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{x(x-2)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to +0}\log_2 x$; д) $\lim\limits_{x\to +0}\log_{1/2} x$; ђ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x$; е) $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{ctg} x$.

1.4.1. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈА КОЈЕ СЕ ЈАВЉАЈУ КАО НЕОДРЕЂЕНИ ИЗРАЗИ

Облик „$\frac{0}{0}$“

66. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-7x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+8x+16}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2+2x-3}$;

и) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^4-2x^3+3x-6}$;

ј) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{|x|-4}$;

к) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$.

67. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x(\sqrt{x}-3)}{x-9}$;

ђ) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-3x}}{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+2}}{x^3-27}$;

и) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$;

ј) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{27}} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{9}}{x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}}$;

к) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-2}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

љ) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{x+8}-4}{2-\sqrt[3]{x}}$;

м) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{8x}-\sqrt{x+8}}{x-8}$;

н) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}+2}{x+7}$;

њ) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{23+x}-3}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

п) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

р) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a \geq 0$;

с) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $m,n \in \mathbf{N}$;

т) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

Облик „$\frac{\infty}{\infty}$“

68. а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+2}{2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+2x+1}{x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right);$

ђ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x+5)^4};$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x};$ ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}};$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-2x+3}}{x^2+3x};$ и) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3+2}}.$

Облик „$\infty-\infty$“

Граничне вредности овог облика често се израчунавају свођењем на облик „$\dfrac{\infty}{\infty}$“.

69. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x});$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x);$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x});$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x));$

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x(\sqrt{x^2+1}-x));$ ђ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1});$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x),\quad a,b\in\mathbf{R};$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right);$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x});$ и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).$

1.4.2. НЕКЕ ВАЖНИЈЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ

1° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
3° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	4° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0,a\neq1)$
5° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	6° $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^k-1}{x}=k\ (k\in\mathbf{R},k\neq0)$

Одредити следеће граничне вредности (задаци 70 – 77):

70. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x};$ б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x};$ в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 2x};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$; ј) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; љ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x\sin x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

71. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 2x}{\sin 4x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 3x}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\cos 8x-\cos 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3x-9)}{9x-27}$;

з) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{4x}+\dfrac{x^2-x}{x}\right)$;

ј) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(\dfrac{\sin(2x-1)}{4x^2-1}+\dfrac{8x^3-1}{2x^2-x}\right)$.

72. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq b$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$, $a\in\mathbf{R}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{\sin^2 x}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\cos\dfrac{\pi}{4}x}$;

ђ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha\neq 0$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\right]$.

73. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$; б) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}(1+4t)^{\frac{1}{t}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{5x}}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{cx}}$, $abc\neq 0$;

е) $\lim\limits_{x\to1}(1+(x-1))^{\frac{1}{x-1}}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{\dfrac{x}{2}}$; ј) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x-5}\right)^{2x-5}$;

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

74. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{6}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^{\frac{2}{3}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{7-x}\right)^{\frac{2}{3}x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x}{1-x}\right)^{\frac{x}{3}}$; ђ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+2x^2+1}{2x^3+x^2+2x+1}\right)^{3x}$; ј) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2-3}\right)^{x^4}$;

к) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$, $(k,m\in\mathbf{R})$.

75. а) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0+}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; ђ) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$;

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{\sqrt{x}}$

76. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$, $(a>0,\ a\neq1)$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $(a>0,\ a\neq1)$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$, $(k\in\mathbf{R})$; ђ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$, $a>0$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\big(\ln(x+a)-\ln x\big)$, $(a>0)$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$;

ј) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $(a,b\in\mathbf{R})$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$, $(a\in\mathbf{R})$; м) $\lim\limits_{x\to\infty} x\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

77. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{2+\ln x}}$.

1.5. ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ. НЕПРЕКИДНОСТ

Број a је *лева гранична вредност* функције $f(x)$ у тачки x_0, $a=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, ако за све $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да из $x_0-\delta<x<x_0$ следи $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Број b је *десна гранична вредност* функције $f(x)$ у тачки x_0, $b=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, ако за све $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да из $x_0<x<x_0+\delta$ следи $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Ако за функцију f постоје $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и ако су ове граничне вредности међусобно једнаке (и једнаке броју a), тада постоји и гранична вредност функције у тачки x_0 и једнака је a.

Ако је функција f дефинисана у тачки x_0 и има граничну вредност $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, при чему је гранична вредност функције једнака вредности функције ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$), тада је функција f *непрекидна у тачки* x_0. Ако функција није непрекидна у тачки x_0, каже се да је x_0 *тачка прекида функције.*

78. Одредити леву и десну граничну вредност у тачки $x_0=0$ за следеће функције и испитати њихову непрекидност у тачки $x_0=0$:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x^2+1, & x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ 2x-1, & x>0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2,\\ x-3, & x>0;\end{cases}$ г) $f(x)=x+|x|$;

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$ ђ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-x|}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|x-1|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

79. Дата је функција $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ 1, & 0\leq x\leq 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$. Одредити леву и десну граничну вредност функције у тачкама $x_1=0$ и $x_2=1$ и испитати непрекидност ове функције.

80. Одредити леву и десну граничну вредност у тачки $x_0=0$ за следеће функције:

а) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$;

в) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ 1-x, & x\leq 0;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geq 0,\\ x^2-1, & x<0;\end{cases}$

д) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; ђ) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x}$.

81. Одредити вредност реалног параметра a тако да дата функција буде непрекидна:

а) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<0,\\ 3+2x-x^2, & x\geq 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, & x\leq 1,\\ 2x+a, & x>1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+x+1}, & x\leq 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+a, & x>1.\end{cases}$

82. Функција $f(x)$ задата је на следећи начин

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x<0,\\ x, & \text{за } 0\leq x<1,\\ -x^2+4x-2, & \text{за } 1\leq x<3,\\ 4-x, & \text{за } x\geq 3.\end{cases}$$

Да ли је ова функција непрекидна?

83. Дате су функције

а) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{за } x\leq 1,\\ 3-ax^2, & \text{за } x>1;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & \text{за } x\leq -\dfrac{\pi}{2},\\ a\sin x+b, & \text{за } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & \text{за } x\geq \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Одредити константе a и b тако да функције буду непрекидне за све x.

84. Нека функција $y = f(x)$ има прекид у тачки x_0. Да ли тада и функција $y = f^2(x)$ има прекид у тачки x_0?

85. Испитати непрекидност следећих функција у нули и скицирати њихове графике у околини нуле:

а) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

б) $y = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

ђ) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$

86. Испитати непрекидност функција:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{-1}{1 + \ln \dfrac{1}{x-1}}$;

в) $f(x) = e^{\frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}}$;

г) $f(x) = e^{1 - 2^{\frac{1}{x-2}}}$;

д) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x}$;

ђ) $f(x) = (x - 1)\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x^2}$;

е) $f(x) = (1 + x)\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

87. Доказати да су функције:

а) $f(x) = c, \quad c \in \mathbf{R}$;

б) $f(x) = x$;

в) $f(x) = \sin x$;

г) $f(x) = x^3$

непрекидне у свакој тачки $x_0 \in \mathbf{R}$.

88. а) Нека је $y = x^2$. Када $x \to 2$, тада $y \to 4$. Одредити δ тако да из $|x - 2| < \delta$ следи $|y - 4| < \varepsilon = 0.001$.

б) Нека је $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Када $x \to 2$, $y \to \dfrac{3}{5}$. Одредити δ тако да из $|x - 2| < \delta$ следи $\left|y - \dfrac{3}{5}\right| < 0.1$.

в) Доказати да $\sin x \to 1$ када $x \to \dfrac{\pi}{2}$ и одредити δ тако да из $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| < \delta$ следи $|\sin x - 1| < 0.01$.

89. а) Дата је функција $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Када x неограничено расте, тада је $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$. Одредити M тако да из $|x| > M$ следи $|y| < \varepsilon$.

б) Ако $x \to \infty$, тада $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Одредити M тако да из $|x| > M$ следи $|y-1| < \varepsilon$.

90. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ применом „ε-δ“ дефиниције и попунити следећу таблицу

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\cdots$
δ					

б) Доказати да је $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ и попунити следећу таблицу

M	10	100	1000	10 000	$\cdots$
δ					

1.6. АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈА

Асимптоте:

1° Права $x = a$ је „вертикална“ асимптота графика функције $y = f(x)$ ако је $\lim\limits_{x\to a-0} = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

2° Права $y = b$ је „хоризонтална“ асимптота графика функције $y = f(x)$ ако је $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$.

3° Права $y = ax + b$ је „коса“ асимптота графика функције $y = f(x)$ ако је $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$.

Одредити асимптоте графика следећих функција (задаци 91 – 93):

91. а) $y = \dfrac{1}{x^2-4x+5}$; б) $y = \dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3}$;

в) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x-2}$; г) $y = \dfrac{4x^3-1}{x^2-3x+2}$;

д) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; ђ) $y = \dfrac{2x^3-1}{x^2-4}$;

е) $y = \dfrac{x^3-5}{3-x^2}$; ж) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$;

з) $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$; и) $y = \dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$;

ј) $y = \dfrac{x^3-3x}{x^2+x-2}$.

92. а) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^3}{x}}$;

в) $y = \sqrt{x^3-x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-x}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3-1}}{x}$; ђ) $y = \sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}$;

е) $y = \sqrt[4]{x^4+4x^3+8x^2}$; ж) $y = \ln(1+e^x)$;

з) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-2}$; и) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x}$.

93. а) $y = \dfrac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}}$; б) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

в) $y = \dfrac{2x+1}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; г) $y = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$;

д) $y = (x^2+1)\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$.

94. Доказати да графици функција:

а) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x}$

имају хоризонталне асимптоте и одредити их.

1.6. ДОДАТАК УЗ ПРВУ ГЛАВУ

95. Одредити област дефинисаности следећих функција:

а) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$; б) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$;

в) $f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$; г) $f(x) = (1+x) + x + \dfrac{x^2}{1+x} + \cdots$.

96. Доказати да важи:

а) $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x,\ |x| \le 1$;

б) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbf{R}$;

в) $\arcsin(\sin x) = \pi - x,\ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbf{R}$;

д) $\arcsin x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

ђ) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$, $|x| \leq 1$.

97. 1° Дата је функција $f : (-\infty, -\frac{1}{2}] \to B$, $f(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$. а) Наћи $f(x)$. б) Одредити скуп B тако да f буде бијекција. в) Наћи аналитички израз за функцију $f^{-1} : B \to (-\infty, -\frac{1}{2}]$.

2° Дата је функција $f : (-\infty, \frac{1}{2}] \to B$, $f(3x+1) = 9x^2 + 3x + 1$. а) Наћи $f(x)$. б) Одредити скуп B тако да f буде бијекција. в) Наћи аналитички израз за функцију $f^{-1} : B \to (-\infty, \frac{1}{2}]$.

98. За следеће функције одредити област дефинисаности, испитати парност, одредити нуле и знак:

а) $f(x) = \log_2 \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x}$; б) $f(x) = \log_3 \dfrac{2x^2 - x - 10}{x - 4}$;

в) $f(x) = (x-1)\log_{10}(x^2 - 4x + 3)$; г) $f(x) = \log_2 \dfrac{1-x}{1+x}$.

99. Дате релације написати у експлицитном облику:

а) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; б) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$;

в) $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; г) $2x - 1 + 2^y = 0$;

д) $y^2 - 2xy + 1 = 0$; а) $\log_2(x - y) - x + 1 = 0$;

100. Доказати да следеће функције нису периодичне:

а) $y = \cos\sqrt{x}$; б) $y = \cos x^2$;

в) $y = x + \sin x$; г) $y = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{5}x)$;

д) $y = \sin x^2$; ђ) $y = x - [x] + \sin x$.

101. Доказати да су следеће функције периодичне и одредити њихов основни период

а) $y = \sin\dfrac{3}{2}x + 4\sin\dfrac{4}{3}x + 2\cos\dfrac{x}{2}$;

б) $y = a_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + a_n\sin(\omega_n t + \alpha_n)$, $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbf{Q}$, $\omega_1, \ldots, \omega_n \neq 0$.

102. Одредити $f\circ g$ и $g\circ f$ ако је

а) $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + g(2x+1) = 2x$, $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - g(2x+1) = x$;

б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2g\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = x - 2$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + g\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = x + 1$.

103. Доказати да, ако функција $f(x)$ задовољава релацију $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - 2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 0$, тада је $f(x) \equiv 0$, осим, можда, вредности функције $f(x)$ у тачкама $x = 0$ и $x = 1$.

104. Ако је $F\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) + 2F\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = x$, наћи $F(x)$.

105. Описати конструкцију графика функције $y = f(x) + c$, ако је познат график функције $y = f(x)$ и $c \in \mathbf{R}$. Конструисати, затим, графике функција а) $y = x^2 - 2$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = |x| - 4$.

106. Описати конструкцију графика функције $y = f(x + c)$, $c \in \mathbf{R}$, ако је познат график функције $y = f(x)$. Затим скицирати графике функција

а) $y = |x + 1|$; б) $y = (x - 2)^2$; в) $y = e^{x-3}$;

г) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; д) $y = (x + 1)^2 - 2$;

ђ) $y = 1 + \log_2(x - 1)$; е) $\left[x - \dfrac{1}{2}\right] + 1$.

107. Ако је познат график функције $y = f(x)$ описати конструкцију графика функције $y = f(ax)$, $a \neq 0$. Конструисати, затим, графике следећих функција.

а) $y = \sqrt{-x}$; б) $y = \arcsin 2x$; в) $y = \arcsin \dfrac{x}{3}$;

г) $y = \log_2 \dfrac{x}{2}$; д) $y = \sin(-3x)$.

108. Ако је познат график функције $y = f(x)$, описати конструкцију графика функције $y = af(x)$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Скицирати графике функција

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -\dfrac{1}{3}\cos x$; в) $y = 2x^2$;

г) $y = \dfrac{3}{2}\log_2 2x$; д) $y = \dfrac{1}{4}3^{\frac{x}{2}}$.

109. Израчунати граничне вредности:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$;

д) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/6} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$; ђ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)}$, $a \in \mathbf{R}$;

е) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\sin \frac{x - a}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}\right)$, $a \neq 0$; ж) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[(1 - x)\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right]$;

з) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$; и) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;

ј) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x + 1}}$.

110. Израчунати:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2+} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$, $(a, b \in \mathbf{R})$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}$;

ђ) $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

111. Израчунати $(a, b > 0)$:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

112. Израчунати:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^{\sqrt{2}} x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos^{\sqrt{2}} x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

113. Доказати да је Дирихлеова функција

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \text{ рационално,} \\ 0, & \text{ако је } x \text{ ирационално} \end{cases}$$

периодична.

Глава II

ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ

2.1. ПРИРАШТАЈ ФУНКЦИЈЕ. ПОЈАМ ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ

Прираштај функције

Нека је $y = f(x)$ непрекидна крива у равни xOy, $M_0(x_0, y_0)$ произвољна фиксирана тачка на тој кривој и $M(x, y)$ још једна тачка те криве различита од M_0.

Прираштај независно промењиве је број

$$\Delta x = x - x_0,$$

а прираштај функције f у тачки x_0 је број

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Први извод

Први извод $f'(x)$ функције f у тачки x_0 је (коначна) гранична вредност

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Брзина кретања материјалне тачке

Брзина кретања материјалне тачке која се креће по правој по закону $x = f(t)$ у тренутку t_0 је

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

114. Наћи прираштај функције $y = x^3$ у тачки $x_1 = 2$, ако је прираштај Δx независно променљиве:

а) 2; б) -1; в) $0,5$; г) $-0,1$.

115. Израчунати вредност количника $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ за функције:

а) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ за $x = 1$, $\Delta x = 0,1$;

б) $y = \dfrac{1}{x}$ за $x = 2$, $\Delta x = 0,01$;

в) $y = \sqrt{x}$ за $x = 4$, $\Delta x = 0,4$,

а затим одредити граничну вредност овог количника кад $\Delta x \to 0$.

116. Наћи Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, који одговарају промени аргумента од x до $x + \Delta x$ за функције:

а) $y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$; б) $y = x^3$;

в) $y = \dfrac{1}{x^2}$; г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = 2^x$; ђ) $y = \ln x$.

117. а) Доказати да је прираштај функције f за свако $x \in \mathbf{R}$ једнак $a\Delta x$ ако и само ако је $f(x) = ax + b$.

б) Да ли постоји функција чији је прираштај за свако $x \in \mathbf{R}$ једнак константи $c \neq 0$?

в) Да ли постоји функција чији је прираштај за свако $x \in \mathbf{R}$ једнак $a\Delta x + c$, $c \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$?

118. Ако је $f(x) = x^2$: а) одредити по дефиницији $f'(5)$, $f'(-2)$, $f'(-3/2)$,; б) одредити тачку у којој је $f(x) = f'(x)$.

119. Нека функција $f(x)$ има извод за $x = 0$ и нека је $f(0) = 0$. Доказати да је $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$.

120. По дефиницији одредити изводе следећих функција:

а) x^4; б) $x^{\frac{3}{4}}$; в) $\sqrt[3]{x^2}$; г) $\sqrt{x}$;

д) $\dfrac{1}{x}$; ђ) $\dfrac{1}{12}x^{12}$; е) ax^2 $(a \in \mathbf{R})$; ж) $\dfrac{a}{x}$ $(a \in \mathbf{R})$;

з) $ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$; и) $\dfrac{1}{2x^2 - 3}$; ј) $\sqrt{3x^2 + 1}$.

121. Дата је једначина праволинијског кретања тачке: $s = 5t + 6$. Одредити средњу брзину кретања: а) за првих 6 секунди; б) за временски интервал од краја треће до краја шесте секунде.

122. Тело, које слободно пада, креће се по закону $s = gt^2/2$, где је $g = 9,8m/sec^2$ — гравитациона константа.

1° Одредити средњу брзину кретања у интервалу од $t = 5sec$ до $(t+\Delta t)sec$, ако је Δt: а) $1sec$; б) $0,1sec$; в) $0,05sec$; г) $0,001sec$.

2° Одредити брзину тела у слободном паду на крају: а) пете секунде; б) десете секунде.

3° Одредити формулу за брзину тела у слободном паду за било који тренутак t.

123. Дат је закон пута простог хармонијског осциловања материјалне тачке $s = f(t) = a \sin \omega t$. Израчунати брзину кретања те тачке.

124. Нека је $T = 1,5t^2$ температура тела која се мења у току времена t. Израчунати брзину загревања у тренутку $t = 2$.

2.2. ИЗВОДИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Таблица извода елементарних функција

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	c – константа	0	$x \in \mathbf{R}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ за $\alpha \in \mathbf{R}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}$
4.	e^x	e^x	
5.	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
6.	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
7.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
8.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
9.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
10.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
11.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\lvert x \rvert < 1)$
12.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\lvert x \rvert < 1)$
13.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
14.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$

2.3. ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ О ИЗВОДУ

Изводи збира, производа и количника

Ако су f и g диференцијабилне функције у тачки x и c — константа, тада важи:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x);\\
(f-g)'(x) &= f'(x)-g'(x);\\
(fg)'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x);\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (g(x)\neq 0);\\
(cf)'(x) &= cf'(x).
\end{aligned}$$

Извод сложене функције

Ако је функција $y = f(x)$ диференцијабилна у тачки x, а функција $z = g(y)$ диференцијабилна у тачки $y = f(x)$, тада је сложена функција $z = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$ диференцијабилна у тачки x и важи:

$$(g\circ f)'(x) = g'(y)\cdot f'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x), \quad \text{тј. } z'_x = z'_y\cdot y'_x.$$

Извод инверзне функције

Нека су функције $f : A\to B$ и $f^{-1} : B\to A$ $(A, B\subset \mathbf{R})$ узајамно инверзне и непрекидне у тачки $x_0\in A$, односно $y_0 = f(x_0)\in B$. Ако је функција f диференцијабилна у x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, тада је и функција f^{-1} диференцијабилна у тачки y_0 и важи

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Логаритамски извод

Ако је функција $y = f(x)$ позитивна и диференцијабилна у тачки x, тада је и сложена функција $z = \ln f(x)$ диференцијабилна у тој тачки x, при чему је

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

д) $y = x^3 + px + q$; ђ) $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{b} + \frac{b}{x^2}$;

е) $y = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{3}$; ж) $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}$;

з) $y = \sqrt{x} - \frac{2}{x}$; и) $y = 5x + \frac{5}{\sqrt{x}}$;

ј) $y = (u - c\sqrt{u})^2$; к) $y = (v+1)(v-1)$;

л) $y = \frac{5}{3}t^3 - \frac{4\sqrt{t}}{3} + \frac{6}{5t}$; љ) $y = \frac{2}{3}u^3 + \frac{5}{u^6} - 2\sqrt{u}$;

м) $y = \pi x^3 - 2x + \pi^2$; н) $y = 3x^4 - 4x^3 + \frac{2}{x^2} - 4\sqrt[3]{x}$;

њ) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

126. а) $y = (3x-7)x^2$; б) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

в) $y = (5-3x)\sqrt{x}$; г) $y = (x+1)(\sqrt{x}+2)$;

д) $y = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; ђ) $y = \left(\sqrt[3]{t} + 2t\right)\left(1 + \sqrt[3]{t^2} + 3t\right)$;

е) $y = \frac{t+1}{t-1}$; ж) $y = \frac{x^3}{x-4}$;

з) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; и) $y = \frac{u}{1+u^2}$;

ј) $y = \frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$; к) $y = \frac{p}{t^2+t+1}$;

л) $y = \frac{x^2+1}{x^2+4}$; љ) $y = \frac{4-x^3}{x^2+2}$;

м) $y = \frac{1+x\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}$.

127. а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \frac{t}{1-\cos t}$.

г) $y = \frac{\operatorname{tg} u}{u}$; д) $y = \cos^2 x$; ђ) $y = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^2 t - b\operatorname{tg} t + ct$;

е) $y = \frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$; ж) $y = \sec x$; з) $y = \operatorname{cosec} x$;

и) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$; ј) $y = \sqrt{x}\sin x$; к) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

128. а) $y = x^2\log_3 x$; б) $y = \ln^2 t$; в) $y = \sin x\ln x$;

г) $y = \dfrac{1-\ln t}{1+\ln t}$; д) $y = \dfrac{\ln t}{1+t^2}$; ђ) $y = \dfrac{a}{\ln x}$;

е) $y = x^2 \ln x$; ж) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; з) $y = \sqrt{x}\ln x$.

129. а) $y = 2^x + 3^x + 5^x$; б) $y = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x}$; в) $y = \dfrac{x}{4^x}$;

г) $y = xe^x$; д) $y = \dfrac{x^3+2^x}{e^x}$; ђ) $y = e^x \cos x$;

е) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$; ж) $y = a^x + x^a$; з) $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$;

и) $y = xe^x(\cos x + \sin x)$; ј) $y = 2^{x+1} + 2^{x-1}$;

к) $y = x^2 e^x$; л) $y = x^a a^x$; љ) $y = e^x \sin x$.

130. Следеће функције називају се хиперболичким функцијама:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Одредити изводе хиперболичких функција.

131. Израчунати изводе следећих функција:

а) $y = x \arcsin x$; б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

в) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; г) $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$;

д) $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$; ђ) $y = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$;

е) $y = x \operatorname{arctg} x$; ж) $y = \dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2}$.

У сваком примеру, посебно, одредити област дефинисаности функције.

132. Применом правила за диференцирање сложене функције израчунати изводе следећих функција:

а) $y = (1-x)^{20}$; б) $y = \left(t^3 - \dfrac{1}{t^3} + 3\right)^4$; в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1-x^2}}$;

г) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}$; д) $y = \sin\dfrac{1}{x}$; ђ) $y = \sin(\sin x)$;

е) $y = \cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; ж) $y = \sqrt{1+\ln^2 t}$; з) $y = \ln\sin x$;

и) $y = \ln \operatorname{tg} x$; ј)

л) $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}, a \neq 0$; љ)

н) $y = \arcsin(\sin x)$; њ)

п) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$; р)

т) $y = \ln x^3$; ћ)

Израчунати изводе следећих фу
133 – 156):

133. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$.

135. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

137. $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

139. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

141. $y = \sin(\sin(\sin x))$.

143. $y = \sin^2(\cos 3x)$.

145. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

147. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

149. $y = e^{ax}(a \sin x - \cos x), a \in \mathbf{R}$

151. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

153. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

154. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) -$

н) $y = \arcsin(\sin x)$; њ) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$; о) $y = \sqrt{1+x^2}$;

п) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$; р) $y = \sin ax,\ a \in \mathbf{R}$; с) $y = e^{\sin x}$;

т) $y = \ln x^3$; ћ) $y = \ln(3x^2 + 2)$.

Израчунати изводе следећих функција у тачкама у којима они постоје (задаци 133 – 156):

133. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$.

134. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \in R$.

135. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

136. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

137. $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

138. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

139. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

140. $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$.

141. $y = \sin(\sin(\sin x))$.

142. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$.

143. $y = \sin^2(\cos 3x)$.

144. $y = \sin\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

145. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

146. $y = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}$.

147. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

148. $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$.

149. $y = e^{ax}(a \sin x - \cos x), a \in \mathbf{R}$.

150. $y = \lg^3(x^2)$.

151. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

152. $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

153. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

154. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

155. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

156. а) $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1 + x^4}$, $|x| < 1$; а) $y = x \arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

157. Израчунати $f'(0)$ и $f'(1)$, ако је:

а) $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; б) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$;

в) $f(x) = (1 + x^3)\left(5 - \dfrac{1}{x^2}\right)$; г) $f(x) = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)x$.

158. Израчунати:

а) $f'(2)-f'(-2)$, ако је $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2x^2}$;

б) $0,01\cdot f'(0,01)$, ако је $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}$;

в) $f'(0)+f'(2)+f'(-2)$, ако је $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$.

159. Доказати:

а) $f'(1)+f'(-1)=-4f(0)$, ако је $f(x)=x^5+x^3-2x-3$;

б) $f'(x)-2xf(x)+\dfrac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$, ако је $f(x)=3e^{x^2}$;

в) $f'(x)+f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}=0$, ако је $f(x)=\ln x$;

г) $2f'\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, ако је $f(x)=\cos x$.

160. Решити неједначину $f'(x)>g'(x)$, ако је:

а) $f(x)=x^3+x-\sqrt{2},\quad g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$;

б) $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt[4]{3},\quad g(x)=x^3-\dfrac{x^2}{2}-\ln 2$;

в) $f(x)=x+\ln(x-5),\quad g(x)=\ln(x-1)$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{2}5^{2x+1},\quad g(x)=5^x+4x\ln 5$.

161. Одредити изводе следећих функција:

а) $y=x^x$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$; в) $y=x^{x^x}$;

г) $y=x(\ln x)^{1-\cos x}$; д) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$;

ђ) $y=\sqrt{\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[5]{x-3}\cdot\sqrt[7]{x+1}}}$; е) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{x^5+x-7}}}$;

ж) $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x^3+1)^7(x^2+4)^3}{(x^2+x+1)^6e^{\operatorname{tg} x}}}$; з) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; и) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$.

2.4. ДРУГИ ИЗВОД. ИЗВОДИ ВИШЕГ РЕДА

$$f''(x)=(f')'(x);$$
$$\dots$$
$$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)\quad(n\in\mathbf{N}).$$

162. Наћи други извод функције:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = -3x + \ln 2$; в) $y = \operatorname{tg} x$;

г) $y = \sqrt{1+x^2}$; д) $y = e^{-x^2}$; ђ) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$;

е) $y = e^x \cos x$; ж) $y = a^x \cdot x^3$, $a \in \mathbf{R}$; з) $y = x^2 \sin x$.

163. Израчунати други извод следећих функција:

а) $y = xe^{x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$;

в) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; г) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $a \in \mathbf{R}$;

д) $y = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)$; ђ) $y = e^{\sqrt{x}}$;

е) $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$, $a \in \mathbf{R}$; ж) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

з) $y = \arcsin(a \sin x)$, $a \in \mathbf{R}$; и) $y = x^x$;

ј) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$; к) $y = (\arcsin x)^2$;

л) $y = \sqrt{1-x^2} - \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$;

љ) $y = x\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2}\ln(x^2 + a^2)$, $a \neq 0$.

м) $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$; н) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$;

њ) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$; о) $y = \sqrt[3]{x(6-x)^2}$.

164. Доказати да:

а) функција $y = e^x \sin x$ задовољава једначину $y'' - 2y' + 2y = 0$;

б) функција $y = \sqrt{2x - x^2}$ задовољава једначину $y^3 y'' + 1 = 0$;

в) функција $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ задовољава једначину $y''' - 13y' - 12y = 0$;

г) функција $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ задовољава једначину $xy'' + \dfrac{1}{2}y' - \dfrac{1}{4}y = 0$;

д) функција $y = \bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)^n$ задовољава једначину $(1+x^2)y'' + xy' - n^2 y = 0$;

ђ) функција $y = e^{-2x}(\cos x + 4\sin x) + x^2 - 8x + 7$ задовољава једначину $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

165. Одредити други, трећи и четврти извод функције:

а) $y = x^2 - 3x + 2$; б) $y = 1 - x^2 - x^4$; в) $y = (x+10)^6$;

г) $y = x^6 - 4x^3 + 4$; д) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; ђ) $y = x^3 \ln x$;

е) $y = \cos^2 x$; ж) $y = e^{2x-1}$; з) $y = \sin ax + \cos bx$, $a, b \in \mathbf{R}$.

166. 1° Наћи $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$, ако је

а) $f(x) = e^x \sin x$;

б) $f(x) = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$;

в) $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$.

2° Наћи $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$, ако је

а) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$.

167. Нека је $p(x)$ полином четвртог степена. Ако је $p(2) = -1$, $p'(2) = 0$, $p''(2) = 2$, $p'''(2) = -12$ и $p^{\mathrm{IV}}(2) = 24$, израчунати $p(-1)$, $p'(0)$ и $p''(1)$.

168. Одредити n-ти извод функција:

а) $y = x^n$; б) $y = e^x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \cos x$;

д) $y = \dfrac{1}{x}$; ђ) $y = \ln x$; е) $y = xe^x$;

ж) $y = e^{ax}$ $(a \in \mathbf{R})$; з) $y = a^x$ $(a > 0)$; и) $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

2.5. ТАНГЕНТЕ И НОРМАЛЕ КРИВЕ $y = f(x)$

Једначина тангенте

Једначина тангенте криве l, која је график функције $y = f(x)$ у тачки $(x_0, y_0) \in l$ је

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Једначина нормале

Једначина нормале криве l, која је график функције $y = f(x)$ у тачки $(x_0, y_0) \in l$ је

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

169. Одредити једначину тангенте криве $y = \sin x$ у тачки $(0, 0)$.

170. Одредити једначину тангенте криве $y = x^2$ у тачки $M(2, 4)$.

171. Одредити једначине тангенти графика функција

а) $y = x^2 - 2x$ у тачкама пресека са x-осом;

б) $y = -x^2 - 1$ у тачки $x = 2$;

в) $y = 4x - x^2$ у тачкама пресека са x-осом;

г) $y = x^2 - 2x + 5$ у тачки пресека са y-осом;

д) $y = \dfrac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2})$ у тачки $x = 2\ln 2$;

ђ) $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$ у тачки $x = 2$;

е) $y = 3^x + 3^{-2x}$ у тачки $x = 1$;

ж) $y = -x^2 - 2$ паралелна правој $y = 4x + 1$.

172. У којим тачкама криве $y = 2 + x - x^2$ је њена тангента:

а) паралелна Ox-оси; б) паралелна правој $y = x$?

173. Под којим углом график функције $y = \ln x$ сече x-осу?

174. Одредити апсцисе x тачака кривих $y = x^2$ и $y = x^3$ у којима су њихове тангенте паралелне.

175. Одредити угао под којим се секу криве $y = x$ и $y = \sqrt{x}$, $x > 0$.

176. Одредити једначине тангенте и нормале

а) хиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ у тачки $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

б) параболе $y = \sqrt{x}$ у тачки $x_0 = 4$.

177. Одредити једначине тангенте и нормале криве:

а) $y = x^2 - 4x + 3$ у тачки $A(1, 0)$;

б) $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ у тачки $x_0 = 2a$, $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$;

в) $y = 2 + \ln x$ у тачки $M(1, 2)$;

г) $y^2 + 9x + 2y - 6 = 0$ за $y = 3$;

д) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ у тачки пресека криве са y-осом;

ђ) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$ у тачки пресека са x-осом;

е) $y = e^{1-x^2}$ у тачкама пресека са правом $y = 1$.

178. Наћи једначину оне тангенте криве $y = x^3 + 5x^2 - 3$ која је нормална на праву $y = -\dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{4}$.

179. а) Права $y = 2x - 4$ додирује параболу $y = ax^2 + bx$ у тачки $M(2, 0)$. Одредити једначину параболе.

б) Права $3x + 8y + 25 = 0$ додирује елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ у тачки $A(-3, y_0)$. Одредити једначину елипсе.

в) Наћи једначину параболе $y = x^2 + bx + c$, која додирује праву $x = y$ у тачки $(1, 1)$.

180. Наћи угао под којим се секу криве $y = x^2$ и $y^2 = x$.

181. Доказати да тангента кружнице $x^2 + y^2 = 1$ у тачки (x_0, y_0) има једначину $xx_0 + yy_0 = 1$.

182. Доказати да се следеће криве секу под правим углом:

а) $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$, $a, b \in \mathbf{R}$;

б) $y^2 = 4a(a - x)$ и $y^2 = 4b(b + x)$, $a, b \in \mathbf{R}$;

в) $y^2 = 2(a + b)\left(x + \dfrac{b}{2}\right)$ и $y^2 = 2(a + c)\left(x + \dfrac{c}{2}\right)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$;

г) $y^2 = 2m(x-a)$ и $y = e^{\frac{b-x}{m}}$, $a, b, m \in \mathbf{R}$.

183. Одредити угао под којим се секу парабола $y_1 = \sqrt{x}$ и хипербола $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

184. Одредити тачке у којима је тангента параболе $y = x^2$:

а) паралелна правој $y = 4x - 5$;

б) нормална на праву $2x - 6y + 5 = 0$;

в) образује са правом $3x - y + 1 = 0$ угао од $45°$.

185. Наћи угао под којим крива:

а) $y = \ln x$; б) $y = e^x$

сече праву $y = -x + 1$.

186. Одредити угао под којим се секу параболе

а) $y = (x-2)^2$ и $y = -4 + 6x - x^2$;

б) $y = x^2$ и $y = x^3$.

187. Одредити угао под којим се секу криве

а) $y = \sin x$ и $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

188. Дата је функција $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$. Нека су $P(1,0)$ и $Q(x_0, y_0)$ тачке на графику ове функције. Доказати да права PQ додирује график функције ако и само ако је $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$.

189. При којој вредности параметра a парабола $y = ax^2$ додирује криву $y = \ln x$?

190. Доказати да се криве $y_1 = 4x^2 + 2x - 8$ и $y_2 = x^3 - x + 10$ додирују у тачки $(3, 34)$. Да ли исто важи и за тачку $(-2, 4)$?

2.6. ЛОПИТАЛОВА ТЕОРЕМА

Теорема 1. Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане у интервалу $(a, b]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, у интервалу $(a, b]$ постоје коначни изводи $f'(x)$ и $g'(x)$, при чему је $g'(x) \neq 0$ и, најзад, постоји (коначан или не) лимес и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, тада је $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема 2. Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане у интервалу $(a, b]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, у интервалу $(a, b]$ постоје коначни изводи $f'(x)$ и $g'(x)$, при чему је $g'(x) \neq 0$ и, најзад, постоји (коначни или не) лимес $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, тада је $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теореме 1 и 2 важе и када је $a = +\infty$ или $a = -\infty$.

Применом Лопиталове теореме израчунати граничне вредности (задаци 191 – 197):

191. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x+1}{x^4-x^3-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

192. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7^{x-3}-3^{x-3}}{\operatorname{arctg}(x^2-9)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}(x-2)$; ђ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5^x}{x^2}$.

193. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^n-1+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\cos 3x-1}{e^x-e^{-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

194. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+\cos x)-3\sin x}{x^4\sin x}$.

195. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^{3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x)$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$; г) $\lim\limits_{x\to 0_+}(x^m\ln x)$, $m>0$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{x^2})$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$.

196. а) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; ж) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{x^x-1}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

2.7. ПРИМЕНЕ ИЗВОДА. ИСПИТИВАЊЕ ТОКА ФУНКЦИЈЕ

Монотоност фунције.

Нека је $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ диференцијабилна фунција у (a,b). Функција $f(x)$ у интервалу (a,b) је растућа (опадајућа) ако и само ако је $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) за све $x\in(a,b)$.

Екстремне вредности функције

Неопходан услов за постојање локалног екстрема.

Извод функције f у тачки c, у којој је функција f диференцијабилна, једнак је нули.

Довољан услов за постојање локалног екстрема.

1° Нека функција f има у тачки x_0 први извод који је једнак нули и нека у тој тачки има други извод $f''(x_0)$. Тада, ако је $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), функција f има у x_0 тачку строгог локалног екстрема максимума (минимума).

2° Нека је $f(x)$ непрекидна функција, диференцијабилна у некој околини тачке x_0, осим, можда, у x_0. Ако $f'(x_0)$ мења знак када x пролази кроз x_0 тада је x_0 тачка строгог локалног екстремума. Ако је $f''(x)<0$ за $x<x_0$ и $f''(x)>0$ за $x>x_0$, тада је x_0 тачка локалног минимума, а ако је $f'(x)>0$ за $x<x_0$, а $f'(x)<0$ за $x>x_0$, тада је x_0 тачка локалног максимума.

Конвексност и конкавност

Нека функција $f(x):(a,b)\to\mathbf{R}$ има у свакој тачки $x\in(a,b)$ други извод. Функција f је конвексна (конкавна) на (a,b) ако и само ако је $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) за све $x\in(a,b)$.

> **Превојне тачке**
>
> Нека је функција f диференцијабилна у некој околини тачке x_0 и има други извод у тој околини, осим, можда, у тачки x_0. Ако $f''(x)$ мења знак при пролазу аргумента кроз тачку x_0, онда је $(x_0, f(x_0))$ превојна тачка криве $y = f(x)$.

197. Одредити интервале растења и опадања функције:

а) $y = -x(x-2)^2$; б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$;

в) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$; г) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$;

д) $y = (2^x - 1)(2^x - 2)^2$; ђ) $y = x^3 - 9x^2 + 30x + 1$;

е) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$; ж) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

з) $y = (x^2 - 2x + 1)e^x$; и) $y = 2x^2 - \ln x$;

ј) $y = x - 2\sin x$; к) $y = x\sqrt{3-x}$;

л) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2}$; љ) $y = x^x$, $x > 0$;

м) $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

198. Одредити тачке максимума и минимума и интервале монотоности функције:

а) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; б) $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3$;

в) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$; г) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;

д) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; ђ) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;

е) $y = (x-1)e^{3x}$; ж) $y = xe^{-3x}$;

з) $y = x - \ln x$; и) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

199. а) Одредити a и b тако да функција $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ има екстремне вредности у тачкама $x = 1$ и $x = 2$ и за добијене вредности одредити природу тих екстремних вредности.

б) Одредити m тако да функција $f(x) = m\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ има екстремну вредност у тачки $x_1 = \frac{\pi}{3}$ и за добијену вредност испитати природу те екстремне вредности.

200. Доказати да функције

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{a} + \frac{a}{\sqrt{x+1}}, \qquad a > 0$$

имају стални минимум.

201. Одредити највећу и најмању вредност функције:

$x^3 - 3x^2 \geq 0$

$x^2(x-3) \geq 0$

$t = x^3 - 3x^2$ $y = t^{\frac{1}{2}}$

$t' = 3x^2 - 6x$

$y' = \frac{3x^2 - 6x}{2\sqrt{x^3 - 3x^2}}$

$y' = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

а) $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на интервалу $[0,2]$;

б) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ на $[0,3]$;

в) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на $[-1,3]$;

г) $y = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$ на $[-3,6]$;

д) $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$ на $[0,3]$; ђ) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на $[0,3]$;

е) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$ на $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$; ж) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ на $[-1,2]$;

з) $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$ на $[-1,1]$;

и) $y = 3\sin x + \cos 2x$ на $[0,\pi]$;

ј) $y = (5 + \sin x)\cos x + 3x$ на $[0, \pi/2]$.

202. За које вредности параметра a функција расте за све x?

а) $f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1$;

б) $f(x) = 2e^x - ae^{-x} + (2a+1)x - 3$;

в) $f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$.

203. а) Наћи број који сабран са својим квадратом даје најмањи збир. б) Наћи позитиван број који сабран са својом реципрочном вредношћу даје најмањи збир.

204. Број 64 раставити на чиниоце тако да збир њихових квадрата буде најмањи.

205. Представити број 48 у облику збира два позитивна броја, тако да је збир куба једног од њих и квадрата другог најмањи.

206. Међу свим једнакокраким троугловима чији су краци дужине a одредити троугао највеће површине.

207. Једна страница троугла је $36cm$, а збир других двеју је сталан и једнак је $60cm$. Колика мора бити дужина сваке од њих да би полупречник кружнице уписане у троугао био највећи?

208. Дата је тачка $M(x_0, y_0)$ у првом квадранту. Под којим углом са x-осом треба конструисати праву кроз тачку M тако да дужина њеног одсечка између координатних оса буде најмања?

209. Дато је n бројева: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Одредити x тако да збир $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ буде минималан.

210. Доказати да од свих правоугаоника уписаних у круг полупречника R највећу површину има квадрат.

211. Одредити дужине страница правоугаоника највећег обима уписаног у полукруг полупречника R.

212. Одредити дужине страница правоугаоника највеће површине уписаног у елипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. (Странице правоугаоника паралелне су осама елипсе).

213. Око правоугаоника са страницама дужине m и n описана је елипса најмање површине. Израчунати површину те елипсе. (Површина елипсе са осама a и b је $ab\pi$).

214. У којој тачки елипсе $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ треба конструисати тангенту тако да површина троугла који гради та тангента са координатним осама буде најмања?

215. Код једнакокраког трапеза дужа основица је дужуне l, а угао код те основице је α. Дијагонале трапеза су нормалне на краке трапеза. Одредити α тако да површина трапеза буде највећа и наћи ту највећу површину.

216. На елипси $2x^2+y^2=18$ дате су тачке $A(1,4)$ и $B(3,0)$. Одредити на елипси тачку C тако да површина троугла ABC буде највећа.

217. Слика висине $1{,}4$ м виси на вертикалном зиду тако да је њен доњи крај $1{,}8$ м изнад равни очију посматрача. На ком одстојању од зида треба да буде посматрач да би најбоље видео слику? (Тј. да би угао под којим посматра био највећи).

218. Израчунати дужину полупречника основе праве кружне купе најмање запремине описане око ваљка са полупречником основе r. (Равни основне ваљка и купе се поклапају).

219. Наћи висину праве кружне купе најмање запремине описане око полулопте полупречника R. (Центар основе купе и центар лопте се поклапају).

220. Наћи висину праве купе константне површине πa^2, која има највећу запремину.

221. Одредити висину праве купе, константне изводнице s, чија је запремина максимална.

222. Наћи висину ваљка највеће запремине који се може уписати у сферу полупречника R.

223. Око сфере полупречника r описана је купа. Наћи њену висину тако да запремина купе буде минимална.

224. Од свих ваљака са константном запремином најмању површину има онај код кога је висина једнака пречнику основе. Доказати.

225. Од свих ваљака уписаних у сферу полупречника R највећу површину омотача има онај чија је висина $R\sqrt{2}$. Доказати.

226. Из квадрата странице $2a$ исечена су четири једнакокрака троугла, чије су основице странице датог квадрата и чије су висине једнаке x. Преостали део квадрата представља мрежу правилне четворостране пирамиде. Одредити x тако да запремина V те пирамиде буде максимална.

227. Метални прстен, облика шупљег ваљка, који има константну запремину V и константну површину осног пресека $2a^2$, треба обложити слојем племенитог метала дебљине d. Одредити димензије прстена тако да се облагање изврши са најмање материјала

228. Испитати конвексност и конкавност и одредити превојне тачке графика следећих функција:

а) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$; б) $f(x) = x^6$; в) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; ђ) $f(x) = (1+x^2)e^x$;

е) $f(x) = \ln(1+x^2)$; ж) $f(x) = x - \sin x$; з) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$.

229. Доказати да су графици следећих функција свуда конвексни:

а) $y = x\operatorname{arctg} x$; б) $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$;

в) $y = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + ax + b$,

$a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2n} > 0,\ a, b \in \mathbf{R}$;

г) $y = x\ln x$; д) $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$;

ђ) $y = (x+1)^4 + e^x$.

230. а) Одредити m тако да крива $y = mx^3 - 6x^2$ има превојну тачку за $x = 1$.

б) Одредити a и b тако да крива $y = ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x + 1$ има превојне тачке за $x = 1$ и $x = 2$.

231. Доказати да превојне тачке криве:

а) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ припадају једној правој;

б) $f(x) = x\sin x$ припадају кривој $y^2(4+x^2) = 4x^2$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ припадају кривој $y^2(4+x^4) = 4$.

232. Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Испитати функције и скицирати њихове графике (задаци 233-239):

233. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$; б) $y = x^3 - 3x + 2$;

в) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$; г) $y = x^3 - 9x + 1$;

д) $y = x - \dfrac{12}{5}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$; ђ) $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 8x}{3}$;

е) $y = \dfrac{x^3 - 4x}{4}$; ж) $y = (x^2 + x)(x - 2)$;

з) $y = \dfrac{x^4 - 2x^2}{4}$;

и) $y = (x-1)^2(x-2)^3$;

ј) $y = \frac{1}{15}(3x^5 - 25x^3 + 60x + 16)$;

к) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;

л) $y = x^3 + 3x + 2$;

љ) $y = x^4 - 6x^2$.

209. а) $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + 2x$;

б) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;

в) $f(x) = 2|x| - x^2$.

210. а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$;

б) $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^3}$;

в) $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$;

ђ) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$;

е) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$;

ж) $f(x) = \dfrac{6x-x^2-9}{x-2}$;

з) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

и) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2}$;

ј) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$;

к) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{2x}$;

л) $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

љ) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

м) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;

н) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

њ) $y = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$;

о) $y = \dfrac{4x-x^2}{(x+1)^2}$;

п) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$;

р) $y = x + \dfrac{4}{x}$;

с) $y = x + \dfrac{4}{x+2}$;

т) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$;

ћ) $y = \dfrac{x^2+x-12}{x-4}$;

у) $y = \dfrac{x^4-x^2-2}{x^3}$.

211. Доказати да функције

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{a} + \frac{a}{\sqrt{x+1}}, \qquad a > 0$$

имају стални минимум.

212. Одредити највећу и најмањ

а) $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 4x$ на интервал

б) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ на $[0,$

в) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на

г) $y = x^2(2x-3) - 12(3x -$

д) $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$ на $[0,3$

е) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$ на $\left[\dfrac{3}{4}, 2\right]$;

з) $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3$

и) $y = 3\sin x + \cos 2x$ на $[0,$

ј) $y = (5 + \sin x)\cos x + 3x$

213. За које вредности парамет

а) $f(x) = \dfrac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1$

б) $f(x) = 2e^x - ae^{-x} + (2a$

в) $f(x) = \sin x - a\sin 2x -$

214. Дата је тачка $M(x_0, y_0)$ у
треба конструисати праву кроз т
координатних оса буде најмања?

215. Доказати да од свих правоу
површину има квадрат.

216. Одредити дужине страница
круг полупречника R.

217. Одредити дужине стран
елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (Странице

218. Око правоугаоника са стра
површине. Израчунати површин
$ab\pi$).

219. У којој тачки елипсе $\dfrac{x^2}{8}$
површина троугла који гради та

212. Одредити највећу и најмању вредност функције:

а) $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 4x$ на интервалу $[0, 2]$;

б) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ на $[0, 3]$;

в) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на $[-1, 3]$;

г) $y = x^2(2x - 3) - 12(3x - 2)$ на $[-3, 6]$;

д) $y = |x^3 - 3x^2 + 5|$ на $[0, 3]$; ђ) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на $[0, 3]$;

е) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$ на $\left[\dfrac{3}{4}, 2\right]$; ж) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ на $[-1, 2]$;

з) $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$ на $[-1, 1]$;

и) $y = 3\sin x + \cos 2x$ на $[0, \pi]$;

ј) $y = (5 + \sin x)\cos x + 3x$ на $[0, \pi/2]$.

213. За које вредности параметра a функција расте за све x?

а) $f(x) = \dfrac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 1$;

б) $f(x) = 2e^x - ae^{-x} + (2a + 1)x - 3$;

в) $f(x) = \sin x - a\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin 3x + 2ax$.

214. Дата је тачка $M(x_0, y_0)$ у првом квадранту. Под којим углом са x-осом треба конструисати праву кроз тачку M тако да дужина њеног одсечка између координатних оса буде најмања?

215. Доказати да од свих правоугаоника уписаних у круг полупречника R највећу површину има квадрат.

216. Одредити дужине страница правоугаоника највећег обима уписаног у полукруг полупречника R.

217. Одредити дужине страница правоугаоника највеће површине уписаног у елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (Странице правоугаоника паралелне су осама елипсе).

218. Око правоугаоника са страницама дужине m и n описана је елипса најмање површине. Израчунати површину те елипсе. (Површина елипсе са осама a и b је $ab\pi$).

219. У којој тачки елипсе $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = 1$ треба конструисати тангенту тако да површина троугла који гради та тангента са координатним осама буде најмања?

220. Код једнакокраког трапеза дужа основица је дужине l, а угао код те основице је α. Дијагонале трапеза су нормалне на краке трапеза. Одредити α тако да површина трапеза буде највећа и наћи ту највећу површину.

221. На елипси $2x^2+y^2=18$ дате су тачке $A(1,4)$ и $B(3,0)$. Одредити на елипси тачку C тако да површина троугла ABC буде највећа.

222. Слика висине $1,4\,\mathrm{m}$ виси на вертикалном зиду тако да је њен доњи крај $1{,}8\,\mathrm{m}$ изнад равни очију посматрача. На ком одстојању од зида треба да буде посматрач да би најбоље видео слику (тј. да угао под којим посматра буде највећи)?

Испитати функције и скицирати њихове графике (задаци 223 – 224):

223. а) $f(x)=(x^2-4x+3)e^x$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}$;
в) $f(x)=(2+x^2)e^{-x^2}$; г) $f(x)=(1+x^2)e^{-x^2}$;
д) $f(x)=xe^{-x}$; ђ) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-8}$;
е) $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$; ж) $y=\sqrt{x}e^x$;
з) $y=xe^{-\frac{1}{x}}$.

224. а) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;
в) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln\dfrac{x}{2}$; г) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;
д) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; ђ) $f(x)=x^2\ln x$;
е) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; ж) $y=\dfrac{x}{(\ln x)^2}$;
з) $y=x-\ln(x-1)$; и) $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{1}{2}\ln(x+1)$.

2.8. ДОДАТАК УЗ ДРУГУ ГЛАВУ

225. Дата је функција $f(x)=\sqrt{x^3-x}$. Нека су $P(1,0)$ и $Q(x_0,y_0)$ тачке на графику ове функције. Доказати да права PQ додирује график функције ако и само ако је $x_0^2-2x_0-1=0$.

226. При којој вредности параметра a парабола $y=ax^2$ додирује криву $y=\ln x$?

227. Доказати да се криве $y_1=4x^2+2x-8$ и $y_2=x^3-x+10$ додирују у тачки $(3,34)$. Да ли исто важи и за тачку $(-2,4)$?

Израчунати изводе функција у тач

228. а) $y=\frac{2}{3}\ln(x^2-4x+5)+4$

б) $y=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right.$

в) $y=\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln($

г) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-$

229. а) $y=|x|$;

в) $y=\begin{cases} x^2, & x \text{ рационал} \\ -x^2, & x \text{ ирационал}\end{cases}$

230. а) $y=(\sin x)^x\cdot x^{\sin x}$;

в) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x},\ a\in$

231. Ако је $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,x, \\ \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,x+\end{cases}$

232. Нека је $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2}, \\ \frac{\pi}{2},\end{cases}$

233. Израчунати граничне вред

а) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

е) $\lim\limits_{x\to0}x^x$;

з) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

234. Дато је n бројева: a_1,
$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x$

г) $\lim\limits_{z\to 0_+} z^\beta \ln z = 0, \quad (\beta > 0).$

2.8. ДОДАТАК УЗ ДРУГУ ГЛАВУ

Израчунати изводе функција у тачкама у којима они постоје (задаци 242 – 248):

242. а) $y = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x}$; б) $y = \sqrt{(1-x^2)^3}$;

в) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$; г) $y = \dfrac{2}{3}(x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3} - x)$;

д) $y = (4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$; ђ) $y = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$;

е) $y = (3x-2)\sqrt{(x+1)^3}$.

243. а) $y = 2\arcsin\sqrt{x}$; б) $y = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

в) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; г) $y = \sin^2(x^3)$.

244. а) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$;

б) $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$; в) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}$;

г) $y = \operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

245. а) $y = \sin^2(\cos 3x)$; б) $y = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$;

в) $y = (\ln(\ln x - 1))\ln x$; г) $y = \dfrac{1}{1+x} + \ln\dfrac{x}{x+1}$.

246. а) $y = \dfrac{2}{3}\ln(x^2 - 4x + 5) + 4\operatorname{arctg}(x-2)$;

б) $y = \ln\left(x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right)$;

в) $y = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

г) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \dfrac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}$.

247. а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$;

в) $y = \begin{cases} x^2, & x \text{ рационално} \\ -x^2, & x \text{ ирационално} \end{cases}$; г) $y = \ln|x|,\ x \neq 0$.

248. а) $y = (\sin x)^x \cdot x^{\sin x}$; б) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\sqrt{x}}$;

в) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$, $a \in \mathbf{R}^+$.

249. Ако је $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{4}, & |x| > 1, \end{cases}$ одредити $f'(x)$.

250. Нека је $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$. Одредити $f'(0)$ и $f''(0)$.

НЕКЕ ПРИМЕНЕ РОЛОВЕ И ЛАГРАНЖОВЕ ТЕОРЕМЕ

Напомена. Садржај који се односи на теореме Рола и Лагранжа (задаци 251 – 260) нису у програму редовне наставе.

Ролова теорема

Ако је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна у (a, b) и $f(a) = f(b)$, тада у интервалу (a, b) постоји тачка ξ тако да је $f'(\xi) = 0$.

Лагранжова теорема

Ако је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна у (a, b), тада постоји тачка $\xi \in (a, b)$ тако да је

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

251. Утврдити услове за могућност примене Ролове теореме и у случају да је примењива одредити ξ.

а) $f(x) = x^4 - 2x^2$ на $[0, \sqrt{2}]$;
б) $f(x) = x^4 - 2x^2$ на $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;
в) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-1, 1]$;
г) $f(x) = 1 - |x|$ на $[-1, 1]$;
д) $f(x) = x - [x]$ на $[0, 1]$;
ђ) $f(x) = (x+2)(x^2 - 4)$ на $[-2, 2]$;
е) $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} \right|$ на $[-2, 2]$;
ж) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на $[0, 4]$.

252. Једначина $e^x = x + 1$ има решење $x_1 = 0$. Применом Ролове теореме доказати да ова једначина нема других решења.

253. Испитати могућност примене Лагранжове теореме и у случају примењивости одредити тачку ξ.

а) $f(x) = x^2$ на $[a, b]$;
б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[1, 4]$;

в) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ на $[-1,2]$; г) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-1,1]$;

д) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на $[0,1]$; ђ) $f(x) = \arcsin x$ на $[0,1]$;

е) $f(x) = \ln x$ на $[1,2]$; ж) $f(x) = |\cos x|$ на $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

254. На датој кривој одредити тачку у којој је тангента паралелна сечици која пролази кроз дате тачке:

а) $y = x^3$, $A(-1,-1)$, $B(2,8)$; б) $y = x - x^3$, $A(-2,6)$, $B(1,0)$;

в) $y = 4 - x^2$, $A(-2,0)$, $B(1,3)$; г) $y = x^2$, $A(1,1)$, $B(3,9)$.

255. Да ли функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

на интервалу $[0,2]$ задовољава услове Лагранжове теореме? Ако задовољава, одредити ξ.

256. Применом Лагранжове теореме доказати:

а) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, за $x > 0$;

б) $e^x > ex$, за $x > 1$.

Доказати неједнакости (задаци 257 – 258):

257. а) $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \le \dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$, $0 < \beta \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

б) $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$, $0 < b < a$, $n > 1$;

в) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$;

г) $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$;

д) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \le |x-y|$;

ђ) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $0 < a < b$.

258. а) $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$; б) $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$;

в) $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, $x > 1$; г) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$, $x > 0$;

д) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$; ђ) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

259. Доказати да су следеће функције константне и одредити њихове вредности:

а) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \ge 1$;

б) $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$;

в) $f(x)=\arccos\dfrac{a\cos x+b}{a+b\cos x}-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, $0<b\le a,\ x\ge 0$.

260. Доказати да je:

а) $\operatorname{arctg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, за све x;

б) $\arcsin x=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, за $-1<x<1$;

в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg} x+C$, где je: за $x\in(-1,1)$ je $C_1=0$, за $x\in(-\infty,1)$ je $C_2=\dfrac{\pi}{2}$, а за $x\in(1,+\infty)$ je $C_3=-\dfrac{\pi}{2}$.

261. Одредити угао између леве и десне тангенте у тачки $x_1=1$ на криву $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

262. Дат je скуп функција $f(x)=\dfrac{4x^3}{p^2}-3x+p$, $p\neq 0$. Одредити геометријско место тачака:

а) локалних максимума;

б) локалних минимума ових функција.

263. Израчунати збирове ($n\in\mathbf{N}$):

а) $S_1=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

б) $S_2=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

в) $S_3=\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$;

г) $S_4=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$ $(0<x<\pi)$.

264. Доказати Лајбницову формулу за n-ти извод производа функција

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}v^{(n-i)}$$

265. Применом Лајбницове формуле израчунати:

а) $y^{(8)}$, ако je $y=x\cos x$; б) $y^{(20)}$, ако je $y=x^2e^{2x}$;

в) $y^{(10)}$, ако je $y=\dfrac{e^x}{x}$; г) $y^{(n)}$, ако je $y=\sin^2 x$;

д) $y^{(n)}$, ако je $y=x^3e^x$, $n\ge 3$;

ђ) $y^{(n)}$, ако je $y=x\operatorname{sh} x$ ($\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$).

266. Одредити $f^{(n)}(0)$, ако je:

а) $f(x)=x^2e^{2x}$; б) $f(x)=x^2\cdot 2^x$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, за $n \geq 2$; г) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

267. Ако је $f(x) = \operatorname{arctg} x$ одредити $f^{(n)}(0)$.

268. Ако је $y = x + \ln x$, наћи $\dfrac{dx}{dy}$.

269. Ако је $x^2 + y^2 = 1$, доказати да је $y' = -\dfrac{x}{y}$ и $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$.

270. а) Ако је $x = y + \ln y$, доказати да је $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y+1}$;

б) Ако је $x = y + e^y$, доказати да је $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+e^y}$;

в) Ако је $y = x + \operatorname{arctg} y$, доказати да је $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2y^2+2}{y^5}$;

г) Ако је $y = x + \ln y$, доказати да је $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y}{(1-y)^3}$.

271. Одредити једначину тангенте криве:

а) $2y = 1 + xy^3$ у тачки $M(1,1)$;

б) $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ у тачки $M(1,1)$;

в) $y^4 = 4x^4 + 6xy$ у тачки $N(1,2)$;

г) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ у тачкама пресека са апсцисном осом;

д) $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$ у тачки са ординатом $y = 3$;

ђ) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ у тачкама пресека криве са правом $y = x$;

е) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ у тачкама пресека криве са x-осом.

272. Испитати диференцијабилност функције $y = f(x)$ и наћи извод у тачкама у којима он постоји:

а) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$;

в) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$; г) $f(x) = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$;

д) $f(x) = \arcsin(\cos x)$; ђ) $f(x) = \arccos(\sin x)$.

273. Одредити тангенте криве:

а) $y = \cos^2 \sqrt{x}$ у тачки $(0,1)$; б) $y = \cos\sqrt{x}$ у тачки $(0,1)$.

274. Наћи y'' ако је $(a, b, r \in \mathbf{R})$:

а) $x^2 - y^2 = a^2$; б) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$;

в) $\operatorname{arctg} y = x + y$; г) $x^2 + xy + y^2 = a^2$.

275. Испитати конвексност графика функције:

а) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; б) $f(x) = \left(x - \dfrac{2}{3}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

276. Испитати функцију и скицирати график функције одређене за $x > 0$ релацијом $f(x) = x^x$.

277. Испитати ток функција и скицирати њихове графике:

а) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = \arcsin\dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}$; г) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$;

д) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}$; ђ) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Глава III

АПРОКСИМАЦИЈЕ ФУНКЦИЈА

3.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ. ПРИМЕНА КОД ЛИНЕАРНИХ АПРОКСИМАЦИЈА

Диференцијал функције. Нека је функција $y = f(x)$ диференцијабилна у тачки x. Диференцијал функције f у тачки x за прираштај аргумента Δx је број:

$$df(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)dx.$$

Примена диференцијала код линеарних апроксимација:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

278. Наћи диференцијал функције $f(x) = \sqrt{x}$ у тачки $x = 2$, ако је прираштај $\Delta x = 0,1$.

279. Нека је $P(r)$ површина круга полупречника r, а $V(r)$ запремина лопте полупречника r. Одредити прираштај и диференцијал ових функција.

280. Нека је функција f диференцијабилна. Доказати да је $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1$.

281. Одредити прираштај и диференцијал функција:

а) $y = x^2$; б) $y = \sin x$.

282. Ивица коцке је $5m \pm 0,01cm$. Одредити апсолутну и релативну грешку при израчунавању запремине коцке.

283. Доказати да је $(x + \Delta x)^\alpha \approx x^\alpha\left(1 + \dfrac{\alpha\Delta x}{x}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и применом те формуле приближно израчунати:

а) $\sqrt[3]{27,3}$; б) $\sqrt{4,02}$.

284. Коришћењем формуле $\Delta y \approx dy$ приближно израчунати:

а) $\operatorname{arctg} 1,02$; б) $\sin 61^0$; в) $\sin 31^0$.

285. Доказати да важе приближне једнакости:

а) $\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x \qquad (\Delta x \to 0)$;

б) $\sqrt{a^2+\Delta x} \approx a + \dfrac{\Delta x}{2a^2} \qquad (\Delta x \to 0), \quad a > 0$;

в) $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x \qquad (\Delta x \to 0)$;

г) $\operatorname{tg} x \approx \Delta x \qquad (\Delta x \to 0)$.

3.2. ИНТЕРПОЛАЦИЈА

Нека су дате тачке $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Лагранжов интерполациони полином чији график садржи дате тачке је следећи полином:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n;$$

Нека график функције $y = f(x)$ садржи дате тачке. Грешка апроксимације функције $y = f(x)$ Лагранжовим интерполационим полиномом $L_n(x)$ на интервалу $[x_0, x_n]$ је број

$$|R_n(x)| \equiv |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|,$$

где је $M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n} |f^{(n+1)}(x)|$.

286. Дата је таблица:

а)

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

б)

x	0	1	3	4
y	1	3	2	1

Одредити Лагранжов интерполациони полином, ако су чворови интерполације одређени таблицом.

287. Функцију $f(x) = 2^{-x}$ апроксимирати Лагранжовим полиномом $L_2(x)$, при чему је $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, а затим наћи приближну вредност броја $a = \sqrt[10]{2}$.

288. Одредити Лагранжов интерполациони полином за функцију $f(x) = \cos x$, при чему је $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$, а потом одредити приближну вредност броја $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

289. Одредити Лагранжов полином другог степена за функцију $f(x) = \sqrt{x}$ ако су чворови интерполације у тачкама $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$, а затим приближно израчунати $\sqrt{115}$.

290. Наћи Лагранжов интерполациони полином, ако су чворови интерполације дати табелом:

а)

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

;

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	24	-2	-2	12	25

;

в)

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

;

а затим одредити $y(0)$.

3.3. ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА

Ако су испуњени услови:

(i) функције $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ су непрекидне на $[a,b]$;

(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

(iii) $f'(x)$ и $f''(x)$ не мењају знак на интервалу $[a,b]$,

тада једначина $f(x) = 0$ има јединствено решење на интервалу $[a,b]$.

За одређивање приближног решења једначине $f(x) = 0$, ако су испуњени услови (i), (ii) и (iii), користимо рекурентне формуле:

(1) Код *методе сечице*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

где је $x_0 = a$. Оцена грешке: $R_n \le \dfrac{|f(x_n)|}{m}$, $m = \min\limits_{a \le x \le b} f'(x)$.

(2) Код *методе тангенте* (*Њутнове методе*):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Оцена грешке: $R_{n+1} \leq \dfrac{M}{2m} R_n^2$, $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f''(x)$, $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f'(x)$.

(3) Код *комбиноване методе*:

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \qquad x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2} f(x_{2n-1}) - x_{2n-1} f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, где је $x_0 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ и $x_1 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

Ако једначина $x = \varphi(x)$ има јединствено решење на интервалу $[a, b]$, при чему је $\varphi[a, b] \to [a, b]$ диференцијабилна функција на $[a, b]$ и постоји број $M < 1$ такав да је $|\varphi'(x)| \leq M$ за $a \leq x \leq b$, тада се решење једначине може одредити приближно применом методе итерације, користећи рекурентну формулу

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \in [a, b].$$

Оцена грешке: $R_n < (b - a) M^n$.

291. Графички одредити приближне вредности решења једначине:

а) $x^2 = \cos \pi x, x > 0$; б) $(x-1)^2 = e^{-x}$, $x \geq 0$;

в) $\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x} = 0$, $x > 0$; г) $2^x - x^2 = 0$.

292. Доказати да једначина:

а) $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$; б) $xe^x = 2$;

има тачно један корен у интервалу $(0, 1)$ и наћи тај корен са тачношћу од $0,1$ користећи се методом раздвајања корена.

293. Доказати да једначина $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ има тачно два корена, који припадају, редом, интервалима $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и одредити те корене са тачношћу од $0,1$ користећи се методом раздвајања корена.

294. Раздвојити корене следећих једначина.

а) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0,9 = 0$ на интервалу $[-3, 4]$;

б) $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0$ на интервалу $[-4, 3]$;

в) $x^4 - 6x^3 + x^2 - 1 = 0$ на интервалу $[-1, 6]$;

г) $x^3 - 6x + 2 = 0$ на скупу $\mathbf{R}$.

295. Наћи са тачношћу до 0,01 корен једначине $x^3+3x-1=0$ на одсечку $[0,1]$: а) методом тетиве; б) методом тангенте.

296. Наћи приближну вредност реалне нуле функције $f(x)=x^5+2x-1$ у интервалу $(0,4;0,5)$ методом сечице на три тачне децимале.

297. Одредити решење једначине $x^3-2x^2-4x-7=0$ у интервалу $[3,4]$ са тачношћу до 0,01 примењујући методу тангенте.

298. Методом тангенте решити приближно једначину $xe^{-|x|}=0$. За почетну тачку узети $x_0=0,49$.

299. Са тачношћу до на три децимале одредити решење једначина:

а) $x^8-15x^5+24x-5=0$ на интервалу $[0,1]$;

б) $x^3-x-14,976=0$ на интервалу $[2,3]$;

в) $x-\sin x=0,25$ на интервалу $[1,2]$;

г) $e^x-3x=0$ на интервалу $[1,2]$;

д) $x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ на интервалу $[-1,0]$;

ђ) $e^x+e^{-3x}-4=0$ на интервалу $[1,2]$.

300. Знајући да једначина $x-\sin x=\frac{1}{4}$ има корен у интервалу $[1,2]$, одредити приближно тај корен методом итерације. Узети $x_0=1$, $n=6$ и оценити грешку.

301. Једначина $\ln x=\frac{5}{8}x-1$ има тачно један корен у интервалу $[3,4]$. Приближно одредити тај корен, узимајући $x_0=4$, $n=5$ и оценити грешку.

302. Приближно одредити решење једначине $x^8-15x^5+24x-5=0$ у интервалу $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Узети $x_0=0,3$ и $n=4$, а затим оценити грешку.

303. Методом итерације наћи приближно сва решења једначине $(x-1)^2=e^{-x}$ различита од нуле.

Глава IV

ИНТЕГРАЛ

4.1. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Таблица неодређених интеграла

1.	$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$(a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\},\ x > 0)$
2.	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	
3.	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a > 0,\ a \neq 1)$
4.	$\int e^x \, dx = e^x + C$	
5.	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	
6.	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\lvert x\rvert < 1$
10.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert + C$	$\lvert x\rvert > 1$
12.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\lvert\frac{1+x}{1-x}\rvert + C$	$x \neq 1$

Неодређени интеграл.

Примитивна функција функције $f(x)$ дефинисане у интервалу (a,b) је свака диференцијабилна функција $F(x)$ за коју је $f(x) = F'(x)$ за све $x \in (a,b)$.

Неодређени интеграл функције $f(x)$ на интервалу (a,b) је скуп свих примитивних функција те функције. Означавамо га са

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основне теореме о интегралу.

1. $d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx$;
2. $\int df(x) = f(x) + C$;
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $(a \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$;
4. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Одредити интеграле применом основних теорема о интегралу и применом таблице неодређених интеграла (задаци 304 – 311):

304. а) $\int 3x^2 dx$; б) $\int 2x^{-3} dx$;

в) $\int \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{x^2}$;

д) $\int 8{,}3x^{-0{,}17}\,dx$; ђ) $\int (9x-2)\,dx$;

е) $\int (x^3 - 2x^2 + 2x - 1)\,dx$; ж) $\int (2x^2 - 3x + 4)dx$;

з) $\int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx$; и) $\int \left(3x^2 - 5x + 6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$;

ј) $\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\,dx$ $(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \in \mathbf{R})$.

305. а) $\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$; б) $\int \frac{(x-a)^2}{x}\,dx$, $a \in \mathbf{R}$;

в) $\int \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right) dx$, $a \neq 0$; г) $\int (a + x^4)\,dx$, $a \in \mathbf{R}$;

д) $\int \frac{x^3 - x}{x}\,dx$;

ђ) $\int \frac{3x^3+1}{5x}\,dx$;

е) $\int \frac{6+2x+x^2}{x^4}\,dx$;

ж) $\int \frac{1+x^2+2x^4}{2x^2}\,dx$.

306. а) $\int \sqrt{x}\,dx$;

б) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx,\ m,n \in N$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)\,dx$;

д) $\int 7x\sqrt[3]{x}\,dx$; $= 7x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}}\,dx$

$7x^{\frac{4}{3}}dx$

ђ) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}dx}$;

е) $\int \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)\,dx$; $= 7\,\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C$

ж) $\int (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)\,dx$;

з) $\int (x^2-1)^3\,dx$; $7.$

и) $(1+\sqrt{x})^4\,dx$;

ј) $\int \frac{(x-1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx$;

к) $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

л) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

љ) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$;

м) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;

н) $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,dx$.

307. а) $\int 2^x e^x\,dx$;

б) $\int 3\cdot 4^x\,dx$;

в) $\int \frac{x + x^2 e^x}{x^2}\,dx$;

г) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$;

д) $\int (a^x + b^x)\,dx,\ a,b>0,\ a,b\neq 1$;

ђ) $\int (a^x \cdot b^{-x})\,dx,\ a,b>0,\ a\neq b$;

е) $\int a^x\left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx,\ a>0, a\neq 1$;

ж) $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)\,dx$;

з) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$;

и) $\int \frac{3^x + 2^x}{6^x}\,dx$.

308. а) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

б) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

в) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$;

г) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

д) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$;

ђ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

е) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$;

ж) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2\,dx$.

309. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$; б) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$; ж) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+x}{x^2+1}\,dx$; и) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

ј) $\displaystyle\int \frac{(1+2x^2)\,dx}{x^2(1+x^2)}$; к) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$;

л) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{1+x^2}$; љ) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

310. а) $\displaystyle\int \sin x\,d(\sin x)$; б) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x)$;

в) $\displaystyle\int e^{\sin x}\,d(\sin x)$; г) $\displaystyle\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$.

311. $(a, b, c, d \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$; б) $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx,\ c \neq 0$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)},\ a \neq b$; д) $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx$;

ђ) $\displaystyle\int \sin^2 ax\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2},\ a \neq 0,\ b \neq 0$.

312. Одреди $F(x)$, ако је:

а) $F'(x) = 4x+1$ и $F(-1) = 2$;

б) $F'(x) = 3x^2-4x$ и $F(0) = 1$;

в) $F'(x) = 7x^2-2x+3$ и $F(1) = 5$;

г) $F'(x) = 1+x+\cos 2x$ и $F(0) = 1$;

д) $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$ и $F(0) = 2$;

ђ) $F'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ и $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$;

е) $F'(x) = 2\sin 5x + 3\cos\dfrac{x}{2}$ и $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

4.2. МЕТОДА СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\,d\varphi(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$
$$x = \varphi(t), \qquad dx = \varphi'(t)dt.$$

Наћи ($a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) (задаци 313 – 316):

313. а) $\displaystyle\int (x+5)^1 0\,dx$; б) $\displaystyle\int (2x-6)^5\,dx$;

в) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x-1}\,dx$; г) $\displaystyle\int \sqrt{5x+6}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$; ђ) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx$;

е) $\displaystyle\int e^{ax}\,dx,\ a \neq 0$; ж) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$;

з) $\displaystyle\int \sin ax\,dx,\ a \neq 0$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

ј) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+1}$; к) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-1}$.

314. а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2x^2}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2},\ a \neq 0$; г) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$.

315. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a > 0$;

д) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^6}}\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$; ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

$1 - x^2 - x + 1$

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

316.

а) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx$, $a \neq 0$, $n \neq -1$; б) $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^n\,dx}{x^{n+1}+1}$; г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$; ђ) $\displaystyle\int \frac{\ln 2x\,dx}{x\ln 4x}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; ж) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

з) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

317. Одредити:

а) $\displaystyle\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$; б) $\displaystyle\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq -1$.

Одредити (задаци 318-322):

Интеграли облика $\displaystyle\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$

318. а) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$; ж) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+1}\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$;

ј) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$; к) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$;

л) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

Интеграли облика $\displaystyle\int \frac{f'(x)\,dx}{f^{\alpha}(x)}$, $\alpha \neq 1$

319. а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(4+x^5)^2}$; г) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$.

Интеграли облика $\displaystyle\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx,\ \alpha \neq -1$

320. а) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-6x^5}\cdot x^4\,dx$; б) $\displaystyle\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$; г) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\,dx$; ж) $\displaystyle\int \sin^4 x\sin 2x\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$;

ј) $\displaystyle\int x\sin(1-x^2)\,dx$; к) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

321. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (смена $\sqrt{x+1}=z$);

б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (смена $x=z^6$);

в) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (смена $e^x+1=z^4$);

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (смена $x=\sin^2 z$);

д) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}$ (смена $xe^x=z$);

ђ) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$ (смена $1/x=z$);

е) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ (смена $\sqrt{x-1}=t$);

ж) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$ (смена $x^3=t$).

322. а) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(x+1)}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{\ln\operatorname{tg} x\,dx}{\sin x\cos x}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

4.3. МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције. Тада је:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

323. Одредити:

а) $\int x\sin 2x\,dx$; б) $\int x\cos x\,dx$; в) $\int xe^{-x}\,dx$;

г) $\int xe^{x}\,dx$; д) $\int x^2e^{x}\,dx$; ђ) $\int \ln x\,dx$;

е) $\int x^a\ln x\,dx,\ a\in\mathbf{R},\ a\neq -1$; ж) $\int x\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

з) $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$; и) $\int \ln(x^2+1)\,dx$; ј) $\int \arcsin x\,dx$;

к) $\int x\cdot 3^x\,dx$; л) $\int \arccos x\,dx$; љ) $\int x\sin x\cos x\,dx$;

м) $\int 3^x\cos x\,dx$; н) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; њ) $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$.

324. а) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$;

в) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$; г) $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

325. Наћи:

а) $I_1=\int e^x\sin x\,dx$; б) $I_2=\int \sin(\ln x)\,dx$;

в) $I_3=\int \cos(\ln x)\,dx$. г) $I_4=\int e^x\cos x\,dx$.

326. Дат је низ интеграла $I_n=\int x^ne^x\,dx,\quad n\in N$.

а) Одредити везу између I_n и I_{n-1};

б) наћи I_5; в) наћи I_n.

327. Одредити рекурентне формуле за интеграле $(m,n\in N)$:

а) $\int \cos^n x\,dx$; б) $\int \sin^n x\,dx$; в) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$;

г) $\int \ln^n x\,dx$; д) $\int \dfrac{dx}{(x^2+1)^n}$.

328. Доказати $(m, n \in N)$:

а) Ако је $I_n = \int x^n \cos x\,dx$ и $J_n = \int x^n \sin x\,dx$, онда је $I_n = x^n \sin x - nJ_{n-1}$, $J_n = -x^n \cos x + nI_{n-1}$.

б) $I_m = \int x^\alpha (\ln x)^m\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}(\ln x)^m}{\alpha+1} - \dfrac{m}{\alpha+1} I_{m-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq -1$.

329. Одредити:

а) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int \sin \sqrt[3]{x}\,dx$; в) $\int \dfrac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

г) $\int \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; д) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2(1+x^2)}$; ђ) $\int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

330. Наћи:

а) $\int \dfrac{x e^{\operatorname{arctg} x}\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$; б) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} e^x\,dx}{e^x}$; в) $\int \dfrac{x e^x\,dx}{(x+1)^2}$;

г) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$; ђ) $\int \dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

е) $\int \dfrac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$; ж) $\int (\arcsin x)^2\,dx$; з) $\int \dfrac{\arcsin x\,dx}{x^2}$.

Интеграција рационалних разломљених функција

331. Одредити:

а) $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int \dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$;

в) $\int \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$; г) $\int \dfrac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx$.

332. Наћи:

а) $\int \dfrac{dx}{2x^2-5x+7}$; б) $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$;

в) $\int \dfrac{dx}{3x^2-x+1}$; г) $\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}$;

333. Наћи:

а) $\int \dfrac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{x^2+2x}$;

в) $\int \dfrac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$; г) $\int \dfrac{1-7x}{x^2-5x+6}\,dx$.

334. Одредити следеће интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$;

ђ) $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$; з) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4-1}$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$;

ј) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$; к) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$; л) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

335. Користећи смену $t = \operatorname{tg} x$ $\left(\sin^2 x = \dfrac{t}{1+t},\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2},\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$, наћи:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$; е) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

336. Примењујући смену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ $\left(\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\right.$ $\left. dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}\right)$, наћи:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; ђ) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$;

е) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; ж) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}$; и) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

337. Одредити:

а) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; б) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^4 x}$; г) $\displaystyle\int \sin 5x\cos 2x\,dx$;

д) $\displaystyle\int \sin x\cos 3x\sin 4x\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \cos 8x\cos 3x\,dx$;

е) $\displaystyle\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x\,dx$.

Интеграција неких ирационалних функција

338. Наћи:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;   б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-2\cdot\sqrt[3]{2x+3}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$;   г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$;   ђ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$;

е) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$;   ж) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$;   и) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$;   ј) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$;

к) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;   л) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$;

љ) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$;   м) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

339. Наћи интеграле:

а) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0$ (смена: $x=a\sin t$);

б) $\displaystyle\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx,$ (смена $x-1=2\sin t$);

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}},$ (смена $x=2\mathrm{tg}\ t$);

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}},$ (смена $x+1=\mathrm{tg}\ t$);

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}},$ (смена $2x-4=\sin t$);

ђ) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx,$ (смена $x=2\sin^2 t$).

4.4. ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Њутн-Лајбницова формула

Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција и F њена произвољна примитивна функција. Тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Парцијална интеграција код одређеног интеграла

Нека функције $u(x)$ и $v(x)$ имају непрекидне изводе на сегменту $[a, b]$. Тада је

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \big(u(x)v(x)\big)|_a^b - \int_a^b u(x)\,dv(x).$$

Смена променљиве код одређеног интеграла

Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна, а функција $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [a, b]$ има непрекидан извод. Ако је $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\beta \in [\alpha_0, \beta_0]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, тада важи једнакост

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

340. По дефиницији израчунати $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx$. Интервал $[a, b]$ поделити тачкама које чине аритметички низ.

341. По дефиницији израчунати $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx$, $(b > a > 0)$, дељењем интервала $[a, b]$ тачкама које чине геометријски низ.

342. Коришћењем интеграла израчунати:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

343. Применом Њутн-Лајбницове формуле израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx;$ в) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx;$

г) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$ д) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}\right)};$

ђ) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{ctg}^2 2x\,dx;$ е) $\displaystyle\int_0^3 \left(3^{1-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\right)dx;$

ж) $\displaystyle\int_0^3 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx.$

344. Израчунати $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx.$

345. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_1^9 x\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$

в) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0;$ г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}};$

д) $\displaystyle\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$ ђ) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx;$ е) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$

346. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx;$ б) $\displaystyle\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}};$

в) $\displaystyle\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy;$ г) $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dy}{\sqrt{y+9}-\sqrt{y}};$

д) $\displaystyle\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx;$ ђ) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^7 x\,dx;$

е) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2};$ ж) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1};$

з) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}};$ и) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}.$

347. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx;$

в) $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx;$ г) $\displaystyle\int_1^e x^n\ln x\,dx,\ n\in N;$

д) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x-1)\cos x\,dx;$ ђ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x-1)\sin x\,dx;$

е) $\int_0^{\pi/4} x\mathrm{tg}\,^2 x\,dx$;   ж) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$;

з) $\int_2^{e+1} x\ln(x-1)\,dx$;   и) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

j) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

348. Израчунати интеграле: $I_1 = \int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$, $I_2 = \int_0^{\pi} (x\cos x)^2\,dx$.

349. Дат је интеграл $I_m = \int_0^1 \frac{t^2+2t-1}{(t^2+1)^m}\,dt$. Израчунати:

а) I_1;   б) I_2;   в) $I_{3/2}$.

350. Одредити без израчунавања који је од датих интеграла већи:

а) $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ или $I_2 = \int_0^1 x\,dx$;

б) $I_1 = \int_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ или $I_2 = \int_0^1 x\sin^2 x\,dx$;

в) $I_1 = \int_1^2 e^{x^2}\,dx$ или $I_2 = \int_1^2 e^x\,dx$.

351. Нека је $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$. Доказати да је $\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

352. Доказати да је низ интеграла $J_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\,dx$ монотоно опадајући.

353. Ако је $J_m = \int_1^e \ln^m x\,dx$, доказати да је $J_m = e - mJ_{m-1}$ $(m \in N)$.

354. Нека је $I_n = \int_0^a \mathrm{tg}\,^n x\,dx$, $n \in N$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Доказати да је за $n \geq 2$: $(n-1)(I_n + I_{n-2}) = \mathrm{tg}\,^{n-1}a$.

355. Ако је $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, доказати да је $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

356. Дат је низ интеграла $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x}$, $n \geq 1$. Наћи везу између I_n, I_{n-2} и користећи добијени резултат одредити I_5.

357. Одредити: а) минимум функције $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$; б) тачке екстремума функције $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$, (за $x > 0$).

358. Користећи неједнакост $1 < \ln x < \dfrac{x}{e}$, која важи за $x > e$ доказати да је $0{,}92 < \displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1$.

359. Доказати да је $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$, $(x > 0)$.

360. Израчунати интеграле $I(a)$, а затим наћи $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I(a)$:

а) $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$;

б) $I(a) = \displaystyle\int_{2/\pi}^a \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

в) $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^a \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

г) $I(a) = \displaystyle\int_2^a \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

д) $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$;

ђ) $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^3+1}$;

е) $I(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-x}\sin x\,dx$.

361. Израчунати:

а) $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$;

б) $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t+t^2)}{(1+t)^2}dt$,

а затим израчунати $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

4.5. ПРИМЕНА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Површина равне фигуре

Нека је $f(x)$ непрекидна и ненегативна функција на $[a,b]$. Површина фигуре F у равни xOy, ограничене одсечком $[a,b]$, правама $x = a$ и $x = b$ и делом графика функције $y = f(x)$ за $x \in [a,b]$, је

$$P(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Запремина обртног тела

Нека је у равни xOy дат криволинијски трапез F ограничен непрекидном и позитивном функцијом $f(x)$, $a \le x \le b$ и нека је тело Φ настаје обртањем фигуре F око осе Ox. Тада је запремина тела Φ:

$$V(\Phi) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Дужина лука криве

Нека крива l у равни xOy представља график функције $f(x)$, $x \in [a,b]$. Ако је $f'(x)$ непрекидна функција на $[a,b]$, тада део криве l ограничен тачкама $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ има дужину

$$s(l) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

362. Израчунати површину фигуре ограничене:

а) параболом $y = x^2$ и правом $y + x = 2$;

б) параболом $y = 2x - x^2$ и правом $x + y = 0$;

в) кривом $y = 2^x$ и правама $y = 2$ и $x = 0$;

г) параболама $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$;

д) кривим $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$;

ђ) параболом $y = \dfrac{x^2}{2}$ и кружницом $x^2 + y^2 = 8$;

е) параболом $x^2 = 12(y-1)$ и кружницом $x^2 + y^2 = 16$;

ж) кривим $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и $y = \dfrac{x^2}{2}$.

363. Израчунати површину фигуре ограничене:

а) затвореном линијом $y^2 = (1 - x^2)^3$;

б) затвореном линијом $y^2 = x^2 - x^4$;

в) затвореном линијом $\left(y - \dfrac{x^2}{4}\right)^2 = 16 - x^2$.

364. Израчунати површину фигуре ограничене линијама:

а) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

б) $y = 3x + 18 - x^2$, $y = 0$;

в) $y = 1 + x^2$, $y = 2$;

г) $y = \dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = 10 - x$;

д) $y = 7x - 2x^2$, $x + y = \dfrac{7}{2}$,

ђ) $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 2$, $y = x$, $x = 0$;

е) $y = 0$, $y = 4(x-2)$; $y = (x-1)^2$;

ж) $y = x^2$, $y = 1 + \dfrac{3}{4}x^2$;

з) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;

и) $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$;

ј) $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$;

к) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$;

л) $y = x$, $y = -x$ и тангентом криве $y = \sqrt{x^2 - 5}$ у тачки $M(3,2)$;

љ) $y = \sin \dfrac{\pi x}{2}$, $y = x^2$;

м) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$;

н) $y=\cos x,\ y=1+\dfrac{2x}{\pi},\ x=\dfrac{\pi}{2}$; њ) $y=\dfrac{|4-x^2|}{4},\ y=7-|x|$;

о) $y=2-|2-x|,\ y=\dfrac{3}{|x|}$; п) $y=3-|3-x|,\ y=\dfrac{6}{|x+1|}$.

365. Израчунати површину фигуре ограничене:

а) кривом $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$ и тангентама криве у тачкама $A\big(1,\frac{1}{2}\big)$ и $B(4,2)$;
б) кривом $y^2=-x-16$ и тангентама параболе конструисаним из координатног почетка;
в) линијама $y=2x^2$, $y=0$ и тангентом криве $y=2x^2$ у тачки $A(2,y_0)$;
г) линијама $x=-1$, $y=0$, $y=x^2+x+1$ и тангентом криве $y=x^2+x+1$ у тачки $A(1,y_0)$;
д) кривом $y=x^2-x+2$ и тангентом криве $y=\ln x+3$ у тачки $A(1,y_0)$;
ђ) линијама $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi/2)$, $y=0$, $y=1$ и тангентом криве $y=\lg x$ у тачки $A(1,y_0)$.

366. Израчунати површину фигуре у равни xOy одређене релацијом:

а) $|y|+\dfrac{1}{2}\le\sqrt{1-|x|}$; б) $|y|+\dfrac{1}{2}\le e^{-|x|}$;

в) $|x^2+y^2-2|\le 2(x+y)$; г) $|y|+2|x|\le x^2+1$;

д) $x^2+y^2\le 2\big(|x|+|y|\big)$; ђ) $4\le x^2+y^2\le 2\big(|x|+|y|\big)$.

367. Израчунати дужину l кружног лука чији је централни угао α, а полупречник круга је r.

368. Израчунати дужину:

а) параболе $y=\dfrac{x^2}{2p}$ на интервалу $[0,a]$;

б) криве $y^2=x^3$ од тачке $(0,0)$ до тачке $(4,8)$;

в) криве $y=\ln\cos x$ за $0\le x<a<\dfrac{\pi}{2}$;

г) криве $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ на интервалу $[a,b]$, $a<b$;

д) криве $y=\ln(1-x^2)$ за $0\le x\le\dfrac{1}{2}$;

ђ) криве $y=\ln x$ за $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;

е) криве $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$, за $0\le x\le b<a$.

369. Израчунати дужину криве:

а) $y=\ln 2\sin x$, $0<a\le x\le \pi/2$;
б) $y=\ln 2\cos x$, између x- и y-осе;
в) $x=\ln\sec y$, за $0\le y\le\pi/3$.

370. Израчунати дужину криве:

а) $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$; б) $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

371. Израчунати дужину:

а) криве $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, за $1 \leq y \leq e$;

б) дела криве $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ унутар криве $y^2 = \frac{x}{3}$.

372. Израчунати дужину криве $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

373. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене:

а) кривом $y^2 = (x+4)^3$ и правом $x = 0$;

б) кривом $xy = 4$ и правом $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

в) кривом $y^2 = x^3$ и правама $y = 0$, $x = 1$;

г) кривама $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

д) кривом $y = \cos x$ и правама $y = 0$, $x = 0$.

374. У тачки $P(3,2)$ параболе $y^2 = 2(x-1)$ конструисана је тангента. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене овом тангентом, параболом и x-осом.

375. Права додирује параболу $y^2 = 12x$ у тачки $P(6, 6\sqrt{2})$. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене овом правом, параболом и x-осом.

376. Израчунати запремину тела које се добија ротацијом око x-осе фигуре ограничене:

а) параболом $y = 2x - x^2$ и правом $y = 0$;

б) кривом $y = e^{-x}$ и полуправом $y = 0$ за $x \geq 0$;

в) параболом $y = a - \frac{x^2}{a}$ и правом $x + y = a$, $a > 0$.

377. Наћи запремину тела добијеног ротацијом петље криве $9y^2 = x(3-x)^2$ око x-осе.

378. Израчунати запремину тела добијеног ротацијом око y-осе фигуре ограничене линијама:

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$, $a, b \neq 0$; б) $y^2 = (x+4)^3$ и $x = 0$;

в) $y = x\sqrt{-x}$ и $x = -4$ и $y = 0$; г) $y = a - \frac{x^2}{a}$ и $x + y = a$, $a \neq 0$;

д) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ђ) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$;

е) $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ и координатним осама.

379. Израчунати запремину тела насталог ротацијом лука криве $f(x) = x^2(1 - 2\ln x)$ око x-осе за $0 \leq x \leq \sqrt{e}$.

4.6. ПОЈАМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где је $y = f(x)$ непозната функција, назива се *диференцијална једначина реда n*. Свака функција $y = \varphi(x)$ која задовољава ову једначину, назива се решењем једначине, а график те функције, интегрална крива.

380. Формирати диференцијалне једначине следећих породица кривих:

а) $x^2 + y^2 = r^2$, $r \in \mathbf{R}$;

б) $(x - c)^2 + y^2 = 1$; $c \in \mathbf{R}$;

в) $y = cx$, $c \in \mathbf{R}$;

г) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$;

д) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 3x$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$;

ђ) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a \in \mathbf{R}$;

е) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2_{23}y + a_{33} = 0$, $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbf{R}$;

ж) $a(1 - e^{-x/a}) = y$, $a \in \mathbf{R}$.

381. Наћи опште решење диференцијалне једначине:

а) $y - xy' = 0$; б) $y'x^3 = 2y$;

в) $y'\sqrt{a^2 + x^2} = y$, $a \in \mathbf{R}$; г) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$;

д) $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$; ђ) $x^2y' + y = 0$;

е) $2st^2\, ds = (1 + t^2)\, dt$;

ж) $\varphi^2\, dr + (r - a)\, d\varphi = 0$, $a \in \mathbf{R}$;

з) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;

и) $(xy - x)\, dx + (xy + x - y - 1)\, dy = 0$.

382. Наћи опште решење диференцијалне једначине, а затим партикуларно решење које задовољава дати услов:

а) $y' = -y^2$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$; б) $2y'\sqrt{x} = y$, $y = 1$ за $x = 4$;

в) $y' = (2y + 1)\text{ctg}\, x$, $y = \dfrac{1}{2}$ за $x = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ за $x = -1$.

383. Наћи опште решење диференцијалних једначина, а затим оно парцијално решење, чији график садржи тачку $(-2, 4)$:

а) $xy' + y = 0$; б) $yy' + x = 0$; в) $y' = y$.

384. Скицирати интегралне криве следећих једначина:

а) $y'(x^2 - 4) = 2xy$; б) $y' + y\text{tg}\, x = 0$.

385. Одредити константу k тако да једно партикуларно решење једначине:

а) $(x^2 + x)y' + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0$ буде облика $y_1 = k$;

б) $y' + y^2 - 3y\text{tg}\, x + \text{tg}^2 x - 1 = 0$ буде облика $y_1 = k\text{tg}\, x$;

в) $2xy' + 2y - y^2 + x^2 = 0$ буде облика $y_1 = kx + 2$;

г) $y' = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$ буде облика $y_1 = \dfrac{k}{x}$.

386. Тачка x се креће по правој са константним убрзањем a. Наћи закон кретања тачке.

387. Одредити једначину криве за коју је коефицијент правца тангенте једнак квадрату апсцисе тачке додира.

388. Наћи једначину криве која пролази кроз тачку $(0, -2)$ тако да је коефицијент правца тангенте на криву у свакој тачки једнак ординати те тачке криве увећаној за 3.

389. Одредити све криве које имају својство да у свакој тачки полове одсечке тангенте између координатних оса.

390. Решити диференцијалну једначину $y' = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ сменом $ax + by + c = t$.

391. Наћи опште решење једначина, а затим оно решење које задовољава почетне услове:

а) $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $y''' = \cos x + \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -1$;

г) $y'' = x + \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;

д) $y'' = \ln x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

4.7. ДОДАТАК УЗ ЧЕТВРТУ ГЛАВУ

392. 1° Доказати да за хиперболичке функције

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \quad \text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}$$

важе релације:

а) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; б) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

в) $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$; г) $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$;

д) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

2° Одредити интеграле

а) $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx$; б) $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$; в) $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ (сменом $x = a\operatorname{ch} t$);

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a > 0$ (сменом $x = a\operatorname{sh} t$); ђ) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

393. Наћи $I = \int \sqrt{x^2+1}\, dx$.

394. Израчунати $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$ $(a < b)$.

395. Нека је $I_n = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x}}$, $n = 1, 2, \dots$.

а) Одредити везу између I_n и I_{n-1}; б) Наћи I_0, I_1, I_2.

396. Наћи $\int e^{-|x|}\, dx$.

397. Наћи $\int |x|\, dx$.

398. Одредити $\int \max(1, x^2)\, dx$.

399. Поделивши интервал $[a, b]$ на n-једнаких делова, по дефиницији израчунати $(a < b)$:

а) $\int_a^b \sin x\, dx$; б) $\int_a^b x^3\, dx$.

400. Показати да су интеграли

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2}\, dx}{\sqrt{x - x^2}} \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}\, dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

једнаки и користећи се том чињеницом израчунати их.

401. Израчунати рад A потребан да се тело T масе m са површине земље избаци вертикално на висину h. Колики је рад потребан да тело буде бесконачно удаљено?

402. Израчунати интеграл $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$ сменом:

а) $u = \cos x$; б) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

403. Дат је интеграл $I(a,b)=\int_a^b \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

а) Доказати да је $I(a,b)=I(-b,-a)$;

б) ако су a и b истог знака, доказати да је $I(a,b)=I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

404. Израчунати $F'(x)$, ако је:

а) $F(x)=\int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}dt$; б) $F(x)=\int_x^5 \sqrt{1+t^2}dt$;

в) $F(x)=\int_2^{2x} \sqrt{1+t^2}dt$; г) $F(x)=\int_x^{e^x} \sqrt{1+t^4}dt$.

405. Наћи најмању и највећу вредност функције $f(x)=\int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}dt$ на интервалу $[-1,1]$.

406. Нека је $f(x)$ непрекидна, периодична функција са периодом T. Доказати да $\int_x^{x+T} f(t)dt$ не зависи од x.

407. Ако је $f(t)$ непрекидна функција на интервалу $[0,1]$, доказати да је

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

408. Нека је $f(x)$ интеграбилна функција на $[a,b]$ тако да је $f(a+b-x)=f(x)$. Доказати да је

$$\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

409. Доказати да је $\frac{1}{2}\le\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\le\frac{\pi}{6}$, $n\ge 1$.

410. Дат је низ интеграла $I_n=\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,dx$, $n\ge 1$.

а) Доказати да је (I_n) монотоно опадајући нула низ.

б) Одредити везу између I_n и I_{n+2}.

411. Дат је низ интеграла $I_n=\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}}\,dx$, $n=0,1,2,\ldots$

а) Наћи I_0;

б) Доказати да је (I_n) монотоно опадајући нула низ.

в) Одредити везу између I_n и I_{n-1}.

412. Нека је $J_n=\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $n\ge 0$.

а) Доказати да је (J_n) монотоно опадајући нула низ.

б) Одредити везу између J_n и J_{n-2}.

в) Израчунати J_2.

413. Ако је $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0$, доказати да једначина $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ има бар један реалан корен x_0 у интервалу $(0, 1)$.

414. Нека је f непрекидна функција за коју важи

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \qquad \text{и} \qquad \int_0^1 x f(x)\,dx = 0.$$

Доказати да f има бар две нуле на интервалу $[0, 1]$.

415. Доказати да не постоји ненегативна, непрекидна функција, $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, која није идентички једнака нули тако да за све $x \in [0,1]$ важи:

$$\int_0^x f(t)dt \geq f(x).$$

416. Израчунати површину фигуре ограничене:

а) кривама $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ и x-осом:

б) кривом $x = y^2(y-1)$ и y-осом;

в) кривама $y = (x+1)^2$ и $x = \sin \pi y$ $(0 \leq y \leq 1)$ и правом $y = 0$.

417. Дата је породица функција $f(x) = xe^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$.

а) Доказати да екстремне тачке свих ових функција припадају правој $y = \dfrac{x}{\sqrt{e}}$.

б) Израчунати површину $P(A)$ дела равни ограниченог луком дела графика функције $f(x)$, x-осом и правом $x = A$ $(A > 0)$, а затим $\lim\limits_{A \to \infty} P(A)$.

418. Нека је $f(x)$ непрекидна функција и $f(x) > 0$ за $x \geq 0$. Доказати да је функција $\varphi(x) = \dfrac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ растућа за $x \geq 0$.

419. Наћи опште решење једначине: $x \displaystyle\int_0^x y\,dx = (x+1) \int_0^x xy\,dx$.

420. Дата је диференцијална једначина $(1 + x^2)y' = -2xy$.

а) Наћи опште решење једначине.

б) Одредити решење које пролази кроз тачку $(0, 1)$.

в) Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре ограничене том кривом и x-осом, око x-осе.

Глава V

КОМБИНАТОРИКА

5.1. УВОД

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ непразни коначни скупови. Означимо са $|A|$ број елемената скупа A.

Правило збира

Ако је за све $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, тада је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Правило производа

Број елемената Декартовог производа је

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

421. а) Колико се троцифрених бројева завршава цифром 3?
б) Колико има троцифрених бројева дељивих са 5?

422. Колико има четвороцифрених бројева, код којих је збир цифара 10, а цифра десетица једнака 5?

423. На правој p дато је пет различитих тачака A, B, C, D и E. Колико има и које су то дужи чији су крајеви дате тачке?

424. Збир броја страница и броја дијагонала конвексног многоугла је 153. Колико страница има тај многоугао?

425. Нека је $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$. Колико има различитих пресликавања скупа A у скуп B?

426. Дат је скуп тачака међу којима никоје три тачке нису колинеарне. Колико тачака садржи тај скуп ако је број правих одређених тим тачкама два пута већи од броја тачака?

427. Колико има десетоцифрених бројева дељивих са 25, код којих се цифре не понављају, не почињу цифром 0, а цифра стотина им је: а) 0 или 5; б) 2 или 3?

428. Из града А у град Б води 6 путева, а из града Б у град Ц три пута. Из града А може се стићи у Ц једино ако се пролази кроз Б. На колико различитих начина може да се путује из града А у град Ц?

429. Да би се стигло од места А до места Д може се проћи кроз место Б или кроз место Ц. Од места А до Б воде три директна пута, од А до Ц - четири, од Б до Ц - три, од Б до Д - два и од Ц до Д - три директна пута. Колико има могућих путева од А до Д?

430. Од трга А до трга Б воде две једносмерне улице пресечене са 7 двосмерних улица. На колико начина возач може стићи са трга А на трг Б крећући се тим улицама?

431. Нека скуп A има n елемената, а скуп B m елемената ($m,\ n \in \mathbf{N}$). Колико елемената могу имати скупови $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$?

432. Дата је таблица:

Т Р О У Г А О
Р О У Г А О
О У Г А О
У Г А О
Г А О
А О
О

На колико разних начина се може прочитати реч "троугао" ако се чита по једно слово слева на десно или одозго на доле?

433. Колико различитих делилаца има број
а) 2400,
б) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ ($p_1,\ p_2, \ldots, p_m$ - међусобно различити прости бројеви, $k_1,\ k_2, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$)?

434. На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 различитих топова тако да се никоја два међусобно не туку (никоја два се не налазе у истој врсти или истој колони)?

435. Ако скуп А има n елемената ($n \in \mathbf{N}$), колико има бинарних операција тог скупа?

436. На кругу је дато n различитих тачака. Колико има различитих незатворених изломљених линија без самопресека, састављених од $n-1$ дужи чија су темена различите тачке из датог скупа тачака?

437. На тениском турниру учествује 2^n такмичара. Турнир се игра по куп систему, тј. у наредно коло се пласира победник у мечу, а поражени испада из даљег такмичења. Сваки меч се игра до три добијена сета, односно, побеђује онај играч који први добије три сета. Познато је да је на целом турниру одиграно укупно $2^{n+1}+4n^2+184$ сетова. Одредити број такмичара на турниру.

438. У једном насељу свака улица сече сваку другу улицу и не постоје три улице које се секу у истој раскрсници. Број раскрсница је 21.

а) Колико има улица у том насељу?

б) Колико има стамбених четврти ограничених са свих страна улицама?

439. Колико има целих бројева између 100 и 10000 код којих су тачно три цифре једнаке?

440. На фудбалском турниру такмичење се одвија у m група ($m>1$) са по $2k$ екипа ($k>1$) у свакој групи. У групама екипе играју свака са сваком и прве две екипе из сваке групе улазе у финалну групу. У финалној групи екипе играју свака са сваком, с тим што екипе које су се састајале у предтакмичењу не играју međусобно нову утакмицу. Ако је на турниру одиграно укупно мање од 115 утакмица и ако је тај број утакмица непаран, одредити m и k.

5.2. ПЕРМУТАЦИЈЕ И ПЕРМУТАЦИЈЕ С ПОНАВЉАЊЕМ

Нека је $n\in\mathbf{N}$. Производ $1\cdot2\cdot3\cdots n$ означава се са $n!$ и чита "n факторијел". Посебно се дефинише $0!=1$.

Пермутација (без понављања) скупа A, који има n елемената, је сваки низ у коме се тачно по једанпут појављују сви елементи скупа A. Број пермутација n-точланог скупа је $P(n)=n!$.

Нека је дат скуп $A=\{a_1,\ a_2,\dots,a_m\}$. Сваки низ дужине $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$ у коме се елемент a_1 појављује k_1 пута, елемент a_2 појављује k_2 пута, ..., елемент a_m појављује k_m пута ($k_1,\ k_2,\dots,k_m\geq0$) назива се *пермутацијом са понављањем* скупа A типа $(k_1,\ k_2,\dots,k_m)$. Број описаних пермутација једнак је

$$P_{(k_1,k_2,\dots,k_m)}(n)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

441. Израчунати $n!$ за $n=0,1,2,\dots,10$.

442. Израчунати:

а) $7!\left(\frac{6!}{8!}+\frac{4!}{6!}\right)-8!\left(\frac{7!}{9!}-\frac{4!}{7!}\right)$; б) $8!\left(\frac{5!}{7!}-\frac{8!}{9!}\right)-7!\left(\frac{3!}{6!}-\frac{7!}{9!}\right)$.

443. Решити једначине ($x\in\mathbf{N}$):

а) $\dfrac{x!}{(x-1)!} = 9;$ б) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!} = 132;$

в) $\dfrac{(x+2)!}{(x-1)!} = 120;$

444. Решити неједначине ($x \in \mathbf{N}$):

а) $\dfrac{(2x+1)!}{(2x-1)!} \leq 72;$ б) $\dfrac{(3x-1)!}{(3x+1)!} \geq \dfrac{1}{90};$

445. Решити неједначине:

а) $\dfrac{(n+2)!}{3n!} \leq 4;$ б) $\dfrac{(n+1)!}{2+(n-1)!} < 3;$

в) $0 \leq \dfrac{n!(n-2)}{(n+2)!} \leq 3;$ г) $(n+1)! - 4! \leq 70.$

446. а) Образовати све пермутације речи "КРУГ" и поређати их у лексикографском поретку.

б) Образовати све пермутације речи "ШКОЛА" и поређати их у лексикографском поретку.

447. а) Одредити 1841. пермутацију од елемената a, b, c, d, e, f, g.

б) одредити педесету пермутацију елемената 1,3,5,7,9;

в) одредити 389. пермутацију од елемената 1,2,3,4,5,6.

448. Која је 500. пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f\}$?

449. На колико начина могу седам особа различите старости стати у врсту под условом да најстарији мора бити у средини?

450. Возач је за свој аутомобил купио четири спољашње и четири унутрашње гуме. На колико начина могу те гуме да се спаре?

451. Колико има осмоцифрених бројева од цифара 0,1,2,3,4,5 ако се у сваком броју цифра 1 јавља три пута, а остале цифре по једном, ако се осмоцифреним

а) сматрају и они бројеви који почињу нулом;

б) не сматрају они бројеви који почињу нулом.

452. Колико пермутација од елемената a, b, c, d, e, f, g, h почиње са:

а) a; б) abc; в) $hfdc$?

453. У колико се различитих пермутација елемената a, b, c, d, e елемент a налази на првом, а елемент e на последњем месту?

454. 1° У колико пермутација од елемената 1,2,3,4,5,6,7,8 се 2,4,5,6 налазе један поред другог:

а) у неком задатом поретку; б) у произвољном поретку?

2° У колико пермутација од n елемената стоји m елемената ($m < n$) један поред другог:

а) у неком задатом поретку; б) у произвољном поретку?

455. На колико начина се у низ могу поређати цифре $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ тако да се на првих пет места нађу парне цифре?

456. Колико има пермутација скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ код којих:

а) су елементи 0 и 1 суседни, при чему је 0 испред 1;

б) се између 0 и 1 налази тачно један елемент;

в) се нула налази испред јединице (не обавезно непосредно)?

457. Колико има пермутација бројева 1,2,3,4,5,6,7,8,9 таквих да јединица није на првом месту, двојка није на једном од прва два места, а тројка није на једном од прва три места?

458. На колико начина се на полици могу распоредити 30 књига тако да две одређене књиге не буду једна до друге?

459. На полици се налази 12 различитих књига од којих су 5 из математике, 4 из физике и 3 из хемије. На колико различитих начина се могу распоредити књиге на полици, ако се зна да све књиге из исте области морају бити увек једна до друге?

460. Имамо три различита производа фабрике А, четири различита производа фабрике Б и пет различитих производа фабрике Ц. На колико различитих начина се могу поређати у низ ти производи уз следеће услове: производи фабрике Б су један поред другог, производи фабрике Ц су један поред другог и никоја два производа фабрике А нису један поред другог?

461. На колико начина се могу распоредити цифре броја N тако да никоје две једнаке цифре не буду једна до друге, ако је:

а) $N = 12345254$; б) $N = 12341234$?

462. Колико има пермутација од n елемената у којима:
а) два дата елемента a и b не стоје један до другог;
б) три дата елемента a, b и c не стоје један до другог (у било ком поретку)?

463. Скратити разломке:

а) $\dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$; б) $\dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)!}$; в) $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

464. Израчунати збир $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$

465. Наћи број пермуација од елемената a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 код којих a_1 није на првом месту, а a_2 није на другом месту.

466. а) Образовати све пермутације речи МАМА.

б) Образовати све пермутације речи ПРАВА.

467. а) Одредити 1099. пермутацију од елемената a, a, a, b, c, d, d, d.
б) Која је по реду пермутација АВАЛА од почетне пермутације АААЛВ (у лексикографском абецедном поретку)?

468. а) Одредити 1100. пермутацију (у лексикографском поретку) од елемената $aaabcddd$.

б) Одредити 55. пермутацију (у лексикографском поретку) од елемената *aaabcc*.

469. Која је по реду (у лексикографском поретку) пермутација:
а) МАТЕМАТИКА од почетне пермутације АААЕИКММТТ;
б) КОМБИНАТОРИКА од почетне пермутације ААБИИККМНООРТ?

470. Један аутомат за цигарете садржи 4 врсте цигарета и од сваке врсте по 20 кутија. На колико начина се може испразнити аутомат?

471. На колико начина се могу на првом реду шаховске табле распоредити 2 топа, 2 коња, 2 ловца, краљ и дама?

472. а) Колико има седмоцифрених бројева чије су цифре 3,3,3,5,5,7,7?
б) Колико има шестоцифрених бројева чије су цифре 1,1,2,2,3,3?

473. У посластичарници се продају четири врсте колача: кремпите, шампоњези, наполеони и еклери. На колико начина је могуће купити 7 колача?

474. Четири куглице убацују се у три кутије, тако да нека кутија може бити и празна. Колико има различитих распореда?

475. Резултати фудбалских утакмица се записују са: 0-нерешено, 1-победа домаћина, 2-победа госта. На листићу спортске прогнозе налази се 13 парова у одређеном поретку. Колико има различитих колона, ако се зна да је у једном колу било 6 победа домаћина, 5 нерешених игара и две победе гостију?

476. На колико начина се 45 књига може поделити на три полице тако да на свакој полици буде по 15 књига?

477. Осам аутора треба да напише књигу од 16 поглавља. На колико начина они могу да распореде материјал, ако два аутора пишу по три поглавља, четири по два, а два по једно поглавље?

5.3. ВАРИЈАЦИЈЕ

Варијација без понављања k-те класе скупа A, који има n елемената ($n \geq k$), је сваки низ k међусобно различитих елемената. Број варијација без понављања k-те класе скупа од n елемената ($n \geq k$) једнак је

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

За $n = k$ варијације без понављања скупа A су пермутације тог скупа.

Варијација k-те класе скупа A, који има n елемената је сваки низ од k елемената скупа A, при чему се елементи могу и понављати. Често се овакви низови називају и "варијације са понављањем". Број варијација k-те класе скупа од n-елемената једнак је $\overline{V}_n^k = n^k$

478. Број варијација без понављања друге класе од n елемената је 380. Наћи n.

479. Колико има двоцифрених, а колико троцифрених бројева од цифара 1,2,3, ... ,9 чије су све цифре различите?

480. Колико има телефонских бројева са шест цифара код којих су све цифре различите?

481. Колико се петоцифрених бројева може образовати од цифара 0,1,2,5,7,9 тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?

482. Који број је већи и колико пута V_n^k или V_{n-1}^{k-1} $(n, k \geq 2)$?

483. Решити једначину $\dfrac{(x+3)!}{V_x^5 \cdot (x-5)!} = 720$;

484. Један фудбалски тим саставља се од играча који могу играти на одређеним местима. Колико постоји варијанти састава тима од 13 играча, ако: а) сваки од играча може играти на сваком месту; б) два играча могу бити само голмани?

485. Како гласи 10411. варијација без понављања 6. класе од слова које садржи реч "република"?

486. Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара 1,3,5,7,9?

487. Колико треба попунити колона на спорцкој прогнози да би погодак био сигуран, ако се на тикету налази 13 парова (три знака - 0,1,2)?

488. Језик племена АББА састоји се из само два слова. Колико речи од седам слова има у овом језику?

489. Желимо да телефонирамо пријатељу чији смо број телефона заборавили, а сећамо се да је шестоцифрен и не почиње нулом.
а) Колико времена одузима испробавање свих могућности ако нам је за један позив потребно 5 секунди?
б) За колико се време скраћује ако знамо да се међу цифрама налази тачно једна четворка на другом, или трећем месту?

490. Колико Морзеових знакова се може формирати од основних знакова · и - , ако се зна да се један знак састоји од највише четири основна знака?

491. Колико има петоцифрених бројева, који се могу написати од цифара 0,2,4,6,8, ако се

а) петоцифреним сматрају и они бројеви који почињу нулом;

б) петоцифреним не сматрају они бројеви, који почињу нулом или нулама?

492. На колико начина може бити оцењен један ученик на крају школске године из 12 предмета ако:

а) из свих предмета може добити оцену од 1 до 5?

б) Из два предмета не може добити оцену вишу од 3, а из три предмета нижу од 4?

493. У једној држави не постоје два становника са једнаким бројем и распоредом зуба. Колики је максималан број становника те државе?

494. Доказати да у месту са хиљаду становника живе бар две особе са истим иницијалима.

495. Познато је да крокодил има највише 68 зуба. Доказати да међу 16^{17} крокодила не морају да постоје два са истим распоредом зуба.

496. Градови A и B повезани су са три различита пута.

а) На колико начина се могу градови A и B спојити кружним путем?

б) Колико таквих путева има, ако при повратку не бирамо пут којим смо дошли?

497. Колико редова треба да има таблица истинитости у исказном рачуну за исказну формулу са n различитих слова?

498. Колико има различитих четвороцифрених бројева дељивих са 4 од цифара 1,2,3,4,5 ако

а) ниједан број не садржи једнаке цифре;

б) цифре се могу и понављати.

499. Колико има различитих четвороцифрених бројева дељивих са 5 записаних помоћу цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5 ако:

а) ниједан број не садржи једнаке цифре;

б) цифре се могу и понављати?

500. Гост у хотелу за доручак може бирати кафу, чај или млеко. Колико има начина за избор, ако остаје у хотелу седам дана?

501. На колико различитих начина се на крају школске године могу оценити ученици једног разреда од 30 ђака из једног предмета (ако долазе у обзир све оцене од 1 до 5)?

5.4. КОМБИНАЦИЈЕ И КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ

Нека је $n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $k \leq n$. Број $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ означава се са $\binom{n}{k}$ и чита "n над k".

Комбинација (без понављања) k-те класе скупа A, који има n-елемената ($n \geq k$) је сваки k-точлани подскуп скупа A. Број комбинација k-те класе n-точланог скупа једнак је

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ако се из n-точланог скупа A бира један по један, са враћањем, k елемената и ако није битан редослед већ само који елементи и колико пута су изабрани, онда се резултат избора назива *комбинација са понављањем* k-те класе скупа од n-елемената. Број тих комбинација једнак је $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

502. Израчунати:

а) $\binom{7}{2}$; б) $\binom{8}{5}$; в) $\binom{16}{14}$;

г) $\binom{6}{2} + \binom{6}{4}$; д) $\binom{9}{3} - \binom{9}{6}$; ђ) $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$.

503. Написати све комбинације четврте класе од елемената a, b, c, d, e, f, g које садрже елементе b, c, e?

504. Колико има комбинација пете класе од елемената 1,2,3,4,5,6,7,8 које:

а) садрже елементе 2,4,6; б) не садрже сва три елемента 2,4,6?

505. На колико начина се од шест лица могу изабрати три?

506. Од петнаест војника треба изабрати тројицу за стражу. На колико начина се може извршити избор?

507. У једној кутији се налази седам лоптица. На колико начина се може изабрати пет лоптица?

508. Да би добио позитивну оцену на писменом задатку ученик треба да уради два задатка од 6. На колико начина он може да одабере та два задатка?

509. Колико има комбинација у игри лото (од 39 бројева - извлачи се 7)?

510. Правоугаоник је пресечен са два скупа правих паралелних његовим страницама. Сваки скуп се састоји од по n правих. Колико се на овај начин добија правоугаоника?

511. У скупу од 100 тачака има тачно 7 четворки колинеалних тачака. Колико је највише различитих правих одређено овим скупом тачака?

512. У скупу од 100 тачака има тачно 20 тројки колинеарних тачака. Колико највише правих одређују тачке овог скупа?

513. Из групе од 15 радника треба изабрати пословођу и четири радника. На колико начина се може извршити избор?

514. Јединица се састоји од 3 официра, 6 млађих официра и 60 војника. На колико начина се од њих може изабрати мања јединица од једног официра, два млађа официра и 20 војника?

515. У кутији се налазе куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3, ... , 10. Из кутије се истовремено ваде три куглице. У колико случајева ће збир бројева на извученим куглицама бити: а) једнак 9; б) већи или једнак од 9?

516. Од осамнаест различитих цветова треба направити букет тако да се он састоји од бар три цвета. На колико начина се букет може направити?

517. Колико има различитих седмоцифрених бројева од цифара 1,2,3 под условом да се цифра 2 у сваком броју појављује два пута.

518. Колико има седмоцифрених бројева од цифара 1, 2, 3, ... , 8 тако да се цифра 2 појављује у сваком броју бар три пута?

519. Из комплета од 52 карте извучено је 10 карата. У колико случајева се међу извученим картама налази:

а) тачно једна дама; б) тачно две даме;

в) бар једна дама; д) бар две даме?

520. Из групе од 7 мушкараца и 4 жене треба одабрати 6 особа тако да међу њима буду бар две жене. На колико начина се то може учинити?

521. Кошаркашки тим сачињавају пет бекова, четири центра и три крила. На колико начина се може од њих саставити петорка, ако у њој морају да играју бар два бека и бар један центар?

522. Од девет књига треба изабрати пет, под условом да ако се изабере књига A, обавезно се узима и њен наставак, књига B. На колико се начина може извршити избор?

523. а) На колико начина се може 8 идентичних куглица расподелити на 3 кутије, тако да у сваку кутију дође бар једна куглица? б) Исти задатак: n-куглица и k-кутија.

524. На колико начина се кутија са 20 цигарета може поделити између 4 пушача тако да свако од њих добије бар по једну цигарету?

525. На полици се налази 12 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 од њих да никоје две од изабраних нису једна до друге?

526. На колико начина се може комплет од 52 карте поделити на два једнака дела, тако да се у сваком делу налазе по две даме?

527. У осам четворокреветних соба треба разместити 32 човека. На колико начина се ово може направити (сви гости и све собе су равноправне)?

528. На свакој страници квадрата задате су по четири произвољне тачке од којих ниједна није теме квадрата. Колико има троуглова чија су темена задате тачке?

529. Доказати да је ($n, k \in \mathbf{N}, n \geq k$):

а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; б) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

530. Доказати да је:

а) $2 \cdot \binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n+2}{n+1} = 0,\ n \in \mathbf{N}$;

б) $\binom{2n}{3} - 2 \cdot \binom{n}{3} = n^2(n-1),\ n \in \mathbf{N}$.

531. Решити једначине $x \in \mathbf{N}$:

а) $\binom{x+1}{2} : \binom{x}{3} = 4 : 5$; б) $12 \cdot \binom{x}{1} + \binom{x+4}{2} = 162$;

в) $\binom{x+1}{3} : \binom{x}{4} = 6 : 5$.

532. Решити једначине $x \in \mathbf{N}$:

а) $V_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$; б) $V_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$;

в) $C_{x+1}^{x-4} = \dfrac{7}{15} \cdot V_{x+1}^3$.

533. Решити неједначине ($x \in \mathbf{N}$):

а) $\binom{13}{x} < \binom{13}{x+2}$; б) $\binom{18}{x-2} > \binom{18}{x}$;

в) $\binom{x}{6} < \binom{x}{4}$; г) $5 \cdot \binom{13}{x} < \binom{x+2}{4}$.

534. Одредити природне бројеве n и m ако је

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

535. а) Који је максималан број правих које се могу конструисати кроз n тачака од којих је p тачака на једној правој? б) Који је максималан број равни које се могу конструисати кроз n тачака од којих је m тачака у једној равни?

536. У равни је дато n тачака ($n \geq 4$) и кроз сваке две од њих конструисана је права. Ако никоје две од ових правих нису паралелне и никоје три се не секу у једној тачки, наћи број пресечених тачака (не рачунајући n задатих тачака).

537. Скупштина од 180 људи бира председника, секретара и три члана председништва. На колико се то може учинити начина?

538. Од осам ученика треба саставити кошаркашки тим од пет чланова тако да се од два највиша ученика бира један центар, а од преосталих шест ученика, бирају се два бека, а затим још два крила. На колико начина се може саставити тим?

539. На колико начина се 20 куглица може поделити на три групе тако да прва садржи 5, друга 7, а трећа 8 куглица?

540. На свакој од две палубе на броду ради по четири морнара. На колико начина се могу изабрати морнари за рад на броду, ако постоји 31 кандидат, од којих 10 желе да раде на горњој палуби, 12 на доњој, а деветорици је свеједно где би радили?

541. Муж има 12 пријатеља - 5 жена и 7 мушкараца, а његова жена - 7 жена и 5 мушкараца. На колико начина они могу саставити друштво од 6 мушкараца и 6 жена, тако да 6 гостију позове муж, а 6-жена?

542. Дате су паралелне праве p и q, m тачака на правој p и n тачака на правој q. Свака од m тачака праве p спојена је са сваком од n тачака праве q. Ако се ни у једној тачки између правих p и q не секу више од две од добијених дужи, одредити колики је број тих пресечних тачака.

543. Како гласи:

а) Тринаеста комбинација са понављањем шесте класе од елемената 1,2,3;
б) 546. комбинација са понављањем пете класе од елемената 1, 2, ... , 9?

544. Написати све комбинације са понављањем друге и треће класе од елемената a, b, c, d.

545. Из једне кутије у којој се налази десет куглица (нумерисаних бројевима 0, 1, 2, ... , 9) извлачи се 6 куглица тако да се свака извучена куглица врати у кутију пре извлачења следеће. Посматрајући тако добијене комбинације са по 6 елемената, одредити:

а) број свих тих комбинација;

б) број оних комбинација у којима се ниједанпут не јавља куглица нумерисана са 1;

в) број оних комбинација у којима се бар пет пута јавља куглица нумерисана са 1;

г) број комбинација у којима се појављују само непарно нумерисане куглице;

д) број комбинација у којима је заступљена бар једна парно нумерисана куглица.

546. На колико се различитих начина 20 јабука може поделити на четворо деце (у обзир долазе и поделе у којима неко дете не добија јабуке)?

547. Добављач наручује пет производа који могу бити исправни или неисправни. Колико има свих могућих случајева обзиром на исправност производа, ако се наручују: а) разноврсни производи: б) истоврсни производи?

548. У аутобусу, који стаје на 4 станице, налази се 12 путника. На колико начина путници могу изаћи на те четири станице у зависности само од броја њих који излазе на различитим станицама?

5.5. БИНОМНА ФОРМУЛА

За сваки природни број n важи једнакост

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n}x^0 y^n,$$

која се назива *биномна (или Њутнова) формула*. Бројеви $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\dots$, $\binom{n}{k}$, $\dots$, $\binom{n}{n}$ називају се биномни коефицијенти.

Израз $T_k = \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$ назива се *k-ти члан у биномном развоју* $(x+y)^n$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

549. Наћи:

а) четврти члан у развоју $(x^2 - y^2)^{11}$;

б) шести члан у развоју $(x+y)^{15}$;

в) пети члан у развоју $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{12}$.

550. Одредити коефицијент уз члан a^7b^8 у развоју бинома $(a+b)^{15}$.

551. Наћи n у развоју бинома $(a+b)^n$, $n \in \mathbf{N}$, ако је коефицијент трећег члана једнак 21.

552. У развоју бинома $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x})^n$, $x \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, одредити члан који не садржи x ако је биномни коефицијент трећег члана већи за 5 од биномног коефицијента другог члана.

553. Који члан у развоју бинома $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, $a > 0$, $b > 0$, садржи a и b са истим степеном?

554. У развоју бинома $(x^2 + \frac{a}{x})^m$, $x \neq 0$, $m \in \mathbf{N}$, коефицијенти четвртог и тринаестог члана су међусобно једнаки. Наћи члан који не садржи x.

555. У развоју $(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}})^{15}$, $a > 0$, наћи члан који не зависи од a.

556. Наћи средњи члан у развоју бинома $\left(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m$, $a > 0$, $m \in \mathbf{N}$, ако се зна да се коефицијенти петог и трећег члана односе као 14:3.

557. Збир коефицијената првог, другог и трећег члана у развоју $(x^2 + \frac{1}{x})^m$, $m \in \mathbf{N}$, $x \neq 0$, је 46. Наћи члан који не садржи x.

558. Наћи члан, који не садржи x, у развоју $(x + \frac{1}{x})^n$, $n \in \mathbf{N}$.

559. Одредити коефицијент уз x^8 у развоју $(1 + x^2 - x^3)^9$.

560. Одредити коефицијенте уз x^{17} и x^{18} у развоју $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

561. Доказати да је

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m-2} + 2\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2}, \quad n \geq 2, \quad m \geq 2.$$

562. Наћи пети члан у развоју бинома $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$, ако је коефицијент трећег члана једнак 78.

563. Наћи чланове у развоју $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$ који нису ирационални.

564. Наћи све чланове у развоју $(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x})^{12}$, $x > 0$ код којих се x појављује са целобројним експонентом.

565. Доказати да је највећи коефицијент у развоју $(a + b)^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$ по биномној формули паран број.

566. Трећи члан у развоју $(2x + \frac{1}{x^2})^m$, $x \neq 0, m \in \mathbf{N}$ не садржи x. Одредити све вредности за x тако да тај члан буде једнак другом члану у развоју $(1 + x^3)^{30}$.

567. Збир трећег од почетка и трећег од краја биномних коефицијената у развоју $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$, $n \in \mathbf{N}$, једнак је 9900. Колико има рационалних чланова у овом развоју?

568. Одредити највећи биномни коефицијент у развоју $(n + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbf{N}$, ако је производ четвртог члана од почетка и четвртог члана од краја једнак 14400.

569. Доказати да је

$$1 - 10\binom{2n}{1} + 10^2\binom{2n}{2} - 10^3\binom{2n}{3} + \cdots - 10^{2n-1}\binom{2n}{2n-1} + 10^{2n} = 81^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

570. Одредити коефицијент уз x^3 у (развијеном) изразу

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \cdots + (1+x)^{15}.$$

571. Одредити члан који у биномном развоју $\left(\sqrt[4]{a^2x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}$ не садржи x.

572. Наћи највећи члан у развоју $\left(1 + \sqrt{2}\right)^{50}$.

573. Коефицијент уз x у трећем члану биномног развоја $(x^2 - \frac{1}{4})^n$ једнак је 31. Одредити n.

574. Наћи највећи по апсолутној вредности члан у развоју бинома $(a+b)^{50}$ ако је $|a| = \sqrt{3}|b|, a \neq 0$.

575. Одредити x

а) тако да четврти члан у развоју бинома $(\sqrt{x^{1/(\lg x+1)}} + \sqrt[12]{x})^6$, буде једнак 200.

б) ако је познато да је трећи члан у развоју бинома $(x+x^{\lg x})^5$ једнак 1000 000.

в) ако је шести члан у развоју бинома $(2^{\log_2 \sqrt{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2(3^{x-1}+1)})^7$ једнак 84.

576. Применом биномне формуле израчунати:

а) $(a+bi)^6 + (a-bi)^6$, $a, b \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$;

б) $\cos 6\alpha$ и $\sin 6\alpha$ преко $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

577. Израчунати следеће збирове ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$;

б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

в) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k}$, при чему је $2k = n$ или $2k = n-1$ у зависности од тога да ли је број n паран, односно непаран.

578. Дат је скуп са n елемената.

а) Наћи укупан број свих подскупова овог скупа.

б) Наћи број подскупова са парним бројем елемената.

579. Израчунати суме ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$;

б) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$;

в) $k\binom{n}{0} + (k+1)\binom{n}{1} + \cdots + (k+n)\binom{n}{n}$, $k \in \mathbf{N}$;

580. Израчунати збир ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$;

б) $\binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{n}$.

5.6. ДОДАТАК УЗ ПЕТУ ГЛАВУ

581. У разреду има 30 ученика. При томе одличну оцену из математике има 15 ученика, из историје 13 ученика и из географије 12 ученика, из математике и историје 8, из историје и географије 6, из математике и географије 7 ученика, а из сва три предмета три ученика. Колико ученика има бар једну одличну оцену из наведених предмета?

582. На игранци присуствује 12 девојака и 15 младића. На колико начина је међу њима могуће изабрати четири пара за игру?

583. а) Колико има десетоцифрених бројева од цифара 1,2,3 ако се цифра 3 појављује у сваком тачно два пута?

б) Колико од тих бројева је дељиво са 9?

584. Израчунати збир свих бројева формираних од свих пермутација цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6.

585. Наћи последњу цифру збира 1988. степена свих четвороцифрених бројева са различитим цифрама формираних од цифара 1,9,8,7.

586. Укротитељ изводи у циркуску арену 5 лавова и 4 тигра, при чему не могу два тигра ићи један за другим. На колико начина се животиње могу распоредити?

587. За округлим столом краља Артура седи 12 витезова, од којих је сваки у непријатељству са своја два суседа. Треба изабрати 5 витезова да би се ослободила заробљена принцеза. На колико начина је то могуће, тако да међу изабраним витезовима нема непријатеља?

588. Доказати да је број $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ природан ($n \in \mathbf{N}$).

589. Наћи сва решења једначине $x! + y^2 = 197142$ у скупу природних бројева.

590. Решити једначину $x! + y! = (x+y)!$, $x, y \in \mathbf{N}$.

591. Решити једначину $x! + y! = z!$, $x, y, z \in \mathbf{N}$.

592. Наћи целобројна решења једначине $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

593. Раставити број 100! на просте чиниоце.

594. а) Са колико нула се завршава број 60! ?

б) Да ли постоји природан број n тако да се број $n!$ завршава са 11 нула?

595. Израчунати збир коефицијената полинома $p(x)$ који се добија развојем бинома $(2x-1)^{100}$.

596. Доказати да за све природне бројеве n важи неједнакост $n^n \geq 2^{n-1} \cdot n!$.

597. Доказати да је ($n \in \mathbf{N}$):

а) $2 \cdot 3^{n-1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$;

б) $3^n \leq \binom{2n+1}{n} \leq 2 \cdot 4^n$;

598. Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$. Доказати да је разлика квадрата бројева $\binom{n+1}{n-1}$ и $\binom{n}{n-2}$ потпун куб природног броја.

599. Дат је конвексни петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$ и тачке B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 тако да свака страница петоугла садржи тачно једну од тих тачака. Конструисане су све праве одређене теменима петоугла и тачкама B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ако се зна да се (не рачунајући тачке A_i и B_j, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$) никоје три од тих правих не секу у једној тачки и никоје две нису паралелне, одредити број свих тачака у којима се секу по две од тих правих.

600. Ако је p прост број, доказати да је број $N = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2} - 2$ дељив са p^2.

601. Ако је $R(n)$ број релације еквиваленције, које се могу дефинисати на скупу од n елемената, доказати да је $R(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R(k)$, $R(0) \overset{\text{def}}{=} 1$.

602. Доказати да је у развоју бинома $(1+i)^{4k+2}$, $k \in \mathbf{N}$, збир чланова на непарним местима једнак нули.

603. Одредити број чланова у развоју $(a+b+c+d)^{10}$.

604. а) Доказати "полиномну" формулу:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,\, k_2, \ldots k_m \geq 0}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

б) Применом ове формуле одредити коефицијенте:

1. уз x^{17} и x^{18} у развоју $(1 + x^5 + x^7)^{20}$;
2. уз x^{10} и x^{15} у развоју $(1 - x^2 + x^3)^{20}$.

605. Наћи све природне бројеве n такве да нека три узастопна коефицијента развоја $(a+b)^n$ чине аритметички низ.

606. Доказати да је ($n \in \mathbf{N}$):

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \dfrac{1}{3}(2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3})$;

б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \dfrac{1}{3}(2^n + 2\cos\dfrac{(n-2)\pi}{3})$;

в) $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots = \dfrac{1}{3}(2^n + 2\cos\dfrac{(n+2)\pi}{3})$;

г) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \dfrac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4})$.

607. Израчунати збир

$$S_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} - \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n}{3}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\binom{n}{n}}.$$

Глава VI

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА

6.1. СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈИ

Скуп свих могућих исхода једног експеримента назива се *простор исхода* (простор елементарних догађаја): $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ Сваки подскуп A скупа Ω назива се *случајни догађај*. Догађај Ω назива се *сигурни догађај*, а догађај $\emptyset$ - *немогућ догађај*. Операције у пољу догађаја:

$\overline{A}$ (или$\neg A$) $= \Omega \setminus A$ је догађај комплементаран догађају A.

$A \cup B$ - унија догађаја A и B

$A \cap B$ - пресек догађаја A и B.

Догађаји A и B су дисјунктни ако је $AB = \emptyset$, а ако је $A \subset B$, каже се да догађај A повлачи догађај B.

608. Одредити простор Ω елементарних догађаја у следећим експериментима:

а) бацање једне коцке за игру; б) бацање две коцке за игру;

в) бацање новчића; г) бацање два новчића;

д) бацање новчића и коцке;

ђ) извлачење 3 куглице из кутије која садржи две беле и три црне куглице.

609. У кутији се налазе четири листића обележена бројевима 1, 2, 3, 4. Одредити простор елементарних догађаја, ако се листићи извлаче један по један до појаве непарног броја:

а) без враћања, б) са враћањем.

610. Опит се састоји у бацању коцке све док не падне шестица. Дефинисати простор исхода који одговара овом опиту.

611. Да ли следећи догађаји чине потпун систем догађаја:
а) Баца се новчић: A_1 - појава грба, A_2 - појава писма.
б) Бацају се два новчића: A_1 - појава два грба, A_2 - појава два писма?

612. Експеримент се састоји од гађања у мету са два метка. Да ли се следећи догађаји међусобно искључују или не:

а) A_1 - ниједан погодак, A_2 - један погодак, A_3 - два поготка;

б) A_1 - бар један погодак, A_2 - бар један промашај.

613. Експеримент се састоји у бацању два новчића. Да ли су једнако вероватни следећи догађаји: A_1 - појава два грба; A_2 - појава два писма; A_3 - појава једног грба и једног писма?

614. Баца се коцка за игру. Нека је A догађај: добијени број је дељив са 2, а B догађај: добијени број је дељив са 4. Шта означавају догађаји: $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$ и $\overline{A} \setminus \overline{B}$?

615. Нека су A, B и C случајни догађаји. Доказати да важе једнакости:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;

б) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

д) $(A \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$;

ђ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

е) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6.2. КОНАЧАН ПРОСТОР ВЕРОВАТНОЋА

Нека су исходи $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ у простору $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ једнако вероватни. Вероватноћа догађаја $A \subset \Omega$ је $P(A) = \frac{m}{n}$, где је m број повољних исхода за догађај A, а n број свих могућих исхода.

Својства вероватноће:

1. $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(\Omega) = 1$;
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
5. $A \subset B$ повлачи $P(A) \leq P(B)$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

616. Баца се коцка. Колико је вероватноћа да ће се показати страна са парним бројем тачака?

617. У кутији се налази 10 куглица - 3 црвене и 7 плавих. Колика је вероватноћа да се приликом једног извлачења појави куглица плаве боје?

618. Од бројева 1,2,3,4 одабира се један, а затим од преостала три други. Колико је вероватноћа да ће бити одабрани:

а) два непарна броја; б) два парна броја;

в) два броја различите парности?

619. Бацају се истовремено две коцке. Наћи вероватноћу следећих догађаја:

а) збир добијених поена је 8;

б) производ добијених поена је 8;

в) збир добијених поена је већи од производа добијених поена.

620. Колика је вероватноћа да се при бацању коцке два пута узастопно појави страна са 6 тачака?

621. Доказати да вероватноћа уније два догађаја није већа од збира вероватноћа тих догађаја.

622. Наћи вероватноћу да се у два узастопна бацања двеју коцки добије:

а) оба пута збир 7; б) једанпут збир 6, а једанпут 9;

в) први пут збир 8, а други пут 10.

623. У једној кутији има 18 зелених, 16 плавих и 14 белих куглица. Колика је вероватноћа да ће се у три узастопна извлачења добити: а) два пута зелена, а једанпут плава куглица; б) први пут бела, други и трећи пут плава куглица, ако се извучена куглица не враћа у кутију?

624. Три играча играју преферанс. Сваки од њих је добио 10 карата и две су остале у талону. Један од играча је добио 6 треф-карата и четири које нису треф. Он мења две од тих четири и узима две карте из талона. Наћи вероватноћу да добије две карте трефове боје.

625. У бубњу се налази 37 куглица, на којима су исписани бројеви 1, 2, 3, ..., 37. Две куглице се извлаче једна за другом. Колико је вероватноћа да је број на првој куглици већи од броја на другој?

626. У кутији се налази a-белих, b-црних и c-црвених куглица. Ваде се куглице једна за другом и записује се њихова боја. Наћи вероватноћу да се бела куглица појави пре него црна.

627. У кутији се налази a белих и b црних куглица ($a \geq 2$, $b \geq 3$). Одредити вероватноће догађаја:

а) При истовременом извлачењу две куглице извуку се две беле;

б) при истовременом извлачењу две куглице извуче се једна бела и једна црна;

в) при извлачењу одједном пет куглица две буду беле и 3 црне.

628. У кутији се налази n коцкица обележних бројевима 1, 2, ..., n.

а) Из кутије се ваде једна за другом све коцкице;

б) Из кутије се вади једна коцкица, њен број се запише, затим се она врати и измеша са осталима, па се поступак понови још $n-1$ пут.
Колика је вероватноћа да се у сваком од ових експеримената добије поредак коцкица $1, 2, 3, \ldots, n$?

629. У новчанику се налази 12 новчића - 4 комада по 5 динара, 3 по 10, 2 по 20 и 3 по 50 динара. На случајан начин се извлаче четири новчића. Колика је вероватноћа да ће се извући купно 40 динара?

630. Контролом је утврђено да је 1/3 производа с грешком. Шта је вероватније: да од 12 производа, узимајући 8 производа, међу њима буду 2 с грешком или 3 с грешком?

631. Из кутије у којој се налази m црвених и n плавих куглица извучено је k куглица. Ако су све извучене куглице исте боје, колика је вероватноћа да су све плаве?

632. Колика је вероватноћа да се добије збир 14, ако се баце: а) три коцке; б) једанаест коцки?

633. Из шпила од 52 карте извлаче се истовремено четири карте. Одредити вероватноћу догађаја да се међу извученим картама налази:

а) тачно једна треф-карта; б) бар једна треф-карта;

в) све четири треф-карта; г) ни једна треф-карта.

634. Студент зна 85 од 100 питања. На испиту се извлачи цедуља са 3 питања. Ако су питања независна, наћи вероватноће догађаја да студент извуче цедуљу на којој:

а) зна сва три питања; б) не зна ни једно питање;

в) зна бар два питања.

635. У лифт петоспратне зграде у приземљу су ушла три путника. Сваки од њих излази на произвољном спрату (почевши од првог) са једнаком вероватноћом. Колике су вероватноће следећих догађаја:

а) сви путници излазе на трећем спрату;

б) сви путници ће изаћи истовремено;

в) сви путници ће изаћи на различитим спратовима?

636. Шпил од 52 карте дели се случајно на два дела од по 26 карата. Наћи вероватноће следећих догађаја:

а) у сваком од делова се налазе по две даме;

б) у једном од делова се налазе три даме, а у другом једна;

в) у првом делу нема ни једне даме, а у другом су све четири.

637. Израчунати вероватноћу да се при бацању два метална новчића и на једном и на другом појави грб.

638. а) Коцка се два пута баца. Колика је вероватноћа да у првом бацању падне 1,2 или 3, а у другом 3 или 5?

б) Коцка се баца три пута. Колика је вероватноћа да у првом бацању падне 1,2 или 3, у другом 3 или 5, у трећем 2,4 или 6?

639. Колика је вероватноћа да се при бацању коцке за игру појави:

а) број мањи од 5;

б) број који је дељив са 2 или са 3?

640. Два стрелца истовремено гађају у циљ. Један од њих има 70%, а други 60% погодака. Наћи вероватноћу да бар један од њих погоди у циљ.

641. Из скупа $\{1, 2, 3, \dots, 34\}$ изабрана су на случајан начин три броја. Колика је вероватноћа да је њихов збир паран?

6.3. УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА. НЕЗАВИСНОСТ. ФОРМУЛА ПОТПУНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

Условна вероватноћа

Нека је $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $P(A) \neq \emptyset$. Условна вероватноћа догађаја B при услову A је број

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Независни догађаји

Догађаји A и B су независни ако важи $P(AB) = P(A)P(B)$.

Формула потпуне вероватноће

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ међусобно дисјунктни подскупови скупа Ω такви да је њихова унија једнака скупу Ω и да су њихове вероватноће различите од нуле и нека је $D \subset \Omega$ произвољни догађај. Тада је

$$P(D) = P(A_1)P(D|A_1) + P(A_2)P(D|A_2) + \cdots + P(A_n)P(D|A_n).$$

Бајесова формула

Под условима као и код формуле потпуне вероватноће важи

$$P(A_m|D) = \frac{P(A_m)P(D|A_m)}{P(D)}, \qquad m \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

642. Бачене су две коцке за игру и добијен је збир поена - 10. Колике су вероватноће догађаја: A - пала је бар једна петица; B - пала је бар једна шестица?

643. У кутији се налази 10 куглица - 7 белих и 3 црне. Извлаче се, без враћања, куглице једна за другом. Колика је вероватноћа да: а) друга извучена куглица буде црна; б) друга извучена куглица буде црна, ако је прва, која је извучена, била бела?

644. У одељењу има 20 девојчица и 12 дечака. На сваком часу професор одабира, са једнаком вероватноћом за сваког ученика, три ученика једног за другим (без понављања) и испитује их. Ако су на једном часу прво испитане две девојчице, одредити вероватноћу да ће трећи прозвани ученик бити:

а) дечак; б) девојчица.

645. Коцка за игру баца се два пута. Нека је A догађај да је оба пута пао број већи од три и B догађај да је збир добијених поена непаран. Одредити $P(B|A)$.

646. У кутији се налази 6 плавих и 4 црвене куглице. Случајно се извлаче одједном три куглице. Ако је изабрана бар једна плава куглица, израчунати вероватноћу догађаја да су све извучене куглице плаве боје.

647. Из шпила од 52 карте извлачи се 5 карата. Нека A означава догађај да су бар три извучене карте треф, а B догађај да су свих пет извучених карата трефови. Одредити $P(B|A)$.

648. Коцка за игру баца се три пута. Израчунати вероватноћу да је сва три пута пала шестица, ако је познато да је:

а) бар једном пала шестица;

б) у првом бацању је пала шестица.

649. Ако су A, B и C независни догађаји, доказати да су независни и догађаји:

а) A и $\overline{B}$; б) A и $\overline{B} \cap C$.

650. Нека су A и B случајни догађаји такви да је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Доказати:

а) ако је $P(A) > P(B)$, тада је $P(A|B) > P(B|A)$;

б) $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

651. Нека су A и B независни догађаји. Ако је вероватноћа да ће се догодити бар један од догађаја A, односно B једнака 0.4, а вероватноћа да ће се догодити догађај A је 0.04, колико је вероватноћа да ће се догодити само један од догађаја A, односно B.

652. Артиљерија гађа један од два циља A и B и погађа их са вероватноћом p_1, односно p_2. После плотуна стигла је вест да циљ A није погођен. Колика је сада вероватноћа да је погођен циљ B?

653. Машина ради у нормалном режиму у 80% случајева и у ненормалном режиму у 20% случајева. Вероватноћа да машина откаже за време рада у нормалном режиму је 0.1, а у ненормалном је 0.7. Колика је вероватноћа да ће машина отказати?

654. На столу се налазе три једнаке кутије. У првој кутији се налази a белих и b црних куглица, у другој c белих и d црних, а у трећој су само беле куглице. Из једне од кутија се вади једна куглица. Наћи вероватноћу да она буде бела.

655. На столу су две кутије - у првој се налази a-белих и b-црних коцкица, а у другој c-белих и d-црних коцкица. Из прве кутије пребаци се у другу једна коцкица, па се онда из друге вади једна коцкица. Колико је вероватноћа да она буде бела?

656. Из кутије која садржи 3 беле и 2 црне куглице пребачене су две случајно изабране куглице у кутију која садржи 4 беле и 4 црне куглице. Наћи вероватноћу да се после тога из друге кутије извуче бела куглица.

657. У некој групи ученика има 12 одличних, 15 просечних и 6 слабих. Одличан ученик на предстојећем испиту добија једино одличну оцену, просечни ученик са једнаком вероватноћом добија добру или одличну оцену, слаб ученик са једнаким вероватноћама добија добру, задовољавајућу или слабу оцену. На испиту су случајно прозвана два ученика. Наћи вероватноћу да од њих један добије добру, а други задовољавајућу оцену (три врсте ученика, четири врсте оцена).

658. У једној кутији су 8 белих и 2 црне куглице, а у другој 4 беле и 5 црних. Из прве кутије се случајно и истовремено бирају три куглице и пребацују у другу. Затим се из друге кутије бира једна куглица. Која је вероватноћа да је та куглица бела?

659. На плацу је изложено 100 аутомобила - 75 из једне и 25 из друге фабрике. Познато је да међу производима прве фабрике има 5% оштећених, а за другу фабрику тај проценат је 3. Колика је вероватноћа да случајно изабран аутомобил буде оштећен?

660. На усменом испиту студент извлачи једну од n цедуља, од којих свака садржи два питања. Студент не зна одговоре на свих $2n$ питања, већ само на k, $k < 2n$. Наћи вероватноћу догађаја да ће студент положити испит, ако је за то довољно да одговори на оба питања са своје цедуље, или на једно питање са своје цедуље и на једно питање (по избору професора) са допунске цедуље.

661. На столу су три кутије - у првој се налази a белих и b црних куглица, у другој c белих и d црних куглица, а у трећој су само беле куглице. Из једне од кутија случајно је изабрана једна куглица и показало се да је она бела. Наћи вероватноће да је она извучена из прве, друге, односно треће кутије.

662. Машина се састоји од два дела и ради само ако ради сваки од тих делова. Вероватноћа да први део неће отказати у времену t је p_1, а за други део p_2. Након времена t испоставило се да је машина отказала. Наћи вероватноћу да је отказао само први део, а да је други исправан.

663. Из кутије у којој су биле 4 плаве и 3 црвене лоптице изгубљена је једна лоптица. Да би се утврдило које је боје изгубљена лоптица из кутије се одједном ваде две лоптице. Показало се да су обе извучене лоптице плаве. Наћи вероватноћу да је изгубљена плава лоптица.

664. Узроци дефекта аутомобилске гуме могу бити: ексер, топлота и притисак са вероватноћом, редом, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$ и $\frac{5}{20}$. Вероватноћа дефекта услед ексера је 0.3, услед топлоте 0.2 и услед притиска 0.1. Ако је дефект наступио, наћи вероватноћу да га је проузроковала топлота.

665. Службеник M. одлази на посао аутобусом, трамвајем или тролејбусом са вероватноћама $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$, редом. Ако путује аутобусом стиже на време са вероватноћом $\frac{1}{6}$, трамвајем $\frac{1}{2}$ и тролејбусом $\frac{9}{10}$. Ако је M. закаснио на посао, одредити вероватноћу да је путовао тролејбусом.

666. У једној од две кутије налази се 40 црвених и 10 плавих куглица, а у другој 42 црвене и 8 плавих, али није познато која кутија садржи које куглице. Отворена је једна од тих кутија и из ње извучена једна куглица. Испоставило се да је она црвене боје. Одредити вероватноћу да је отворена кутија са 40 црвених куглица.

6.4. БЕРНУЛИЈЕВА ШЕМА

Нека се у сваком од n независних експеримената догађај A реализује са вероватноћом p. Тада је вероватноћа да се у тих n експеримената A реализује тачно k пута ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) једнака

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

667. Коцка је бачена 6 пута. Колика је вероватноћа догађаја:

а) Неће пасти ни једна шестица; б) пашће тачно једна шестица;

в) пашће бар једна шестица; г) пашће свих шест шестица.

668. Вероватноћа да се у једној породици родио син је 0,5. Ако та породица има десеторо деце, одредити вероватноће догађаја:

а) има тачно пет синова; б) број синова је између 3 и 7.

669. На пријемном испиту кандидати одговарају на 20 питања. За свако питање понуђено је пет одговора од којих је само један тачан. Колика је вероватноћа да ученик који на свако питање случајно бира одговор:

а) тачно одговори на сва питања;

б) не одговори тачно ни на једно питање;

в) тачно одговори на бар пет питања?

670. Кошаркаш изводи слободна бацања на кош. Бацања су независна и вероватноћа поготка у сваком бацању је 0,8. Одредити вероватноће догађаја:

а) два поготка из два бацања; б) два поготка из три бацања;

в) три поготка из три бацања.

З **671.** У Ивановом одељењу има 32 ученика. На сваком часу професор математике на случајан начин бира и испитује три ученика (на једном часу један ученик највише једном одговара). Одредити вероватноћу да ће Иван за 6 часова одговарати бар једном.

З **672.** Кутија садржи укупно n белих и црних куглица. Одредити минималан број белих куглица да вероватноћа да након m извлачења по једне куглице (са враћањем) изађе бар једна бела куглица добије вредност већу од $\frac{1}{2}$.

З **673.** Стрелац гађа у циљ десет пута и у сваком покушају погађа са вероватноћом 2/3. Наћи вероватноћу највероватнијег броја погодака.

674. Стрелац гађа више пута у мету и погађа је у сваком гађању, независно од осталих, са вероватноћом 1/2. Шта је вероватније - да ће у пет гађања имати тачно три поготка или да ће у 8 гађања имати тачно четири поготка?

6.5. ГЕОМЕТРИЈСКЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

> Нека је простор елементарних догађаја скуп Ω који је подскуп праве (односно равни или простора) са коначном дужином (тј. површином или запремином) и догађај A подскуп скупа Ω који има дужину (површину, запремину). Тада је $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, где су $m(A)$ и $m(\Omega)$ дужине (површине, односно запремине) скупова A, односно Ω.

675. Случајно се бира једна тачка на тежишној дужи AA_1 троугла ABC. Ако је T тежиште тог троугла, одредити вероватноћу да изабрана тачка припада:

а) дужи AT; б) дужи TA_1.

676. У квадрат је уписан круг. Одредити вероватноћу да случајно изабрана тачка унутар квадрата припада а) унутрашњости круга; б) кружној линији.

677. Дата су два концентрична круга полупречника 1 и 2. Случајно се бирају тачке у већем кругу. Одредити вероватноћу:
а) да се једна случајно изабрана тачка нађе у кружном прстену;
б) да се од две изабране тачке обе нађу у кружном прстену;
в) да се од 10 изабраних тачака тачно четири налазе у кружном прстену.

678. У унутрашњости елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ случајно се бира једна тачка. Наћи вероватноћу да она припада унутрашњости:
а) круга $x^2+y^2=b^2$; б) квадрата $|x|+|y|=b$.

679. Бројеви a и b случајно се бирају из интервала $[0,1]$. Колика је вероватноћа да једначина $x^2+ax+b^2=0$ има:
а) реалне корене; б) реалне и једнаке корене;
в) корене, који нису реални?

680. У кругу полупречника r бира се на случајан начин једна тачка. Одредити вероватноћу да је тачка ближа кружној линији него центру круга.

681. На случајан начин бира се тачка (x,y) у квадрату $[0,1]\times[0,1]$. Колика је вероватноћа да за координате те тачке важи:
а) $y\le x^2$; б) $x+y<1$ и $x\cdot y>\frac{2}{9}$;
в) $y\le\sin x$ и $y\le\cos x$; г) $1\le y\le \operatorname{tg} x$?

682. На случајан начин бира се тачка у лопти која настаје ротацијом круга $x^2+y^2=16$ око x-осе. Одредити вероватноћу да тачка припада фигури која настаје ротацијом око x-осе површи ограничене линијама а) $y=\sin x, y=0, 0\le x\le\pi$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

6.6. СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Расподела вероватноће случајне величине X дата је табелом:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ p_1 & p_2 & \dots & p_n\end{pmatrix}.$$

Математичко очекивање случајне величине X је број

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n.$$

Дисперзија случајне величине X је број $E(X-E(X))^2$, тј.

$$D(X)=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2p_n.$$

Стандардно одступање случајне величине X је број

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Коефицијент корелације случајних величина X и Y дефинисаних на истом простору исхода је број

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

683. У једној гимназији ученика прве године има 30%, друге 25%, треће 25% и четврте 20%. Ако је случајна променљива X година учења случајно одабраног ученика, одредити закон и функцију расподеле за X.

684. У једном експерименту региструје се појављивање или непојављивање догађаја A; вероватноћа појављивања догађаја A је p. Посматра се случајна променљива X, која је једнака јединици, ако се A реализује и нули ако се не реализује (X је број реализације A у једном експерименту).
а) Одредити закон расподеле те случајне променљиве и нацртати њену функцију расподеле.
б) Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне променљиве X.

685. Два стрелца, независно један од другог, гађају у циљ. Вероватноћа поготка првог је 0,6, а другог 0,7. Посматрају се случајне променљиве: X_1 - број погодака првог, X_2 - број погодака другог и њихова разлика $X = X_1 - X_2$. Наћи закон расподеле случајне променљиве X.

686. Баца се новчић док се два пута узастопно не појави писмо, или док се не изврши пет бацања. Одредити закон и функцију расподеле случајне променљиве X, која представља број изведених бацања.

687. Један стрелац два пута, независно, гађа у мету и у сваком хицу погађа је са вероватноћом p. Наћи закон расподеле за случајну променљиву X, која је једнака разлици броја погодака и броја промашаја у та два хица.

688. Дата је расподела случајне променљиве X, $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$.
Одредити расподеле случајних променљивих:
а) $Y = X + 1$; б) $Z = X^2$.

689. Израчунати математичко очекивање случајних величина:

а) $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$;

б) $X_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$.

690. Случајна променљива X означава збир добијених поена при бацању две коцке. Одредити расподелу и математичко очекивање те случајне променљиве.

691. Нека случајна променљива X означава број добијених поена при бацању коцке. Одредити $E(X)$.

692. Коцка за игру баца се два пута. Нека је X максимум, а Y минимум од добијених поена.

а) Одредити расподеле вероватноћа случајних величина X и Y.

б) Нацртати њихове функције расподеле.

в) Израчунати математичко очекивање величина X и Y.

693. Изводе се три независна експеримента. У сваком од њих догађај A се реализује са вероватноћом 0,4 и посматра се случајна променљива X - број појављивања догађаја A у та три експеримента. Одредити:

а) закон и функцију расподеле;

б) математичко очекивање и дисперзију случајне променљиве X.

694. Стрелац погађа циљ са вероватноћом p $(0 < p < 1)$ у сваком независном гађању. Има четири метка и гађа у циљ све док га не погоди или док не утроши све метке. Наћи очекивани број гађања.

695. Израчунати математичко очекивање и дисперзију следећих случајних променљивих:

а) $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$; б) $X_2 : \begin{pmatrix} 1950 & 1975 & 2000 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$;

696. Истовремено се бацају три коцке. Одредити математичко очекивање и дисперзију добијеног збира.

697. Из кутије у којој се налазе две беле и три црне коцкице, одједном су извађене две коцкице. Наћи математичко очекивање, дисперзију и стандардно одступање броја белих коцкица које се том приликом појављују.

698. Случајна величина X има расподелу: $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Наћи математичко очекивање и дисперзију случајне величине $Y = 2^X$.

699. Дат је закон расподеле случајне променљиве $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$, $x_1 < x_2$. Ако је $E(X) = 1,4$ и $D(X) = 0,24$, одредити x_1 и x_2.

700. У кутији су 3 беле, 2 црне и 2 зелене куглице. На случајан начин се из кутије извлаче две куглице. Нека је X број извучених белих, а Y - црних куглица. Наћи расподеле за (X,Y) и ρ_{XY} ако је извлачење:

а) са враћањем; б) без враћања.

701. Три куглице се на случајан начин размештају у плаву, белу и црну кутију. Ако је X број куглица у плавој кутији, а Y број празних кутија, наћи ρ_{XY}.

702. Машина се састоји од 200 делова који раде незвисно један од другог. Вероватноћа да у извесном временском периоду t откаже један део је за сваки од делова 0,03. Машина стаје ако се поквари више од 10 делова. Колика је вероватноћа да машина не стане за време t? Одредити тачну вредност, а затим приближну по Пуасоновој теореми.

703. Чета се састоји од 100 војника, од којих сваки, независно од осталих, изостаје са вероватноћом 0,05. Чета се сматра комплетном ако је присутно бар 90 војника. Наћи вероватноћу да чета буде комплетна:

а) одредити тачну вредност,

б) израчунати приближно вредност по Пуасоновој теореми.

6.7. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ

Популација је простор исхода неког опита у математичкој статистици.

Случајна величина (обележје) је нумеричка карактеристика X елемената популације, ако се свима придруже једнаке вероватноће.

Узорак обима n је n-торка $(x_1,\ x_2,\ ,\dots,x_n)$ реализованих вредности обележја X.

Узорачка средина обележја X је $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2, + \cdots + x_n)$.

Узорачка дисперзија обележја X је $\overline{S}^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2]$.

Узорачко стандардно одступање обележја X је број $\overline{S}$.

Узорачка једначина линеарне регресије Y на X случајних величина X и Y је једначина

$$y - \overline{y} = \frac{K_{xy}}{S_x^2}(x - \overline{x}),$$

где је $K_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

704. Ради планирања производње фабрика обуће је на случајан начин одабрала групу од 20 људи и код њих регистровала број ципела: 39, 40, 44, 42, 43, 39, 41, 41, 44, 45, 42, 43, 42, 42, 40, 44, 43, 42, 40, 43.

а) Представити узорак табеларно.

б) Нацртати полигон учесталости и кумулативну криву за дати узорак.

705. У фабрици сатова вршена су мерења одступања пречника осовине од стандардне величине на 300 часовника (у микронима):

одступања	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
бр.осовина	35	65	120	70	10

Нацртати хистограм, полигон учестаности, емпиријску функцију расподеле и кумулативну криву за дати узорак.

706. Популацију чине стабла једне шуме, њих 12580. Ради одржавања и коришћења шуме, стабла се класификују по старости:

старост	0 – 5год.	5 – 10год.	10 – 15год.	15 – 20год.	20 – 25год.
бр.стабала	1220	910	5340	3750	1360

Нацртати хистограм, полигон учесталости, емпиријску функцију расподеле и кумулативну криву за дати узорак.

З **707.** У једном одењењу има 30 ученика. Успех из математике на крају школске године приказан је следећом табелом:

оцена k	1	2	3	4	5
бр. учен. f_k	4	7	9	6	4

Израчунати $\overline{x}$, $\overline{S}^2$ и $\overline{S}$, а затим нацртати полигон расподеле.

З **708.** У следећој табели дати су подаци о висинама 12 кошаркаша једне екипе:

180-190	3
190-200	3
200-210	2
210-220	4

Израчунати узорачку средину, дисперзију и стандардно одступање (за све вредности сваког интервала узима се средиште тог интервала).

709. Ради оцењивања просечне висине свих ученица једне гимназије измерена је висина групи од 20 ученица и добијени су следећи подаци:

висина	$153cm$	$154cm$	$157cm$	$169cm$	$170cm$	$171cm$	$173cm$
бр. учен.	2	1	5	9	1	1	1

Наћи просечну висину ученица, дисперзију и стандардно одступање.

710. Измерене су дужине у центиметрима 100 беба рођених у једној болници, у одређеном периоду:

дужина	40 – 43	43 – 46	46 – 49	49 – 52	52 – 55	55 – 38
бр. беба	1	4	20	43	30	2

Израчунати узорачку средину, дисперзију и стандардно одступање (за све вредности сваког интервала узима се средиште интервала).

711. У једном одељењу има 30 ученика. У следећој табели приказан је успех из математике (X) и физике (Y) на крају школске године. Написати једначину линеарне регресије Y на X.

оцена	5	4	3	2	1
x_k	5	7	8	6	4
y_k	8	6	9	4	3

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I – Функције

2. а) $k = 0$; б) $k = 2$; в) $n = -2$; г) $n = 1$.

6. а) Угао из интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ чији је синус $\frac{1}{2}$ једнак је $\frac{\pi}{6}$, па је $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
б) Угао из интервала $[0, \pi]$ чији је косинус $\left(-\frac{1}{2}\right)$ једнак је $\frac{2\pi}{3}$, дакле $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
в) Угао из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ чији је тангенс 1 једнак је $\frac{\pi}{4}$, па је $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$.
г) Угао из интервала $(0, \pi)$ чији је котангенс $(-\sqrt{3})$ једнак је $\frac{5\pi}{6}$, па је $\mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

7. а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{3}$; ђ) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{12}$.

8. а) $\arcsin(\cos(4 + \frac{\pi}{2})) = \arcsin(-\sin 4) = -\arcsin(\sin(\pi - 4)) = -(\pi - 4) = 4 - \pi$, јер је $\frac{\pi}{2} \leq 4 \leq \frac{3\pi}{2}$, па важи $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - 4 \leq \frac{\pi}{2}$; б) $2\pi - 6$; в) $\pi - 3$.

9. а) Како је $\mathrm{tg}\,(2\mathrm{arctg}\, 2) = \dfrac{2\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 2)}{1 - \mathrm{tg}^{\,2}(\mathrm{arctg}\, 2)} = -\dfrac{4}{3}$, то је $\sin(2\mathrm{arctg}\, 2) = \dfrac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \dfrac{4}{5}$, па је $\cos(2\mathrm{arctg}\, 2) = -\dfrac{3}{5}$.
б) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, где је $\alpha = \arcsin\dfrac{2}{3} \in (0, \dfrac{\pi}{2})$; в) $\dfrac{\pi}{4}$.

10. а) $f(2) = \frac{55}{12}$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{12}$; в) $f(a) = a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{a-1}{a+1}$ за $a \neq -1$; г) $f(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + \frac{1}{(a^2 - 1)^2} + \frac{a^2 - 2}{a^2}$, за $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; д) $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + a^2 + \frac{1-a}{1+a}$, за $a \neq 0$, $a \neq -1$; ђ) $f(\sqrt{a}) = a + \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}$, за $a > 0$.

11. а) $f(0) = -\frac{2}{3}$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{7}$; в) $f(x + 2) = \frac{x}{x + 5}$; д) $f(x) + 2 = \frac{3x - 4}{x + 3}$.

12. а) $F^3(x) - 1 = (x^3 + 2)^3 - 1 = x^9 + 6x^6 + 12x^3 + 7$; б) $F(2y) = 8y^3 + 2$; в) $F(a + 3b) = (a + 3b)^3 + 2$; г) $F(x + 10) = (x + 10)^3 + 2 = x^3 + 30x^2 + 300x + 1002$; д) $F(a) + 3F(b) = a^3 + 3b^3 + 8$.

13. $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$, $f(-1) = 5$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{21}{4}$, $f(\pi) = -\pi^2 - 4$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16}$.

15. а) За $x < 0$ имамо једначину $x^2 - 4x + 5 = 2x^2 - x - 5$, чија су решења $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Због услова $x < 0$ решење је само $x_1 = -5$. За $x > 0$ добијамо једначину $7x + 3 = x + 8$, чије је решење $x_3 = \frac{5}{6}$. Дакле, једначина $f(x) = g(x)$ има два решења — то су бројеви -5 и $\frac{5}{6}$.
б) Једначина нема решења.

16. Ни у једном случају функције нису једнаке: а) $f(x) = |x|$, па је $f(x) = g(x)$ за $x \geq 0$ и $f(x) \neq g(x)$ за $x < 0$. б) За $x > 0$ је $f(x) = g(x)$, док за $x < 0$ функција $g(x)$ није дефинисана, а функција $f(x)$ — јесте. в) За $x \neq 0$ је $f(x) = g(x)$, за $x = 0$ $f(x)$ није дефинисано, а $g(x)$ јесте. г) За $x > 0$ је $f(x) = g(x)$, за $x \leq 0$ $f(x)$ није, а $g(x)$ јесте дефинисано.

18. $g(x) = 3f(x)$.

20. а) $(-\infty, +\infty)$; б) $(-\infty, +\infty)$; в) $a > 0$, тј. за $a \in (0, +\infty)$ – дужина странице троугла је ненегативна величина; г) $r > 0$, тј. за $r \in (0, +\infty)$ – дужина полупречника круга је ненегативна величина.

21. а) За $x - 5 = 0$, тј. $x = 5$ добијамо нулу у имениоцу, па је функција дефинисана за $x \in (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$;
б) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; в) $(-\infty, +\infty)$; г) Решења једначине $x^2 - 4 = 0$ су $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, па је финкција дефинисана за $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$; д) $(-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$;
ђ) $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$; е) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; ж) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$;
з) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

22. а) Решења једначине $x^2 - 5x + 4 = 0$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, па се за те вредности x добија нула у имениоцу. Област дефинисаности је $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$;
б) $(-\infty, 1) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty)$; в) $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$; г) $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

23. а) Како је изложилац корена паран број то је дата функција дефинисана за $x - 2 \geq 0$, тј. за $x \geq 2$;
б) $x \geq -\frac{2}{3}$; в) $x \leq 1$; г) $x \in [-1, 1]$; д) $x \geq 0$; ђ) $x \in (-\infty, +\infty)$; е) $[-3, 3]$; ж) $[0, 2]$;
з) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; и) $(-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$; ј) $-1 \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1$; к) $x > 2$; л) $(-1, 2)$.

24. а) $\dfrac{3+x}{3-x} \geq 0$, тј. за $x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$; б) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$; в) $(-\infty, -5] \cup (1, 3)$;
г) $[-4, -3) \cup [1, 2)$.

25. а) Како је изложилац корена непаран број то дефинисаност дате функције зависи само од дефинисаности подкорене величине величине $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$. Полином $\varphi(x)$ је дефинисан за $x \in (-\infty, +\infty)$, па је дата функција дефинисана за $x \in (-\infty, +\infty)$.
б) $x \in (-\infty, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, +\infty)$; г) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, +\infty)$.

26. а) Функција $\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ дефинисана је за $x \in (3, +\infty)$, а $g(x) = \sqrt{x+1}$ за $x \in [-1, +\infty)$, па следи да је дата функција $f(x)$ дефинисана за $x \in (3, +\infty)$.
б) $[0, 4]$; в) $[2, 4]$; г) $[3, 5]$; д) $x \in (-\infty, +\infty)$; ђ) $x \in (-\infty, +\infty)$.

27. а) $x \in (-\infty, +\infty)$; б) $x \in (-\infty, +\infty)$; в) $x \in (2, +\infty)$; г) $[0, 3]$; д) $(-\infty, 4]$; ђ) $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$;

28. а) $x > 0$; б) $x > 0$; в) $x > -5$; г) Функција је дефинисана ако оба сабирка имају смисла, тј. ако је $x - 2 > 0$ и $x + 2 > 0$, односно за $x \in (2, +\infty)$; д) $x^2 - 4 \geq 0$, тј. за $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; ђ) $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$; е) $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$; ж) $x > 2$;

29. а) $x \in (-2, 2)$; б) $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (2, 3)$; в) $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$; г) $x \in \left(\dfrac{5}{3}, 2\right) \cup (2, 3]$;
д) $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$; ђ) $x \in [-1, \frac{1}{2})$; е) $x \in (1, 2)$.

30. а) $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $x \geq 0$; г) Мора бити $1 - \cos x \neq 0$, тј. $x \neq 2k\pi$, где је $k \in \mathbf{Z}$; д) $x > 0$ и $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{N}$; ђ) $x \neq 0$ и $x \neq \dfrac{2}{(1+2k)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; е) Мора бити $x \neq 0$ и $1/x^2 \neq k\pi$, па је област дефинисаности скуп свих реалних бројева, осим $x = 0$ и $x \neq \pm 1/\sqrt{\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$; ж) $x \neq k\pi$ и $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
з) $x \geq \dfrac{1}{\pi}$ или $\dfrac{1}{\pi(2k+1)} \leq x \leq \dfrac{1}{2\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; и) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
ј) Мора бити $\left|\dfrac{2}{1-x}\right| \leq 1$ тј. $x \geq 3$ или $x \leq -1$; к) $-\infty < x < +\infty$; л) $\pi k - \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

31. а) $x \in [-1,1]$; б) Функција је дефинисана ако и само ако је $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} > 0$, тј. $-1 < x < 1$ или $2 < x < +\infty$; в) $x > 4$; г) $x \neq \pm 2$; д) $x > 0$; ђ) Мора бити $0 \leq \arcsin(\log_2 x) \leq \dfrac{\pi}{2}$, односно $0 \leq \log_2 x \leq 1$, тј. $1 \leq x \leq 2$; е) Функција није дефинисана ни за једно x; ж) Мора бити $\sin x - \cos x > 0$ тј. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0$, односно $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$, одакле је $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

32. а) $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$; б) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, а како је $|\sin 2x| \leq 1$, то је $-\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{1}{2}$; в) Из $x = \dfrac{y+1}{2-y}$ се види да је $y \neq 2$ и да се за све $y \neq 2$ може наћи x, коме то y одговара. Дакле $-\infty < y < 2$ или $2 < y < +\infty$; г) Решавањем дате једначине по x налазимо $x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$, одакле се види да мора бити $y^2 - 4 \geq 0$, тј. $y \leq -2$ или $y \geq 2$. За свако овакво y може се одредити x тако да му то y одговара. Дакле, $-\infty < y \leq -2$ или $2 \leq y < +\infty$; д) $0 \leq y \leq 2$; ђ) Из $x = \dfrac{3y+2}{y-1}$ добијамо да је област вредности $-\infty < y < 1$ или $1 < y < +\infty$; е) $\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7} \leq y \leq \dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$; ж) Функција $-x^2+x+2$ има максимум једнак $9/4$, па дата функција има максимум $3/2$, тј. $y \leq 3/2$. С друге стране мора бити $y \geq 0$, дакле, област вредности функције је $0 \leq y \leq \dfrac{3}{2}$; з) Из $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ налазимо $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$; и) Функција $1 - 2\cos x$ има највећу вредност 3 за $\cos x = -1$, па је област вредности функције $-\infty < y \leq \lg 3$. ј) $y = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{2+2\cos^2 2x}{4} = \dfrac{3+\cos 4x}{4}$. Због $-1 \leq \cos 4x \leq 1$, $y \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. к) $y \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$.

33. $f(x) - g(x) = 2$.

34. На интервалу $[-2,6]$ је $0 \leq x^2 \leq 36$ и $-8 \leq x \leq 216$.

35. Функције у примерима г) и д) ограничене су, а у примерима а), б) и в) су неограничене функције на интервалу $(-1,1)$.

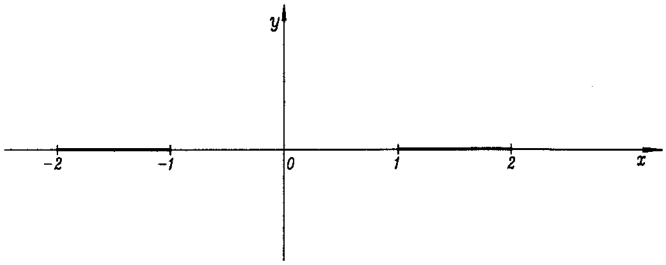
36. а) $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 1$; б) неограничена функција; в) $0 < \dfrac{x^2}{1+x^2} < 1$; г) како је $x^2+6x+10 = (x+3)^2+1 \geq 1$, то је $0 < \dfrac{3}{x^2+6x+10} \leq 3$; д) $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$; ђ) неограничена функција.

37. а) $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$.

38. б) $y(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -y(x)$; г) $y(-x) = \lg\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)} = \lg(1-x) - \lg(1+x) = -[\lg(1+x) - \lg(1-x)] = -\lg\dfrac{1+x}{1-x} = -y(x)$.

39. а) $y(-x) = \sqrt[3]{(-x-1)^2} + \sqrt[3]{(-x+1)^2} = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = y(x)$, па је функција парна; б) $y(-x) = \dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^x+a^{-x}}{2} = y(x)$ — функција је парна; в) Функција је непарна; г) Функција је непарна; д) Функција је парна; ђ) Пошто је $\sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm y$, функција није ни парна ни непарна; е) $y(-x) = \log_2(-x + \sqrt{1+x^2}) = \log_2\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \log_2\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \log_2\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = -\log_2(x+\sqrt{1+x^2}) = -y(x)$, па је функција непарна; ж) За ову функцију важи $y(-x) = y(x)$ за $x \neq 1$, међутим, она није парна јер је $y(-1) = 1$, а $y(1)$ није дефинисано, па област дефинисаности функције није симетрична у односу на координатни почетак.

40. Нека је $f(x)$ и парна и непарна функција. Тада њена област дефинисаности мора бити скуп симетричан у односу на координатни почетак и мора да буде $f(x) = f(-x)$ и $f(x) = -f(-x)$, тј. $f(x) = -f(x)$, дакле у свакој тачки у којој је дефинисана функција $f(x)$ мора бити једнака нули. На пример једна таква функција је приказана на слици.



Сл. уз зад. 40

41. а) Како је $\sin 2\pi x = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin[2\pi(x+1)]$, то је основни период ове функције једнак 1. б) Означимо основни период функције са T. Тада је

$$\begin{gathered}
A\cos\alpha(x+T) + B\sin\alpha(x+T) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x,\\
A\left[\cos\alpha(x+T) - \cos\alpha x\right] + B\left[\sin\alpha(x+T) - \sin\alpha x\right] = 0,\\
-2A\sin\left(\alpha x + \frac{\alpha T}{2}\right)\sin\frac{\alpha T}{2} + 2B\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha T}{2}\right)\sin\frac{\alpha T}{2} = 0,\\
\sin\frac{\alpha T}{2}\left[B\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha T}{2}\right) - A\sin\left(\alpha x + \frac{\alpha T}{2}\right)\right] = 0,
\end{gathered}$$

Како израз у средњој загради није једнак нули за све x, то мора бити $\sin\dfrac{\alpha T}{2} = 0$, одакле $\dfrac{\alpha T}{2} = \pi$ односно $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$.

в) Период је $\dfrac{2\pi}{a}$.

г) Из $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$ и чињенице да је период функције $y = \sin 2x$ једнак π следи да је и период функције $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ једнак π.

д) Период је једнак π, јер је $y = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

ђ) Претпоставимо да је T период функције. Тада за све x важи $\sin^4(x+T) = \sin^4 x$, тј.

$$[\sin^2(x+T) + \sin^2 x][\sin^2(x+T) - \sin^2 x] = 0.$$

Како израз у првој загради није идентички једнак нули, мора бити

$$\begin{aligned}
\sin^2(x+T) - \sin^2 x &= 0, && \text{тј.}\\
\frac{1-\cos(2x+2T)}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} &= 0, && \text{тј.}\\
\cos 2x - \cos(2x+2T) &= 0, && \text{односно}\\
2\sin(2x+T)\sin T &= 0, && \text{и}
\end{aligned}$$

пошто $\sin(2x+T)$ није једнако нула за све x, то мора бити $\sin T = 0$, одакле је $T = \pi$.

е) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Период је $T = \dfrac{\pi}{2}$.

ж) $|\cos x| = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$. Период је $T = \pi$. з) $T = 2\pi$. и) $T = 1$. ј) $T = 12\pi$.

42. Биће

$$f(x+2C) = \frac{1 - f(x+C)}{1 + f(x+C)} = \frac{1 - \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1 + \dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}} = f(x),$$

па је $f(x)$ периодична функција са периодом $T = 2C$.

43. Биће $f(x+2a) = -\dfrac{1}{f(x)}$ и $f(x+4a) = f(x)$, па је $f(x)$ периодична функција са периодом $T = 4a$.

44. а) Област дефинисаности функције $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ је скуп $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Нека је $T > 0$ произвољан број. Тада је $-T \in A$, па би у случају периодичности са периодом T морало да важи и $0 = (-T) + T \in A$, што није тачно, дакле, функција није периодична.

б) Претпоставимо да је функција периодична са периодом T. Лако је видети да за сваки број $T \neq 0$ постоји (без једне) вредност $x \in \mathbf{R}$ таква да је $f(x+T) = f(x)$. Можемо узети, на пример $x = 0$. Тада је $f(x) = f(0) = 0$, $f(x+T) = f(T) = T^2 > 0$, па је $f(x+T) \neq f(x)$ и функција није периодична.

45. а) $y = \dfrac{(x+7)(x-3)}{(x+4)(x-1)}$. За $x < -7$, $-4 < x < 1$, $x > 3$ функција је позитивна, а за $-7 < x < -4$, $1 < x < 3$ функција је негативна. Нуле функције су $x_1 = -7$ и $x_2 = 3$.

б) $y > 0$ за $x > 0$, $y < 0$ за $x < 0$, $y = 0$ за $x = 0$.

в) $y < 0$ за $-1 < x < 0 \lor x > 1$, $y > 0$ за $x < -1 \lor 0 < x < 1$, $y = 0$ за $x = 0$.

г) $y > 0$ за $x < 1 \lor x > 3$, $y < 0$ за $1 < x < 3$, $y = 0$ за $x = 1$ или $x = 3$.

д) Функција је позитивна у свим тачкама у којима је дефинисана.

ђ) $y > 0$ за $\dfrac{1}{e} < x < e$, $y < 0$ за $0 < x < \dfrac{1}{e} \lor x > e$, $y = 0$ за $x = e$.

е) $y > 0$ за $x > -1$, $x \neq 2$, $y < 0$ за $x < -1$, $y = 0$ за $x = -1$ или $x = 2$.

ж) $y > 0$ за $x \neq 0$, $y = 0$ за $x = 0$.

з) $y > 0$ за $|x| > 1$, $y < 0$ за $|x| < 1$, $y = 0$ за $x = 0$.

и) $y > 0$ за $x < -3$, или $0 \leq x < \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$, $y < 0$ за $x > \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

ј) $y > 0$ за $x \geq 1$, $y < 0$ за $x < 0$, $y = 0$ за $0 \leq x < 1$.

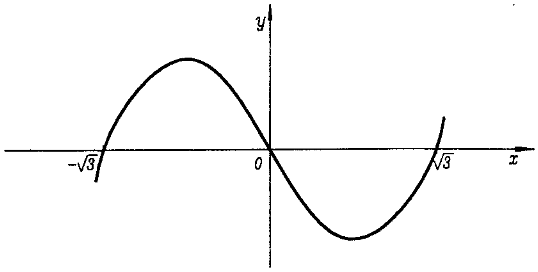
к) $y > 0$ за $x < 2$ или $x > 3$; $y < 0$ за $x \in (2,3)$; $y = 0$ за $x = 2$ или $x = 3$.

46. Посматрајмо разлику $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{2x_1}{1+x_1^2} - \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} = \dfrac{2(x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_1^2x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \dfrac{2(x_2-x_1)(x_1x_1-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$. Види се, да ако је $x_1 < x_2$, знак разлике $f(x_1) - f(x_2)$ се поклапа са знаком израза $x_1x_2 - 1$. Ако је $0 < x_1 < x_2 < 1$, тада је $x_1x_2 < 1$, $x_1x_2 - 1 < 0$ и зато је $f(x_1) - f(x_2) < 0$, тј. $f(x_1) < f(x_2)$, па функција строго расте. Ако је, пак, $1 < x_1 < x_2$, онда је $x_1x_2 > 1$, па је $f(x_1) > f(x_2)$ и функција је тада строго опадајућа.

47. Нуле функције су $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Функција је позитивна за $-\sqrt{3} < x < 0$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$, а негативна за $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $0 < x < \sqrt{3}$. График функције скициран је на слици.

48. а) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$. У интервалу $0 < x \leq \dfrac{\pi}{4}$ аргумент $2x$ расте од 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, именилац $\sin 2x$ расте од 0 до 1, а y строго опада од $+\infty$ до 2. Аналогним расуђивањем налазимо да у интервалу $\dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ y строго расте од 2 до $+\infty$.

б) Нека је $-1 < x_1 < x_2 < 0$. Тада је $y(x_2) - y(x_1) = (x_2^2-1)^2 - (x_1^2-1)^2 = (x_2^2+x_1^2-2)(x_2^2-x_1^2) = (x_2^2+x_1^2-2)(x_2-x_1)(x_2+x_1)$, па, како је $x_1^2 + x_2^2 - 2 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + x_1 < 0$, то је $y(x_2) - y(x_1) < 0$ и у интервалу $(-1, 0)$ функција је строго растућа. На исти начин се показује да је функција у интервалу $(0,1)$ строго опадајућа.



Сл. уз зад. 47

в) Нека је $x_2 > x_1$. Тада је $y(x_2) - y(x_1) = (x_2^3 + 2x_2 + 1) - (x_1^3 + 2x_1 + 1)$ $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 2) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + 2 + \frac{3}{4}x_2^2\right] > 0$. На тај начин добијамо да је функција строго растућа за све $x \in \mathbf{R}$.

г) Означимо са $y_1 = (x^2-1)^3 + 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 = x^2(x^4 - 3x^2 + 3) = x^2\left[(x^2 - 1,5)^2 + \frac{3}{4}\right]$. Очигледно је да је $y_1 \geq 0$ и за $x = 0$ та функција има минимум једнак нули. Према томе, дата функција y има минимум $3^0 = 1$ и строго расте у интервалу $(0, +\infty)$, а строго опада у интервалу $(-\infty, 0)$.

д) $y(x_1) - y(x_2) = \dfrac{3x_1 - 1}{3 - x_1} - \dfrac{3x_2 - 1}{3 - x_2} = \dfrac{8(x_1 - x_2)}{(3 - x_1)(3 - x_2)}$. Функција је прекидна за $x = 3$, а расте за $x < 3$ и за $x > 3$, јер је за $x_1 > x_2$ (ако је $x_1, x_2 > 3$ или $x_1, x_2 < 3$) испуњено $y(x_1) > y(x_2)$.

ђ) Функција је опадајућа за $x < 1$ и за $x > 1$.

49. а) Како је $\sin x - \cos^2 x + 1 = \sin^2 x + \sin x - 2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, то функција достиже свој минимум за $\sin x + \frac{1}{2} = 0$, тј. $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) За $x \leq -2$, $y = 2x^2 - 2x - 8$. У овом интервалу функција строго опада и најмању вредност има у десном крају интервала за $x = -2$, $y = 4$. За $-2 \leq x \leq -1$ је $y = 4$. За $-1 \leq x \leq 1$ је $y = -2x^2 + 2x + 8$ и у овом интервалу најмања вредност је у левом крају — за $x = -1$, $y = 4$. За $1 \leq x \leq 2$, $y = 2x + 6$ — најмања вредност је за $x = 1$ и то $y = 4$. За $x \geq 2$, $y = 2x^2 + 2x - 2$ и најмања вредност ове фунције је у левом крају интервала, за $x = 2$ је $y = 10$. Закључујемо да је најмања вредност функције $y = 4$, за $-2 \leq x \leq 1$.

в) За $b \leq x \leq c$ је $y = d + c - b - a$.

г) Како је $\dfrac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \dfrac{2}{x+1} = -2 + \left(x + 1 + \dfrac{2}{x+1}\right) \geq -2 + 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{2}{x+1}} = -2 + 2\sqrt{2}$, имамо да је $\dfrac{x^2+1}{x+1} \geq -2 + 2\sqrt{2}$, а једнакост важи ако и само ако је $1 + x = \dfrac{2}{x+1}$, тј. за $x_0 = \sqrt{2} - 1$ $(x \geq 0)$.

50. а) $y = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2}\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Да би функције достигле своју највећу вредност, мора бити $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$, одакле је $y_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}$, за $x = \dfrac{\pi k}{2} + \dfrac{7\pi}{24}$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $y = \sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \dfrac{1}{4}\sin 4x$, па је максимална вредност функције $\dfrac{1}{4}$.

в) $y = \log_2^2 x(6 - \log_2 x)^2$. Ако уведемо смену $\log_2 x = z$, $0 \leq z \leq 6$, тада функција $y = z^2(6-z)^2$ има највећу вредност за $z = 3$ и тада је највећа вредност функције $y_{\max} = 81$.

г) Како је $\dfrac{ax^2+b}{2} \le \sqrt{ax^2b} = x\sqrt{ab}$, биће за све $x>0$: $y = \dfrac{x}{ax^2+b} \le \dfrac{x}{2x\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. Највећа вредност се достиже за $x_0 = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (Очигледно је да је довољно разматрати само случај кад је $x>0$).

51. а) 1° $x \in \mathbf{R}$; 2° $f(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$, па је $|f(x)| \le 2$; 3° $T = \pi$; 4° $x = \dfrac{5\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; 5° није ни парна ни непарна.

б) 1° $x \in \mathbf{R}$; 2° $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$, па је $|f(x)| \le 2\sqrt{3}$; 3° $T = 2\pi$; 4° $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 5° није ни парна ни непарна.

в) 1° $x \ne k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2° $f(x) \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; 3° $T = \pi$; 4° нема нула; 5° непарна функција.

52. а) $y = (t^3+1)^2$. б) Сложена функција није нигде дефинисана јер је $x = t^2 + 4 \ge 4$, а функција $y = \sqrt{1-x}$ је дефинисана само за $x \le 1$. в) Сложена функција није нигде дефинисана. г) $y = \dfrac{1}{t^2+5}$.

53. а) $f(f(x)) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$, $f(f(f(x))) = 4(2x-1) = 8x - 7$; б) x, $\dfrac{1}{2x}$; в) $\dfrac{x+1}{x+2}$, $\dfrac{x+2}{2x+3}$; г) $\dfrac{3}{1-x}$, $x+2$.

54. $(f\circ(g\circ h))(x) = ((f\circ g)\circ h)(x) = -8x + 19$.

56. а) Имамо да је за $x \ge 0$: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2) = 0$, јер је $-x^2 \le 0$. За $x < 0$ је $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$, па је $f\circ g$ константна нула-функција. На сличан начин налазимо и вредности осталих функција:

$$(f\circ f)(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ x, & x \ge 0, \end{cases} \qquad (f\circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ -x^2, & x \ge 0, \end{cases} \qquad (g\circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases}$$

б)

$$(f\circ f)(x) = 0, \qquad (g\circ f)(x) = 0,$$

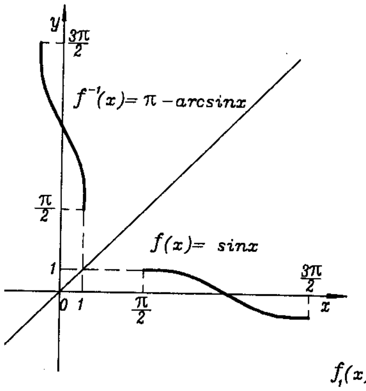
$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \qquad (g\circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

57. а) Нека је $x + 1 = z$, тада је $x = z - 1$, тј. $f(z) = 3(z-1)^2 + 2(z-1) + 5 = 3z^2 - 4z + 6$, односно $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$; б) $f(x) = 2 - x$; в) $f(x) = x^2 + x + 1$; г) $f(x) = x^2 - x + 1$; д) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$; ђ) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$. е) Нека је $\dfrac{3x-1}{x} = t$, одакле је $x = \dfrac{1}{3-t}$, $t \ne 3$, па је $f(t) = \dfrac{2}{3-t}$, тј. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$, за $x \ne 3$. ж) Нека је $\dfrac{3x-1}{x+3} = t$, тада је $x = \dfrac{3t+1}{3-t}$ $(t \ne 3)$. Преласком на нову променљиву t, добијамо $f(t) = \dfrac{3t+1}{3-t} - 3 = \dfrac{6t-8}{3-t}$ и коначно $f(x) = \dfrac{6x-8}{3-x}$, $x \ne 3$. з) За $x + \dfrac{1}{x} = z$, имамо $z^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$, тј. $f(z) = z^2 - 2$, односно $f(x) = x^2 - 2$. и) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{(1-x)^2}$, $x \ne 1$. ј) $f(x) = 4/\sqrt{x}$, $x > 0$.

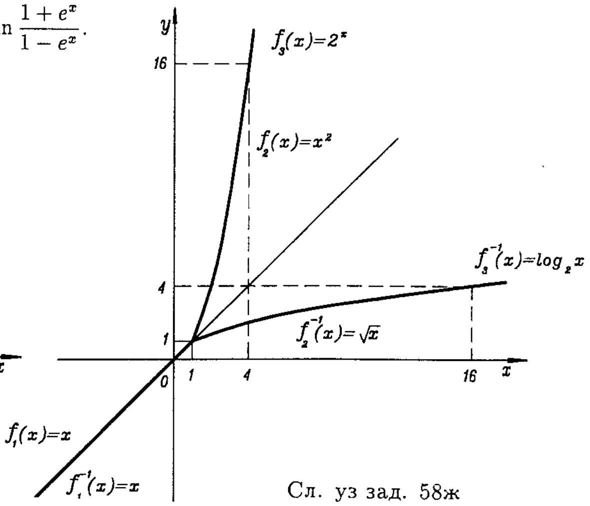
58. а) Функција је $1-1$ и НА, па инверзна функција постоји. Како је $f(f^{-1}(y)) = y$, то је $\left(f^{-1}(y)\right)^3 = y$, тј. $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, па је $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; б) $f(f^{-1}(y)) = y$, тј. $1 + \dfrac{1}{f^{-1}(y)} = y$, одакле је $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y-1}$, дакле $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \ne 1$; в) $f^{-1}(x) = -\log_2 x$; $x > 0$; г) $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$, $x > 0$; д) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$; ђ) $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$0 \le x \le 1$; е) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \le x \le 16, \\ \log_2 x, & x > 16; \end{cases}$ ж) $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$; з) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{1-2^x}$;

и) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$; ј) $f^{-1}(x) = \ln \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.



Сл. уз зад. 58е



Сл. уз зад. 58ж

59. $f^{-1}(x) = x\sqrt{x}$, $f^{-1}(4) + f^{-1}(16) = 72$.

60. а) Да, $y = \dfrac{b-dx}{cx-a}$; б), в) Не, ове функције нису бијективне.

62. Инверзне функције су: а) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; б) $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

63. а) Функција $f(x) = x^2 - 3x + 2$ дефинисана је за $x = 4$ и има граничну вредност кад $x \to 4$, тј. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4^2 - 3\cdot 4 + 2 = 6$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6x+5}{4x-2} = \dfrac{6\cdot(-3)+5}{4\cdot(-3)-2} = \dfrac{13}{4}$; в) $\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{1}{2}$; д) $\dfrac{1}{2}$; ђ) $\dfrac{3}{4}$.

64. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) 4; ђ) 0; е) 1; ж) 1; з) $\sqrt{3}$.

65. а) $-\infty$; б) $+\infty$; в) $+\infty$; г) $-\infty$; д) $+\infty$; ђ) $+\infty$; е) $+\infty$;

66. а) Функција за $x = 1$ није дефинисана јер је $f(1)$ облика „$\frac{0}{0}$“. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x+2} = -\dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{7}{11}$; в) $\dfrac{1}{4}$; г) 0; д) $-\dfrac{2}{5}$; ђ) 0; е) $-\dfrac{3}{2}$; ж) 3; з) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+3x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+1}{x+3} = \dfrac{5}{4}$;

и) $\dfrac{8}{11}$; ј) 8; к) -4; л) $-\dfrac{3}{4}$.

67. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$; в) $\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1) = 3$;

д) $\frac{3}{2}$; ђ) 6; е) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; ж) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; ј) $\frac{2}{3}$; к) 0; л) $\frac{2}{3}$; љ) $-\frac{3}{2}$; м) $\frac{1}{24}$; н) $\frac{1}{12}$;

њ) Ако уведемо смену $23+x=z^3$, тада је $x=z^3-23$ и $z=\sqrt[3]{23+x}$, па када $x\to 4$, тада $z\to 3$. Добијамо $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt[3]{23+x}-3}=\lim\limits_{z\to 3}\frac{z^3-27}{z-3}=\lim\limits_{z\to 3}(z^2+3z+9)=27$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$

п) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}=\lim\limits_{x\to -8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=$

$-\lim\limits_{x\to -8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2$;

р) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}(x+\sqrt{ax}+a)=3a$;

с) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x-1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\cdots+1}}{\dfrac{x-1}{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\cdots+1}}=\frac{m}{n}$;

т) $-\frac{1}{4}$.

68. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=0$;

Напомена. При одређивању граничних вредности облика „$\frac{\infty}{\infty}$“ довољно је уочити и у бројиоцу и у имениоцу чланове са највећим степеном (најстарији члан), јер остали не утичу на граничну вредност. На пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

г) -2; д) $1\frac{1}{2}$; ђ) *Упутство:* Најстарији члан у бројиоцу је x^4, а у имениоцу $(2x)^4$, па је гранична вредност једнака $\frac{1}{16}$. е) 1; ж) 1; з) 0; и) 2.

69. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$;

д) $-\infty$;

ђ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1})}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=\frac{2}{2}=1;$$

е) $\frac{a+b}{2}$; ж) 0; з) 2;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

70. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3=3$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=$ 1; д) $\lim\limits_{x\to0}5\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}=5$; ђ) $\frac{7}{3}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}$;

ж) 3; з) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$; и) 0;

ј) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$; к) $\frac{1}{4}$; л) 2; љ) 0; м) 2.

71. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\cos 3x=2$; б) 1; в) 1; г) -3; д) $\sqrt{2}$; ђ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 9x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{9x+3x}{2}\sin\frac{9x-3x}{2}}{x^2}=-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=-36$;

е) $-\frac{1}{15}$; ж) $\frac{1}{3}$;

з) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\cdot\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{1}{12}\lim\limits_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=$ $\frac{1}{12}$ (смена $x-2=z$, тј. $x=z+2$; тада, ако $x\to2$, онда $z\to0$).

и) $\frac{1}{2}$; ј) $\frac{13}{2}$.

72. а) Нека је $x-\frac{\pi}{3}=z$. Тада је $x=z+\frac{\pi}{3}$ и, ако $x\to\frac{\pi}{3}$, онда $z\to0$, па имамо

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{1-2\cos\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{1-\cos z+\sqrt{3}\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{z}{2}}=$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(b-a)x}{2}}{x^2}=2\frac{b^2-a^2}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}}=\frac{b^2-a^2}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin a\sin x}{x}=-2\sin a$;

д) Уведимо смену, $x-2=z$, тј. $x=z+2$. Тада, ако $x\to 2$, онда $z\to 0$, па имамо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{\cos\frac{\pi}{4}(z+2)}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi}{4}z}=-\frac{4}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}z}{\sin\frac{\pi}{4}z}\cdot\lim_{z\to 0}(z+4)=-\frac{16}{\pi};$$ ђ) $\dfrac{\pi}{2}$;

е) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{x^2-\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{\cos 2\alpha-\cos 2x}{2}}{x^2-\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)}{(x+\alpha)(x-\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha};$$

ж) Нека је $\arcsin x=\alpha$, тада је $x=\sin\alpha$ и, ако $x\to 0$, тада и $\alpha\to 0$, па је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\right)=\dfrac{2}{3}$; з) 1.

73. а) e^{-1};

б) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$. Уводимо смену $\dfrac{1}{t}=z$, тј. $t=\dfrac{1}{z}$. Ако $t\to 0$, онда $z\to\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 5z}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}\right)^{\frac{10}{3}}=e^{\frac{10}{3}}$ (смена $5x=\dfrac{1}{z}$, тј. $x=\dfrac{1}{5z}$; ако $x\to 0$, онда $z\to\infty$);

г) e^4; д) $e^{\frac{6}{5}}$; ђ) $\dfrac{ab}{c}$; е) e;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{2}{3}z}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}\right)^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$ (смена $3x=z$, тј. $x=\dfrac{z}{3}$; ако $x\to\infty$, онда и $z\to\infty$);

з) e^6; и) $e^{\frac{4}{5}}$; ј) e; к) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^3}}=1$;

74. а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+4}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{x}=$$
$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z+\frac{1}{2}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{2z}\cdot\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}=e^2;$$

б) e^{-1}; в) e^8; г) e^4; д) e^{-1};

ђ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(x-2)/3}\right)^{2x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x-2}\cdot(2x+1)}=e^6$;

е) $e^{-2/3}$; ж) e^2;

з) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+2}{x^2-x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x+2}{x^2-x-1}\right)^{\frac{x^2-x-1}{2x+2}}\right]^{\frac{2x+2}{x^2-x-1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+2)x}{x^2-x-1}}=e^2;$$

и) $e^{3/2}$; ј) 0; к) $e^{2/3}$. л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x/k}\right]^{\frac{k}{x}\cdot mx}=e^{mk}$;

75. а) $e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\operatorname{ctg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}=e$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}e^{\sin\pi x\cdot\operatorname{ctg}\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}}=e^0=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}=e^{\frac{1}{2}}$;

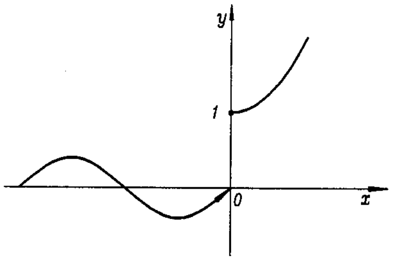
д) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; ђ) $e^{-\frac{1}{2}}$; е) e^{-1}; ж) e;

з) Уведимо смену $\operatorname{arctg} x = t$, $\lim\limits_{x\to+\infty} t = \frac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{tg} t$. Тада је $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{2}{\pi}\cdot t\right)^{\sqrt{\operatorname{tg} t}} =$
$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}t-1\right)^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}t-1}}\right]^{\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\operatorname{tg} t} = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-} e^{\frac{2t-\pi}{\pi}\sqrt{\operatorname{tg} t}} = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-} e^{\frac{2t-\pi}{\pi\sqrt{\cos t}}} = e^{\lim\limits_{z\to0-}\frac{2z}{\pi\sqrt{-\sin z}}} =$
$e^{\lim\limits_{z\to0-}-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{-z^2}{\sin z}}} = 1$, где је $z = t-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-} z = 0-$, $z = -\sqrt{z^2}$ због $z<0$.

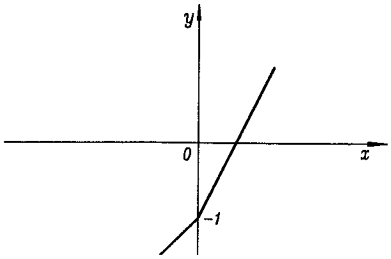
76. а) Логаритмовањем $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ за основу a добија се $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$, односно $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$. стављајући да је $a=e$, добија се $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
б) $\frac{1}{\ln a}$; в) уведимо смену $e^x-1=t$; тада је $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1$, према резултату а);

г) $\ln a$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}\cdot k = k$; ђ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{x+a}{a}}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+a}{a} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = a$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x} = 1$; и) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = e$;
ј) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}\cdot\frac{a}{a}-\frac{e^{bx}-1}{x}\cdot\frac{b}{b}\right) = a-b$;
л) Уведимо смену $(1+x)^a-1=y$. Тада $y\to0$ $(x\to0)$. Логаритмујући добијамо $a\ln(1+x) = \ln(1+y)$. Одатле је $\frac{(1+x)^a-1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)}\cdot a\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$. Према резултату а) оба израза $\frac{y}{\ln(1+y)}$ и $\frac{\ln(1+x)}{x}$ теже јединици, па је $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$;
м) 1; н) 1.

77. а) e; б) $\lim\limits_{x\to0} e^{\ln x^{\frac{3}{2+\ln x}}} = e^3$.



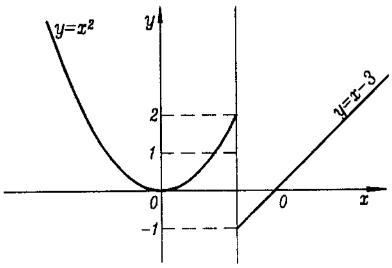
Сл. уз зад. 78а



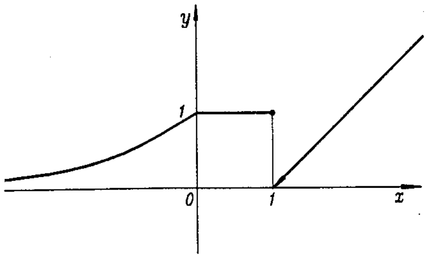
Сл. уз зад. 78б

78. а) $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, функција има прекид у тачки $x_0 = 0$ (видети слику);
б) $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = \lim\limits_{x\to0+} f(x) = f(0) = -1$, функција је непрекидна у нули (видети слику);
в) $\lim\limits_{x\to2-0} x^2 = 2^2 = 4$, $\lim\limits_{x\to2+0}(x-3) = -1$, функција има прекид у тачки $x_0 = 2$ (видети слику);
г) $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = \lim\limits_{x\to0+} f(x) = f(0) = 0$, функција је непрекидна у нули;
д) $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, функција има прекид у нули;
ђ) $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, функција има прекид у нули;

е) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, функција има прекид у нули.



Сл. уз зад. 78в



Сл. уз зад. 79

79. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$. Дата функција је непрекидна у свим тачкама, осим у тачки $x_2 = 1$ (видети слику).

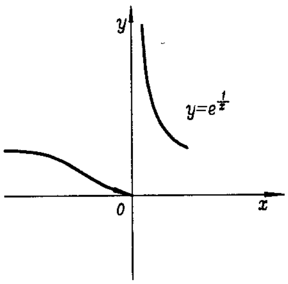
80. а) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$; б) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$; в) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$; г) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$; д) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$; ђ) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 3$.

81. а) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 3$. Ако је $a = 3$ – функција је непрекидна. б) $a = 3$; в) $a = 0$.

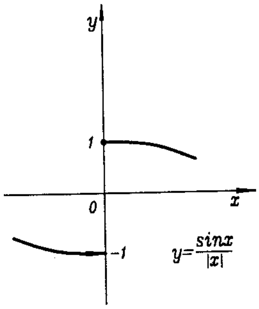
82. Функција је непрекидна за све x, јер су све функције 0, x, $-x^2+4x-2$ и $4-x$ непрекидне и $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = f(3) = \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = 1$.

83. а) $a = 1$; б) $a = -1$, $b = 1$.

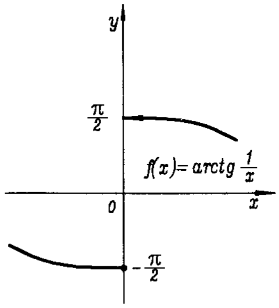
84. Функција $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ је прекидна у нули, а функција $f^2(x) = 1$ је непрекидна у свакој тачки.



Сл. уз зад. 85а



Сл. уз зад. 85в



Сл. уз зад. 85ђ

85. а) Функција има прекид, јер је: $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 1$, па је функција непрекидна; в) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{|x|} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin x}{|x|} = -1$ — функција је непрекидна здесна али је прекидна у нули; г) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = 0$, па је функција непрекидна у нули; д) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{2x}$ не постоји, па је функција прекидна у нули; ђ) $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$. Дакле, функција је прекидна у нули, али је непрекидна слева.

86. а) Како је $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=-\frac{\pi}{2}$, то је функција прекидна у тачкама -1 и 1. У свим осталим тачкама је непрекидна.
б) Функција је дефинисана и непрекидна за $x>1$, осим у тачки $e+1$, јер је $\lim\limits_{x\to e+1+}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to e+1-}f(x)=-\infty$.
в) Функција је дефинисана за $x\geq -7$. У тачки -2 функција је прекидна, јер је $\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -2+}f(x)=+\infty$. У тачки 2 имамо

$$\lim_{x\to 2}e^{\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{7+x}-3}{\sqrt{7+x}+3}}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)}}=e^{1/24},$$

па се функција може додефинисати у тачки 2 тако да буде непрекидна — треба узети $f(2)=e^{1/24}$. У осталим тачкама, у којима је дефинисана, функција је непрекидна.
г) Функција је непрекидна за $x\neq 2$, а прекидна у тачки 2, јер је $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=e$.
д) $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-\frac{\pi}{2}$, па је функција прекидна за $x=1$. У осталим тачкама функција је непрекидна.
ђ) $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\pi$, $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=-\pi$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0$. У осталим тачкама функција је непрекидна.
е) $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=-\pi$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\pi$. У осталим тачкама функција је непрекидна.

87. а) Како је за свако $x\in\mathbf{R}$ испуњено $f(x)-f(x_0)=c-c=0$, то се за дато $\varepsilon>0$ може изабрати произвољно $\delta>0$, па ће за свако x са особином $|x-x_0|<\delta$ бити $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$.
б) За дато $\varepsilon>0$ довољно је изабрати $\delta=\varepsilon$, па ће за све $x\in\mathbf{R}$ за које је $|x-x_0|<\delta$ бити и $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$.
в) За дато $\varepsilon>0$ изаберимо $\delta=\varepsilon$. Нека сада $x\in\mathbf{R}$ припада δ-околини тачке x_0, тј. нека је $|x-x_0|<\delta$. Тада важи

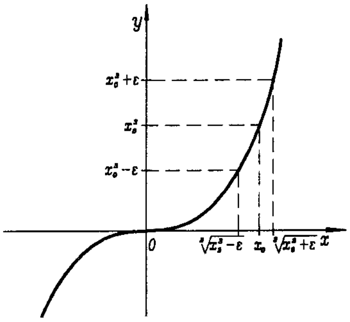
$$|f(x)-f(x_0)|=|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Ако искористимо познату неједнакост $|\sin t|\leq|t|$, која важи за свако $t\in\mathbf{R}$, добијамо $|f(x)-f(x_0)|\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.
г) Нека је $\varepsilon>0$. Посматрајмо бројеве $x_0-\sqrt[3]{x_0^3-\varepsilon}$ и $\sqrt[3]{x_0^3+\varepsilon}-x_0$. Ако узмемо произвољан реалан број x за који је $|x-x_0|<\delta$, где је $\delta=\min\{\sqrt[3]{x_0^3+\varepsilon}-x_0,x_0-\sqrt[3]{x_0^3-\varepsilon}\}$ тада ће тај број x припадати интервалу $\left(\sqrt[3]{x_0^3-\varepsilon},\sqrt[3]{x_0^3+\varepsilon}\right)$ па ће вредност функције $f(x)=x^3$ (видети слику) припадати интервалу $(x_0^3-\varepsilon,x_0^3+\varepsilon)$, тј. важиће $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

88. а) $\delta<\sqrt{4+\varepsilon}-2$ ($\delta=0.00025$); б) $\delta<2-\sqrt{3}$; в) $\delta=\frac{\pi}{2}-\arcsin 0.99\approx 0.136$.

89. а) $M\geq\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$, за $\varepsilon\leq 1$; $M=0$, за $\varepsilon>1$. б) $M\geq\sqrt{\frac{4}{\varepsilon}-3}$, ако је $\varepsilon\leq\frac{4}{3}$; $M=0$ за $\varepsilon>\frac{4}{3}$.

90. а) Нека је $\varepsilon>0$. Тада је $|x^2-4|=|(x-2)^2+4(x-2)|\leq|x-2|^2+4|x-2|\leq\varepsilon$, за $0<|x-2|<\sqrt{4+\varepsilon}-2=\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}$. Последња неједнакост важи тим пре, ако



Сл. уз зад. 87г

је $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \dfrac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \delta > |x-2|$. За $\varepsilon = \dfrac{1}{10^n}$, биће $\delta\left(\dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{1}{4\cdot 10^n+2}$ и $\delta(10^{-1}) = \dfrac{1}{42}$, $\delta(10^{-2}) = \dfrac{1}{402}$, $\delta(10^{-3}) = \dfrac{1}{4002}$ и $\delta(10^{-4}) = \dfrac{1}{40002}$.

б) Нека је $M > 0$. Тада је $\dfrac{1}{(x-1)^2} > M$ за $(x-1)^2 < \dfrac{1}{M}$, или $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$. Одавде налазимо $\delta(10) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\delta(100) = \dfrac{1}{10}$, $\delta(1000) = \dfrac{1}{10\sqrt{10}}$, $\delta(10000) = \dfrac{1}{100}$, ...

91. а) Како је $x^2-4x+5 > 0$, функција је свуда дефинисана и нема вертикалних асимптота. Пошто је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$, то је $y = 0$ хоризонтална асимптота.

б) Вертикална асимптота је права $x = 0$. Пошто је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = 2$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-2x) = 1$, то је права $y = 2x+1$ коса асимптота функције.

в) Вертикалне асимптоте: $x = -2$ и $x = 1$, хоризонтална асиптота $y = 0$.

г) Вертикалне асимптоте: $x = 1$ и $x = 2$, коса асимптота $y = 4x+12$.

д) Вертикална асимптота $x = 1$, хоризонтална асимптота $y = 0$.

ђ) Вертикалне асимптоте: $x = -2$ и $x = 2$, коса асимптота $y = 2x$.

е) Вертикалне асимптоте: $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$, коса асимптота $y = -x$.

ж) Вертикалне асимптоте $x = -1$ и $x = 1$, хоризонтална асимптота $y = 0$.

з) Вертикална асимптота $x = 0$, коса асимптота $y = -x$.

и) Вертикална асимптота $x = -1$, коса асимптота $y = x-3$.

ј) Вертикалне асимптоте: $x = -2$ и $x = 1$, коса асимптота $y = x-1$.

92. а) Коса асимптота $y = x-1$;

б) вертикална асимптота $x = 0$; како је $y = |x+1|\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ функција има две косе асимптоте: за $x\to+\infty$: $y = x+\dfrac{3}{2}$ и за $x\to-\infty$: $y = -x-\dfrac{3}{2}$;

в) функција нема асимптота.

93. а) вертикална асимптота $x = 0$ и коса асимптота $y = x-3$; б) вертикална асимптота $x = 1/e$ и хоризонтална асимптота $y = -1$; в) хоризонтална асимптота $y = -\dfrac{\pi}{2}$; г) хоризонталне асимптоте: за $x\to+\infty$: $y = \dfrac{\pi}{4}$ и за $x\to-\infty$: $y = -\dfrac{\pi}{4}$; д) коса асимптота $y = 2x$;

94. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+x+1-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x^2-x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{|x|}{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)} = \pm 1$. Дакле, за $x \to +\infty$ функција има хоризонталну асимптоту $y = 1$, а за $x \to -\infty$ хоризонталну асимптоту $y = -1$.

б) Слично као а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

95. а) Да би функција била дефинисана треба да буде $|x| < 1$ и тада је (збир бесконачног геометријског реда) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

б) $|x| < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; в) $|x| < \dfrac{1}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$; г) $|\dfrac{1}{1+x}| < 1$, тј. $x > -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = (x+1)^2$.

96. а) Имамо да је $\arccos x = t \iff x = \cos t$, где $x \in [-1,1]$, $t \in [0,\pi]$. Како је $\cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$, то је $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, одакле је $\dfrac{\pi}{2} - t = \arcsin x$, тј. $\dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$.

97. 1° а) $f(x) = x^2 + x + 1$; б) $B = [\frac{3}{4}, +\infty)$; в) $f^{-1}(x) = \dfrac{-1-\sqrt{4x-3}}{2}$.

2° а) $f(x) = x^2 - x + 1$; б) $B = [\frac{3}{4}, +\infty)$; в) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-\sqrt{4x-3}}{2}$.

98. а) Функција је дефинисана за $x \in (0,2) \cup (3,+\infty)$; није ни парна ни непарна; нуле су $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$; позитивна за $x \in (0, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, +\infty)$, а негативна за $x \in (3-\sqrt{3}, 2) \cup (3, 3+\sqrt{3})$;

б) Функција је дефинисана за $x \in (-2, \frac{5}{2}) \cup (4, +\infty)$; није ни парна ни непарна; нуле су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; позитивна за $x \in (\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup (4, +\infty)$.

в) Функција је дефинисана за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$; није ни парна ни непарна; нуле су $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$; позитивна за $x \in (2-\sqrt{2}, 1) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$.

г) Функција је дефинисана за $x \in (-1, 1)$; функција је непарна; нула је $x_0 = 0$; позитивна за $x \in (-1, 0)$, а негативна за $x \in (0, 1)$.

99. а) $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; б) $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; в) $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; г) $y = \log_2(1-2x)$; д) $y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$; ђ) $y = x - 2^{x-1}$.

100. а) Претпоставимо да је функција периодична и да је њен период број T. Тада је за све x: $\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$. Одавде за $x = 0$ налазимо $\cos\sqrt{T} = \cos 0$, па је $\sqrt{T} = 2k\pi$ (1), $k \in \mathbf{Z}$. За $x = T$ добијамо $\cos\sqrt{2T} = \cos\sqrt{T} = \cos 0$, односно $\sqrt{2T} = 2l\pi$ (2), $l \in \mathbf{Z}$. Дељењем левих и десних страна релација (2) и (1) добијамо $\sqrt{2} = \dfrac{k}{l}$, $k, l \in \mathbf{Z}$, што је немогуће, јер је број $\sqrt{2}$ ирационалан.

б) Претпоставимо да функција има период T. Тада је $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$ за све x. Из услова за једнакост косинуса добијамо $x^2 + 2Tx + T^2 + x^2 = 2\pi k$ или $x^2 + 2Tx + T^2 - x^2 = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из прве једначине је $T = -x \pm \sqrt{-x^2 + 2\pi k}$, а из друге $T = -x \pm \sqrt{x^2 + 2\pi k}$, дакле у оба случаја T зависи од променљиве x, односно T не може бити период функције.

в) Претпоставимо да је T период функције. Тада је за све x: $x + T + \sin(x+T) = x + \sin x$ или $\sin(x+T) - \sin x = T$, тј. $2\sin\dfrac{T}{2}\cos\left(x + \dfrac{T}{2}\right) = -T$, одакле је $\cos\left(x + \dfrac{T}{2}\right) = -\dfrac{T}{2\sin\dfrac{T}{2}}$.

Лева страна ове релације зависи од x, а десна је константа. Дакле, не постоји број T тако да је ова једнакост испуњена за све x.

г) Како је $\sin\sqrt{2}x = \sin(\sqrt{2}x + 2\pi)$ и $\cos\sqrt{5}x = \cos(\sqrt{5}x + 2\pi)$, то је период функције $\sin\sqrt{2}x$ једнак $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$, а период функције $\cos\sqrt{5}x$ једнак $\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$. Нека је T период функције $y = \sin\sqrt{2}x +$

$\cos\sqrt{5}x$. Тада је $\dfrac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} = k$ и $\dfrac{T}{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} = l$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Одавде имамо $\dfrac{2k\pi}{\sqrt{2}} = \dfrac{2l\pi}{\sqrt{5}}$, тј. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{l}{k}$, што је немогуће јер је број $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ирационалан.

д) Види б).

ђ) Нека је функција периодична са периодом T $(T > 0)$. Тада је $f(T) = f(0) = f(-T) = 0$, па је $0 = f(T) = f(-T) = -[-T] - [T]$. Могућа су два случаја: 1° T није цео број. Тада је $[-T] = -[T] - 1$, па је $f(T) + f(-T) = 1$; 2° T је цео број. Тада је $f(T) = \sin T = 0$, тј. $T = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Онда би било $\pi = \dfrac{T}{k}$, што је немогуће, јер је π ирационалан број.

101. а) Основни период за $\sin\dfrac{3}{2}x$ је $\dfrac{4\pi}{3}$, за $\sin\dfrac{4}{3}x$ је $\dfrac{3\pi}{2}$, а за $\cos\dfrac{x}{2}$ — број 4π. Пошто је сваки број који је дељив периодом, такође период функције, то ће тражени основни период бити најмањи заједнички садржалац бројева $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ и 4π, а то је $T = 12\pi$.

б) Основни период је најмањи заједнички садржалац бројева $T_k = \dfrac{2\pi}{\omega_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

102. а) Најпре, решавањем система једначина, добијемо $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{3}{2}x$ и $g(2x+1) = \dfrac{x}{2}$. Затим уведемо смену $\dfrac{x}{x-1} = p$ и $2x + 1 = q$. Добија се $x = \dfrac{p}{p-1}$ и $x = \dfrac{q-1}{2}$, па је $f(p) = \dfrac{3p}{2(p-1)}$ и $g(q) = \dfrac{q-1}{4}$. На крају је $f(x) = \dfrac{3x}{2(x-1)}$, $x \neq 1$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$, па је $(f\circ g)(x) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x-1}{x-5}$, $x \neq 5$ и $(g\circ f)(x) = \dfrac{x+2}{8(x-1)}$, $x \neq 1$.

б) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 1$, $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = 1$.

103. Нека је $\dfrac{x}{x-1} = t$. Тада је $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{t}$ и (1) $f(t) - 2f\left(\dfrac{1}{t}\right) = 0$. Ова релација важи за све t осим, можда, за $t = 1$ и $t = 0$. Ако у (1) заменимо t са $\dfrac{1}{t}$, добијамо (2) $f\left(\dfrac{1}{t}\right) - 2f(t) = 0$ одакле, после множења са 2, налазимо (3) $2f\left(\dfrac{1}{t}\right) - 4f(t) = 0$. Сабирањем левих и десних страна релација (1) и (2) имамо $-3f(t) = 0$, тј. $f(t) = 0$ за све t, осим, можда, за $t = 0$ и $t = 1$.

104. $F(x) = \dfrac{4x+5}{3(1-x)}$, осим за $x = 1$.

105. График функције $y = f(x) + c$ се добија од графика функције $y = f(x)$ транслацијом по y-оси за c, и то навише, ако је $c > 0$ и наниже за $c < 0$. Уместо померања графика за број c може се транслирати x-оса за број $-c$.

106. График функције $y = f(x + c)$ добија се транслацијом дуж x-осе за број $-c$ графика функције $y = f(x)$ (дакле, улево, ако је $c > 0$ и удесно, ако је $c < 0$). Уместо померања графика за $-c$ може се транслирати y-оса за $+c$.

107. 1° за $a > 1$ — контракција (сажимање) дуж x-осе a пута,
2° за $0 < a < 1$ — дилатација (растезање) дуж x-осе $1/a$ пута,
3° за $a = -1$ симетрија у односу на y-осу,
4° за $a < -1$ симетрија у односу на y-осу, комбинована са контракцијом $|a|$ пута,
5° за $-1 < a < 0$ симетрија у односу на y-осу, комбинована са дилатацијом $1/|a|$ пута.

108. 1° дилатација дуж y-осе, a пута, ако је $a > 1$;
2° контракција дуж y-осе $1/a$ пута, ако је $0 < a < 1$;
3° симетрија у односу на x-осу, ако је $a = -1$;
4° симетрија у односу на x-осу, комбинована са дилатацијом $|a|$ пута, ако је $a < -1$;

5° симетрија у односу на x-осу, комбинована са контракцијом $1/|a|$ пута, ако је $-1 < a < 0$.

109. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2}}{4x \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$; б) 6; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\left(2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right)}{x^4} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\sin^2 \dfrac{x}{2}\right)}{x^4} = \dfrac{1}{8}$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x + \sin x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; д) 2;

ђ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos a \sin x \cos(a+x)\cos(a-x)}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos a \cos(a+x)\cos(a-x)}{\cos x} = \cos^3 a$; е) $-\dfrac{a}{\pi}$; ж) $\dfrac{2}{\pi}$;

з) 1; и) $\dfrac{3}{2}$; ј) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *Упутство*: увести смену $y = \arccos x$.

110. а) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{2\pi}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\left(1 + \dfrac{\sin x}{x} - 1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right]^{\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\cdot\frac{\sin x}{x-\sin x}} =$

e^{-1}; г) e^{ab};

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}}\right]^{-\sin^2 x\cdot\frac{1}{2x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{2x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$;

ђ) $\lim\limits_{x\to 0+}(1-\sin^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$; е) $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$; ж) 0; з) $-\dfrac{1}{2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}}\right]^{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 4\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}} =$

$e^{4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$, јер је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

111. а) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 a^{\frac{1}{n+1}}}{n(n+1)} \times \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right) = \ln a$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}\right]^{n\cdot\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)+\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-1)\right)} =$ (према резултату а)) $e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{ab}$.

112. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+(\cos x-1))^{\sqrt{2}}-1}{\cos x-1}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Овде се користи да је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos^{\sqrt{2}} x}{x^2}\right) = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, на основу резултата а).

в) Увести смену $\sin^2(\pi 2^x) = t$. Резултат: -2; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{2x}\cdot 2 - \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}}{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}} = 1$.

113. За Дирихлеову функцију период је произвољан рационалан број r. Заиста, ако је x рационалан број, тада је и $x+r$ рационалан, па је $D(x+r) = D(x) = 1$. Ако је x

ирационалан број тада је и $x+r$ ирационалан, па је $D(x+r)=D(x)=0$. Приметимо да ова функција нема основни период јер не постоји најмањи позитиван рационалан број.

Глава II – Извод функције

114. а) Из $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3$ следи $\Delta y=(2+2)^3-2^3=56$; б) -7; в) $7,625$; г) $-1,141$.

115. а) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, тј. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1-(2x^3-x^2+1)}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2-2x^3+x^2}{\Delta x}=\dfrac{6x^2\Delta x+6x\Delta x^2-2x\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}$, односно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{6x^2\Delta x+6x\Delta x^2-2x\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}6x^2+6x\Delta x-2x-\Delta x=6x^2-2x$. За $x=1$, $\Delta x=0,1$ имамо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4,52$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4$;

б) -0.249; $-\dfrac{1}{4}$; в) 0.245; $\dfrac{1}{4}$.

116. а) $\Delta y=a\Delta x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$; б) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ и $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; в) $-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$ и $-\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; г) $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$; д) $2^x(2^{\Delta x}-1)$ и $\dfrac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; ђ) $\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}$ и $\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

117. а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a\Delta x$, па је $f(x)=ax+f(0)$; б) Не; в) Не.

118. а) $f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(5+h)^2-5^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{10h+h^2}{h}=10$; $f'(-2)=-4$; $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-3$; б) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$, па је $f'(x)=f(x)$ у тачкама $x_1=0$ и $x_2=2$.

120. а) $(x^4)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}=4x^3$;

б) $\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$; в) $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $-\dfrac{1}{x^2}$; ђ) x^{11}; е) $2ax$; ж) $-\dfrac{a}{x^2}$; з) $2ax+b$.

121. Како је $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(t+\Delta t)+6-5t-6}{\Delta t}=5$, то је а) 5; б) 5.

122. 1° а) $53.9m/s$; б) $49.49m/s$; в) $49.25m/s$; г) $49,005m/s$;
2° а) $49,0m/s$; б) $98.0m/s$;
3° $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{g}{2}t^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{g}{2}\dfrac{2t\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt$.

123. Како је $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)=a\sin\omega(t+\Delta t)-a\sin\omega t$, биће

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2a\cos\omega\left(t+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\cdot\sin\omega\dfrac{\Delta t}{2}}{\Delta t}=\frac{a\omega\cos\omega\left(t+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\sin\omega\dfrac{\Delta t}{2}}{\dfrac{\omega\Delta t}{2}},$$

па пошто је $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\sin\left(\omega\dfrac{\Delta t}{2}\right)}{\dfrac{\omega\Delta t}{2}}=1$, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\cos\omega\left(t+\dfrac{\Delta t}{2}\right)=\cos\omega t$, то је тражена брзина $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=a\omega\cos\omega t$.

124. Брзина загревања у овом тренутку је

$$T'(2) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1.5(2+\Delta t)^2 - 1.5\cdot 2^2}{\Delta t} = 6.$$

125. а) $2x-3$; б) $12x^3-15x^2+12x-9$; в) $7x^6-\frac{5}{6}x^4+2x^2-0,1$; г) $5x^4+24x^7-9x^{-10}-32x^{-9}$; д) $3x^2+p$; ђ) $\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}+\frac{2x}{b}-\frac{2b}{x^3}$; е) $\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$; ж) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$; з) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}$; и) $5-\frac{5}{2x\sqrt{x}}$; ј) $2u-3c\sqrt{u}+c^2$; к) $2v$; л) $5t^2-\frac{2}{3}t\sqrt{t}-\frac{6}{5}t^{-2}$; љ) $2u^2-30u^{-7}-\frac{1}{\sqrt{u}}$; м) $3\pi x^2-2$; н) $12x^3-12x^2-4x^{-3}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}$; њ) $-(6+3\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2})/6x^2$.

126. а) $\left((3x-7)x^2\right)'=(3x-7)'x^2+(x^2)'(3x-7)=3x^2+2x(3x-7)=9x^2-14x$; б) $4x^3-3x^2-8x+9$; в) $\frac{5-9x}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{3x+4\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$; д) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; ђ) $\frac{1+12t}{3\sqrt[3]{t^2}}+\frac{9\sqrt[3]{t^2}+10t\sqrt[3]{t}+36t\sqrt[3]{t^2}}{3\sqrt[3]{t^2}}$; е) $-\frac{2}{(t-1)^2}$; ж) $\frac{2x^3-12x^2}{(x-4)^2}$; з) $-\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2\cdot\sqrt{x}}$; и) $\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$; ј) $\frac{a+2bx^2}{am+bm^2}$; к) $-\frac{p(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}$; л) $\frac{6x}{(x^2+4)^2}$; љ) $-\frac{x^4+6x^2+8x}{(x^2+2)^2}$; м) $\frac{3\sqrt{x}}{(1-x\sqrt{x})^2}$.

127. а) $\cos x-\sin x$; б) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $\frac{1-\cos t-t\sin t}{(1-\cos t)^2}$; г) $\frac{u(\cos u)^{-2}-\operatorname{tg} u}{u^2}$; д) $-\sin 2x$; ђ) $\frac{2}{a}\operatorname{tg} t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{b}{\cos^2 t}+c$; е) $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$; ж) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; з) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; и) $\frac{1}{1-\sin x}$; ј) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin x+2x\cos x)$; к) $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

128. а) $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$; б) $\frac{2\ln t}{t}$; в) $\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$; г) $-\frac{2}{t(1+\ln t)^2}$; д) $\frac{1+t^2-2t^2\ln t}{t(1+t^2)^2}$; ђ) $\frac{-a}{x\ln^2 x}$; е) $2x\ln x+x$; ж) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$; з) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$.

129. а) $2^x\ln 2+3^x\ln 3+5^x\ln 5$; б) $\frac{1}{2^x}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3^x}\ln\frac{1}{3}$; в) $4^{-x}(1-x\ln 4)$; г) $e^x(1+x)$; д) $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$; ђ) $e^x(\cos x-\sin x)$; е) $\frac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$; ж) $a^x\ln a+ax^{a-1}$; з) $e^x(x^2+1)$; и) $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$; ј) $(2^{x+1}+2^{x-1})\ln 2$; к) $(2x+x^2)e^x$; л) $x^{a-1}a^x(a+x\ln a)$; љ) $(\cos x+\sin x)e^x$.

130. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$; $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

131. а) $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$; в) $1+2x\operatorname{arctg} x$; г) $-\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; д) $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$; ђ) $\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$; е) $\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}$; ж) $x\operatorname{arctg} x$.

132. а) $-20(1-x)^{19}$; б) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; в) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$; г) $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$; д) $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$; ђ) $\cos(\sin x)\cdot\cos x$; е) $\frac{\sin 2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$; ж) $\frac{\ln t}{t\sqrt{1+\ln^2 t}}$; з) $\operatorname{ctg} x$; и) $\frac{2}{\sin 2x}$; ј) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; к) $2^{3^x}\cdot 3^x\ln 2\ln 3$; л) $\frac{2}{a^2}xe^{-x^2/a^2}(a^2-x^2)$; љ) $\frac{2x}{1+x^4}$; м) $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$; н) $\frac{\cos x}{|\cos x|}$; њ) $\frac{3x^2}{(x+1)^4}$; о) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; п) $\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x^2-4x}}$; р) $a\cos ax$; с) $\cos x e^{\sin x}$; т) $\frac{3}{x}$; ћ) $\frac{6x}{3x^2+2}$.

133. $\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$. **134.** $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. **135.** $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.

136. $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. **137.** $\dfrac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

138. $-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. **139.** $\dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. **140.** $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

141. $\cos x\cos(\sin x)\cos(\sin(\sin x))$. **142.** $x^2\sin x$.

143. $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$. **144.** $2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

145. $-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$. **146.** $\dfrac{-2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

147. $-\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$. **148.** $2\sin x(x\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2)$.

149. $(a^2+1)\sin x e^{ax}$. **150.** $\dfrac{6\lg^2 x^2}{x\ln 10}$. **151.** $\dfrac{x}{x^4-1}$.

152. $\dfrac{1}{\sin x}$. **153.** $-\dfrac{1}{\cos x}$. **154.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **155.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

156. а) $\dfrac{4x}{1+x^4}$; б) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\dfrac{2x^2}{|x|(1+x^2)}$.

157. а) $f'(0)=0$, $f'(1)=6$; б) $f'(0)=11$, $f'(1)=2$; в) $f'(1)=16$, $f'(0)$ не постоји; г) $f'(x)=1+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, па је $f'(0)=1$, $f'(1)=\dfrac{7}{3}$.

158. а) 8,25; б) -90; в) $-\left(1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}\right)$.

160. а) $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$; б) $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$; в) $x>5$; г) $x>0$.

161. а) Како је $\ln y=x\ln x$, то је $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$, тј. $y'=x^x(1+\ln x)$;

б) $y'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$; в) $y'=x^{x^x}\left(x^x(1+\ln x)\ln x+x^{x-1}\right)$;

г) $y'=x(\ln x)^{1-\cos x}\left(\dfrac{1}{x}+\sin x\ln\ln x+(1-\cos x)\dfrac{1}{x\ln x}\right)$;

д) $y'=(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,(x/2)}\left(\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{-2\sin^2(x/2)}+\dfrac{\mathrm{ctg}\,(x/2)}{\mathrm{tg}\,x\cos^2 x}\right)$;

ђ) Пошто је $\ln y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\dfrac{1}{3}\ln(x-1)+\dfrac{1}{4}\ln(x+2)-\dfrac{1}{5}\ln(x-3)-\dfrac{1}{7}\ln(x+1)\right)$, то је $y'=y\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+2)}-\dfrac{1}{5(x-3)}-\dfrac{1}{7(x+1)}\right)$;

е) $y'=y\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{5x^4+1}{4(x^5+x-7)}\right)$;

ж) $y'=y\left(\dfrac{21x^2}{5(x^3+1)}+\dfrac{6x}{5(x^2+4)}-\dfrac{6(2x+1)}{5(x^2+x+1)}-\dfrac{1}{5\cos^2 x}\right)$;

з) $y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$; и) $y=(\mathrm{arctg}\,x)^x\left(\ln\mathrm{arctg}\,x+\dfrac{x}{(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x}\right)$.

162. а) $2\cos 2x$; б) 0; в) $2\mathrm{tg}\,x\sec^2 x$; г) $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$; д) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; ђ) $\dfrac{x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; е) $-2e^x\sin x$; ж) $xa^x(x^2\ln^2 a+6x\ln a+6)$; з) $2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$.

163. а) $2e^{x^2}(3x+2x^3)$; б) $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; в) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$; г) $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; д) $\dfrac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; ђ) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$; е) $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$; ж) $-\dfrac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; з) $\dfrac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2x)^3}}$; и) $x^x\left((\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right)$; ј) $\dfrac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$; к) $\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$; л) $-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; љ) $\dfrac{a}{x^2+a^2}$; м) $\dfrac{6}{x^4}$; н) $\dfrac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; њ) $5(x^2+2x+6)$; о) $\dfrac{-8}{\sqrt[3]{x^5(6-x)^4}}$.

165. а) $y'=2x-3$, $y''=2$, $y'''=y^{\mathrm{IV}}=0$; б) $y'=-2x-4x^3$, $y''=-2-12x^2$, $y'''=-24x$, $y^{\mathrm{IV}}=-24$; в) $y'=6(x+10)^5$, $y''=30(x+10)^4$, $y'''=120(x+10)^3$, $y^{\mathrm{IV}}=360(x+10)^2$; г) $y'=6x^5-12x^2$, $y''=30x^4-24x$, $y'''=120x^3-24$, $y^{\mathrm{IV}}=360x^2$; д) $y'=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$, $y''=\dfrac{4}{(1+x)^3}$, $y'''=\dfrac{-12}{(1+x)^4}$, $y^{\mathrm{IV}}=\dfrac{-48}{(1+x)^5}$; ђ) $y'=3x^2\ln x+x^2$, $y''=6x\ln x+5x$, $y'''=6\ln x+11$, $y^{\mathrm{IV}}=6/x$; е) $y'=-\sin 2x$, $y''=-2\cos 2x$, $y'''=4\sin 2x$, $y^{\mathrm{IV}}=8\cos 2x$; ж) $y'=2e^{2x-1}$, $y''=4e^{2x-1}$, $y'''=8e^{2x-1}$, $y^{\mathrm{IV}}=16e^{2x-1}$; з) $y'=a\cos ax-b\sin bx$, $y''=-a^2\sin ax-b^2\cos bx$, $y'''=-a^3\cos ax+b^3\sin bx$, $y^{\mathrm{IV}}=a^4\sin ax+b^4\cos bx$.

166. 1° а) 0, 1, 2 и 2; б) Пошто је $f'(x)=24e^x-24-24x-12x^2-4x^3$, $f''(x)=24e^x-24-24x-12x^2$, $f'''(x)=24e^x-24-24x$, то је $f(0)=4$, $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$; в) $f(0)=1$, $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$.

2° а) $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1$; б) $-11,0,0,0$.

167. $p(-1)=144$, $p'(0)=-60$, $p''(1)=26$.

168. а) $y^{(n)}=n!$; б) $y^{(n)}=e^x$; в) $y^{(n)}=\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+x\right)$; г) $y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$; д) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!x^{-n-1}$; ђ) $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$; е) $y^{(n)}=(n+x)e^x$; ж) $y^{(n)}=a^ne^{ax}$; з) $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$; и) $y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

169. Због $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h-\sin 0}{h}=1$, тражена тангента има једначину $y=x$.

170. $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{4h+h^2}{h}=4$, па је, пошто је једначина тангенте у (x_0,y_0) облика $y-y_0=\operatorname{tg}\alpha(x-x_0)$, тражена једначина: $y-4=4(x-2)$, тј. $y=4x-4$.

171. а) График функције сече x-осу у тачкама $x_1=0$ и $x_2=2$, а пошто је $y'=2x-2$, то је $y'(0)=-2$ и $y'(2)=2$. Једначине тангенти су $y-y_1=y'(x_1)(x-x_1)$ и $y-y_2=y'(x_2)(x-x_2)$, тј. $y=-2x$ и $y=2x-4$;

б) $y=-4x+3$; в) $y=4x$ и $y=-4x+16$; г) $y=-2x+5$; д) $y=\dfrac{1}{8}(3x+10-6\ln 2)$; ђ) $y=\dfrac{-\ln 2}{8}(x-2)+\dfrac{3}{16}$; е) $y=\dfrac{1}{9}(25x\ln 3+28-25\ln 3)$; ж) $y=4x+2$.

172. а) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right)$; б) $(0,2)$.

173. Крива $y=\ln x$ сече x-осу у тачки $x_1=1$. Извод функције у тој тачки је $(\ln x)'_{x=1}=(1/x)_{x=1}=1$, па је тражени угао $\alpha=\operatorname{arctg}1=45°$.

174. $x=0$ или $x=2/3$.

175. $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

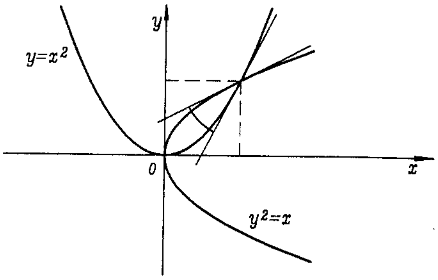
176. а) Због $y'(x_0)=-4$, једначина тангенте је $y-2=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, а нормале $y-2=\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. б) Једначина тангенте је $x-4y+4=0$, а нормале $4x+y-18=0$.

177. а) $2x+y-2=0$ и $x-2y-1=0$; б) $x+2y-4a=0$ и $2x-y-3a=0$; в) $x-y+1=0$ и $x+y-3=0$; г) $9x+8y-15=0$ и $8x-9y+35=0$; д) $x-y+1=0$ и $x+y-1=0$;

ђ) $x-2y-1=0$ и $2x+y-2=0$; е) За тачку $(1,1)$: $2x+y-3=0$ и $x-2y+1=0$, а за тачку $(-1,1)$: $2x-y+3=0$ и $x+2y-1=0$.

178. Због услова нормалности тангенте и дате праве у тачки (x_0,y_0) добијамо $3x_0^2+10x_0=8$, одакле је $x_{01}=\dfrac{2}{3}$ и $x_{02}=-4$. Једначина тангенте у тачки $A\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{13}{27}\right)$ је $y+\dfrac{13}{27}=8\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$, а у тачки $B(-4,13)$ је $y-13=8(x+4)$.

179. а) Нека је $f(x)=ax^2+bx$. Из услова задатка имамо да је $f(2)=0$ и $f'(2)=2$, тј. $4a+2b=0$ и $4a+b=2$, одакле је $a=1$, $b=-2$;
б) $x^2+4y^2=25$; в) $y=x^2-x+1$.



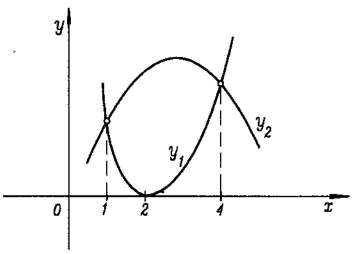
Сл. уз зад. 180

180. Дате криве секу се у тачкама $(0,0)$ и $(1,1)$ (видети слику). Пошто је x-оса тангента прве, а y-оса тангента друге криве у координатном почетку, то је тражени угао у тачки $(0,0)$ прав. Потражимо сада угао између криве $y_1=x^2$ и $y_2=\sqrt{x}$ у тачки $(1,1)$. $y_1'(1)=2$, $y_2'(1)=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{2-1/2}{1+1}=\dfrac{3}{4}$, па је $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$

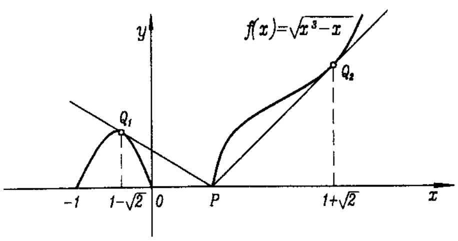
183. Из $\sqrt{x}=\dfrac{1}{x}$ налазимо да је пресечна тачка кривих $x_1=1$. Како је $y_1'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y_2'=-\dfrac{1}{x^2}$, то је $y_1'(1)=\dfrac{1}{2}$, $y_2'(1)=-1$, па је $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1/2+1}{1-1/2}=\operatorname{arctg}3$.

184. Како је $y'=2x$, то из а) $2x=4$, одређујемо тачку $(2,4)$; б) $2x=-3$, одређујемо тачку $(-3/2,9/4)$; в) Нека је $y_1=2x$, $y_2=3x+1$. Из услова $\dfrac{2x-3}{1+6x}=\pm 1$, одређујемо тачке $(-1,1)$ и $(1/4,1/16)$.

185. а) $90°$; б) $90°$.



Сл. уз зад. 186а



Сл. уз зад. 188

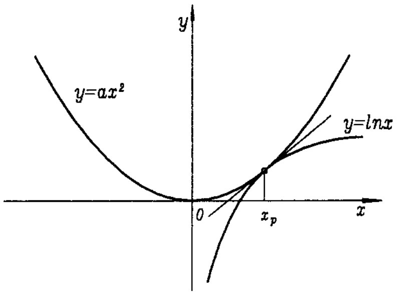
186. а) Као на слици, означимо: $y_1=(x-2)^2$ и $y_2=-4+6x-x^2$. Решавањем једначине $y_1=y_2$ налазимо да се параболе секу у тачкама $x_1=1$ и $x_2=4$ (водети слику). Како је

$y_1' = 2(x-2)$, $y_2' = 6-2x$, то је $y_1'(1) = -2$, $y_1'(4) = 4$, $y_2'(1) = 4$, $y_2'(4) = -2$, па је за те тачке $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{-2-4}{1-8} = -\dfrac{6}{7}$.

б) У тачки $(0,0)$ криве се додирују, а у тачки $(1,1)$ секу под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} \approx\approx 8°8'$.

187. а) $\alpha = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70°31'44''$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} \approx 53°7'48''$.

188. Одредимо, прво, $f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$ (видети слику). Права PQ има једначину $y = \dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$ и додирује график криве $y = f(x)$ ако и само ако је $f'(x_0) = \dfrac{y_0}{x_0-1}$, тј. $\dfrac{3x_0^2-1}{2\sqrt{x_0^3-x_0}} = \dfrac{\sqrt{x_0^3-x_0}}{x_0-1}$. Одавде следи $x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, а одатле за $x_0 \neq 1$, $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$. Претпоставимо сада да је $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$. Тада је $x_0 = 1+\sqrt{2}$ или $x_0 = 1-\sqrt{2}$.



Сл. уз зад. 189

189. Неопходан и довољан услов за додир кривих $y = f(x)$ и $y = g(x)$ у тачки x_0 је $f(x_0) = g(x_0)$ и $f'(x_0) = g'(x_0)$ (видети слику). Дакле, треба да буде $\ln x = ax^2$ и $1/x = 2ax$. Из друге једначине добијамо $2ax^2 = 1$, тј. $ax^2 = 1/2$, па је из прве $\ln x = 1/2$; одавде $x_0 = e^{1/2}$ и $a = 1/(2e)$.

190. $y_1(3) = y_2(3) = 34$, $y_1' = 8x+2$, $y_2' = 3x^2-1$, па је $y_1'(3) = y_2'(3) = 26$. Због $y_1(-2) = 4$, $y_2(-2) = 4$, $y_1'(-2) = -14$, $y_2'(-2) = 11$ у тачки $(-2,4)$ криве y_1 и y_2 се секу.

191. а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1)'}{(x^3-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}$; б) $\dfrac{5}{11}$; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{1}{4}$; д) 1.

192. а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$;

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(7^{x-3}-3^{x-3})'}{(\operatorname{arctg}(x^2-9))'} = \lim_{x\to 3}\frac{7^{x-3}\ln 7 - 3^{x-3}\ln 3}{\dfrac{2x}{1+(x^2-9)^2}} = \frac{1}{6}(\ln 7 - \ln 3) = \frac{1}{6}\ln\frac{7}{3}$;

г) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$;

д) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}(x-2) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'}{(\operatorname{tg}(x-2))'} = \lim_{x\to 2}\cos^2(x-2) = 1$;

ђ) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'} = +\infty$;

е) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5^x\ln 5)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x(\ln 5)^2}{2}=+\infty$.

193. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+2x}{n(1+x)^{n-1}+2x}=-\frac{1}{n}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 2, д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$;
ђ) 2; е) $\frac{1}{3}$.

194. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos x)'}{(1+\sin^2 x+\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin x}{2\sin x\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}(\frac{1}{2}-2\sin\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}(4\sin\frac{x}{2}\cos x-2sin\frac{x}{2})}=$
$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}-2\sin\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos x-2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-2\cdot 1}{4\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 1}=\frac{1}{4}$;
б) $\frac{2e}{e-1}$; в) $\frac{16}{9}$; г) $\frac{1}{6}$; д) $-\frac{e}{2}$; ђ) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{60}$.

195. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^{3x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3e^{3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{mx^{m-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{mx^m}=0$; г) 0; д) $-\frac{2}{3}$; ђ) $\frac{1}{2}$.

196. а) $e^{\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}}=e^{\frac{2}{\pi}}$;
б) e^{-1}; в) e^{-1}; г) $e^{-1/3}$; д) e^{-1}; ђ) $e^{-1/3}$; е) 1; ж) 1; з) e.

197. а) Како је $y'=-3x^2+8x-4$, налазимо да је $y'<0$ (тј. функција опадајућа) за $x\in(-\infty,\frac{2}{3})\cup(2,+\infty)$, а $y'>0$ (тј. функција растућа) за $x\in(\frac{2}{3},2)$;
б) функција опада за $x\in(-1,0)$, а расте за $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$;
в) функција опада за $x\in(-1,2)$, а расте за $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$;
г) функција опада за $x\in(-\infty,0)$, а расте за $x\in(0,+\infty)$,
д) функција опада за $x\in(\log_2(4/3),1)$, а расте за $x\in(-\infty,\log_2(4/3))\cup(1,+\infty)$;
ђ) функција расте за све x;
е) функција расте за $x\in(2,4)$, а опада за $x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$;
ж) опада за $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;
з) расте за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, опада за $x\in(-1,1)$;
и) расте за $x\in(1/2,+\infty)$, опада за $x\in(0,1/2)$;
ј) расте за $x\in\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$; опада за $x\in\left(2k\pi,\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$;
к) расте за $x\in(-\infty,2)$, опада за $x\in(2,3)$;
л) расте за $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, опада за $x\in(0,2)$;
љ) расте за $x\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$, опада за $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$;
м) расте за $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

198. а) Локални максимум за $x=-1$, локални минимум за $x=3$, функција опада за $x\in(-1,3)$ и расте за $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$;
б) Функција опада за $x\in(-\infty,-4)\cup(0,1)$ и расте за $x\in(-4,0)\cup(1,+\infty)$. Локални минимуми су за $x=-4$ или $x=1$, а локални максимум за $x=0$;
в) Функција опада за $x\in(-\infty,-1)\cup(0,4)$, а расте за $x\in(-1,0)\cup(4,+\infty)$. Локални минимуми су за $x=-1$ и $x=4$, а локални максимум за $x=0$.
г) Функција опада за $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,\frac{1}{2})$ и расте за $x\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$. Локални минимуми су за $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, а локални максимум за $x=0$.
д) Функција расте за све x.
ђ) Функција опада за $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{16}{5},+\infty)$, а расте за $x\in(0,\frac{16}{5})$. Локални минимум је за $x=\frac{16}{5}$, а тачка прекида функције за $x=0$.
е) Функција опада за $x\in(-\infty,\frac{2}{3})$ и расте за $x\in(\frac{2}{3},+\infty)$. Локални минимум је за $x=\frac{2}{3}$.
ж) Функција опада за $x\in(\frac{1}{3},+\infty)$, а расте за $x\in(-\infty,\frac{1}{3})$. Локални максимум је за $x=\dfrac{1}{3}$.
з) Функција опада за $x\in(0,1)$, а расте за $x\in(1,+\infty)$, локални минимум је за $x=1$.

и) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\right)$. Функција опада за $x < -2$ и за $0 < x < 2$, а расте за $-2 < x < 0$ и за $x > 2$. У тачкама $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ (иако није диференцијабилна) функција има локалне минимуме, а у тачки $x_3 = 0$ локални максимум.

199. а) $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$; за $x = 1$ — минимум; за $x = 2$ — максимум;
б) $m = 2$; у тачки $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ функција има максимум.

200. $y'(x) = \dfrac{x+1-a^2}{2a\sqrt{(x+1)^3}}$, па функција има минимум за $x = a^2 - 1$, а $y(a^2-1) = 2$ за све a.

201. а) Одредимо прво извод функције: $y' = 4(x^2 - 1)$. За $x \in [0,1)$ је $y' < 0$, па функција опада, а за $x \in (1,2]$ је $y' > 0$, па функција расте. Према томе тачка $x_1 = 1$ је локални минимум функције. Како је $y(0) = 0$, $y(2) = \dfrac{8}{3}$, то је $y(1) = -\dfrac{8}{3} = \min\limits_{[0,2]} f(x)$, а $y(2) = \dfrac{8}{3} = \max\limits_{[0,2]} f(x)$.
б) $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(0) = f(3) = 5$, $\max\limits_{[0,3]} f(x) = f(2) = 9$;
в) $\min\limits_{[-1,3]} f(x) = f(-1) = -6$, $\max\limits_{[-1,3]} f(x) = f(3) = 6$;
г) $\min\limits_{[-3,6]} f(x) = f(3) = -57$, $\max\limits_{[-3,6]} f(x) = f(6) = 132$;
д) $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(2) = 1$, $\max\limits_{[0,3]} f(x) = f(0) = f(3) = 5$;
ђ) $\min\limits_{[0,3]} f(x) = f(2) = -25$, $\max\limits_{[0,3]} f(x) = f(3) = 0$;
е) $\min\limits_{[3/4,2]} f(x) = f(1) = 1$, $\max\limits_{[3/4,2]} f(x) = f(2) = \sqrt[3]{4/3}$;
ж) $\min\limits_{[-1,2]} f(x) = f(0) = \dfrac{2}{\ln 2}$, $\max\limits_{[-1,2]} f(x) = f(2) = \dfrac{17}{4\ln 2}$;
з) $\min\limits_{[-1,1]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1,1]} f(x) = f(1) = 24$;
и) $\min\limits_{[0,\pi]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\max\limits_{[0,\pi]} f(x) = f\left(\arcsin\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{17}{8}$;
ј) $\min\limits_{[0,\pi/2]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$, $\max\limits_{[0,\pi/2]} f(x) = f\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{57}-5}{4}\right)$.

202. а) $f'(x) = (a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2$. Дискриминанта овог тринома је $D = -4(a-1)(a+3)$ и негативна је за $a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, а како је за све те вредности коефицијент уз x^2 позитиван, то је $f'(x) > 0$ за све x ако је $a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$;
б) $f'(x) = e^{-x}(e^x + a)(2e^x + 1) > 0$ за све $a \geq 0$; в) $f'(x) = 4\sin^2 x(a + \cos x) \geq 0$ за $a \geq 1$.

203. а) Нека је x — тражени број. Треба наћи тачку минимума функције $f(x) = x + x^2$. Пошто је $f'(x) = 2x + 1$, то је тачка $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ тачка минимума ове функције. б) 1.

204. Посматрати функцију $f(x) = x^2 + \left(\dfrac{64}{x}\right)^2$; резултат $64 = 8 \cdot 8$.

205. $\dfrac{16}{3}$ и $\dfrac{128}{3}$.

206. Означимо са b дужину основице троугла, а са S површину. Пошто је $S = \dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = S(b)$, то је $S'(b) = \dfrac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}}$ и површина је максимална ако је $b = a\sqrt{2}$ $S(a\sqrt{2}) = \dfrac{a^2}{2}$.

207. Троугао треба да буде једнакостраничан.

208. Једначина праве је $y - y_0 = k(x - x_0)$; она сече координатне осе у тачкама $A(0, y_0 - kx_0)$ и $B(x_0 - \dfrac{y_0}{k}, 0)$, па је $d^2 = AB^2 = (x_0 - \dfrac{y_0}{k})^2 + (y_0 - x_0k)^2 = (y_0 - x_0k)^2\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)$. Очигледно је d минимално ако и само ако је d^2 минимално, па ћемо одредити извод функције $d^2(k)$: $(d^2)' = -2(y_0 - x_0k)\left(x_0 + \frac{y_0}{k^3}\right)$. Локални минимум ове функције је за $k = \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt[3]{y_0/x_0}$.

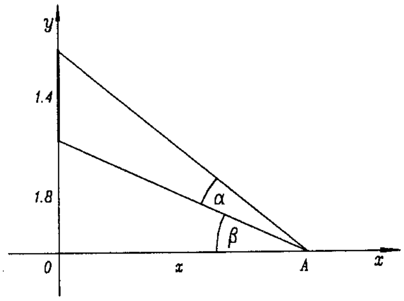
209. Како је $f(x) = nx^2 - 2x(a_1 + \cdots + a_n) + a_1^2 + \cdots + a_n^2$, то је $f'(x) = 2\big(nx - (a_1 + \cdots + a_n)\big)$. Тачка $x_0 = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ је стационарна тачка функције, јер је $f'(x_0) = 0$. За $x < x_0$ – $f'(x) > 0$, а за $x > x_0$ – $f'(x) < 0$, па је x_0 тачка минимума функције $f(x)$.

210. Нека је x дужина једна странице правоугаоника. Тада је површина $P(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $P(x) = \dfrac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Да би се одредила највећа вредност функције $P(x)$ на интервалу $[0, 2R]$ треба упоредити вредности те функције у екстремној тачки ($x_1 = R\sqrt{2}$) и на крајевима интервала: $P(0) = 0$, $P(R\sqrt{2}) = 2R^2$, $P(2R) = 0$. Највећа вредност је дакле, када је $x = R\sqrt{2}$, но тада је и $\sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, па су странице правоугаоника подударне.

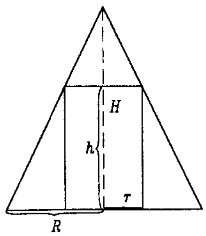
211. $\dfrac{4R\sqrt{5}}{5}$ и $\dfrac{R\sqrt{5}}{5}$. **212.** $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **213.** $P = \dfrac{\pi}{2}mn$.

214. У тачки $(2, 3)$ првог квадранта, или тачкама симетричним овој у односу на координатне осе и координатни почетак.

215. $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $P_{\max} = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{16}$. **216.** $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.



Сл. уз зад. 217



Сл. уз зад. 218

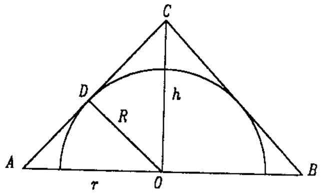
217. Означимо са A положај посматрача, x његово одстојање од зида, α тражени угао. Тада је (видети слику) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1,8}{x}$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{3,2}{x}$, па је

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\big((\alpha+\beta) - \beta\big) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2}{x}\cdot\frac{1,8}{x}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76x} = f(x).$$

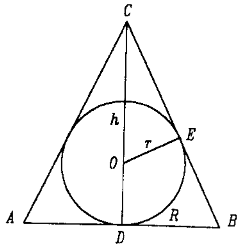
Пошто је угао α највећи онда, када је највећи $\operatorname{tg}\alpha$, потражићемо максималну вредност функције $f(x)$. Како је $f'(x) = \dfrac{1,4(5,76 - x^2)}{(x^2 + 5,76)^2}$, то је највећи угао за $x = 2,4$ м.

218. Налазимо (видети слику) да је $\dfrac{H}{h} = \dfrac{R}{R - r}$, па је запремина купе $V = \dfrac{R^3\pi h}{3(R - r)}$, $V' = \dfrac{R^2\pi h(2R - 3r)}{3(R - r)^2}$, а одавде да је запремина минимална за $R = \dfrac{3}{2}r$.

219. Из сличности троуглова AOC и AOD (видети слику) добијамо $r^2 = \dfrac{R^2h^2}{h^2-R^2}$, па је запремина купе $V = \dfrac{R^2h^3\pi}{3(h^2-R^2)}$, а како је $V = \dfrac{\pi R^2h^2(h^2-3R^2)}{3(h^2-R^2)^2}$, запремина је најмања када је $h = \sqrt{3}R$.



Сл. уз зад. 219



Сл. уз зад. 223

220. Како је $P = \pi r^2 + r\pi s = \pi a^2$, то је дужина изводнице купе $s = \dfrac{a^2}{r} - r$. Запремина је $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi H = \dfrac{a\pi}{3}r\sqrt{a^2-2r^2}$, па је $V'_r = \dfrac{a\pi}{3\sqrt{a^2-2r^2}}(a^2-4r^2)$. За $r = \dfrac{a}{2}$ ова функција има максимум. Биће $s = \dfrac{3a}{2}$ и $H = a\sqrt{2}$.

221. Запремина је $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi H$, где је $r^2 = s^2 - H^2$, па је $V = \dfrac{1}{3}\pi H(s^2-H^2)$, одакле налазимо $V' = \dfrac{\pi}{3}(s^2-3H^2)$. За $H = \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$ биће $V' = 0$, за $H < \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$: $V' > 0$, а за $H > \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$: $V' < 0$, што значи да је за $H = \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$ запремина максимална.

222. Запремина ваљка је $V = \pi r^2 h$, где је $h = 2\sqrt{R^2-r^2}$, па је $V' = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}(2R^2-3r^2)$. Запремина је највећа, ако је $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

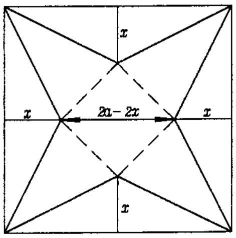
223. Како је запремина купе $V = \dfrac{1}{3}R^2\pi h$, а из сличности троуглова (видети слику) налазимо $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h}{\sqrt{h(h-2r)}}$, тј. $R^2 = \dfrac{r^2h}{h-2r}$, биће $V'_h = \dfrac{\pi r^2h(h-4r)}{3(h-2r)^2}$, па је запремина минимална ако је $h = 4r$.

224. Како је $V = r^2\pi h$, то је $h = \dfrac{V}{r^2\pi}$, па је површина $P = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r^2\pi + \dfrac{2V}{r}$. Даље налазимо $P' = \dfrac{2}{r^2}(2r^3\pi - V)$, па је површина најмања када је $r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, тј.: $2r = h$.

225. Како је $M = 2r\pi H$, а $r = \sqrt{R^2-(H/2)^2}$, то је површина омотача ваљка $M = \pi H\sqrt{4R^2-H^2}$, па је $M'_H = \pi\dfrac{4R^2-2H^2}{\sqrt{4R^2-H^2}}$. За $H = R\sqrt{2}$ биће $M' = 0$, за $H > R\sqrt{2}$ биће $M' < 0$, а за $H < R\sqrt{2}$ је $M' > 0$, па је површина омотача највећа када је $H = R\sqrt{2}$.

226. На овај начин добија се пирамида чија је основа квадрат са дијагоналама дужине $2a - 2x$, бочне ивице $\sqrt{a^2+x^2}$, а висина $\sqrt{2ax}$ (видети слику), па је $V(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(2a-2x)^2}{2}\sqrt{2ax} = \dfrac{2\sqrt{2a}}{3}\sqrt{x}(a-x)^2$, $0 < x < a$. Како је

$$V'(x) = \frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{(a-x)(a-5x)}{2\sqrt{x}}\begin{cases} > 0, & \text{за } 0 < x < a/5 \\ = 0, & \text{за } x = a/5 \\ < 0, & \text{за } a/5 < x < a, \end{cases}$$



Сл. уз зад. 226

то је максимум функције $V(x)$ за $x = \frac{a}{5}$.

227. Нека су R и r $(R > r)$ полупречници, а H висина прстена. Тада је запремина облоге $V_1 = \pi H\big(r^2 - (r-d)^2 + (R+d)^2 - R^2\big) + 2\pi d\big((R+d)^2 - (r-d)^2\big)$. Како је $V = \pi H(R-r)(R+r)$, $a^2 = H(R-r)$, то је $V_1 = \dfrac{2dV(r^2 + 2dH + a^2)}{a^2 H}$. Запремина V_1 је минимална за $H = a$, $R = \dfrac{V + a^3\pi}{2a^2\pi}$, $r = \dfrac{V - a^3\pi}{2a^2\pi}$.

228. а) $f''(x) = 12x^2 - 12$. $f''(x) > 0$ за $|x| > 1$, а $f''(x) < 0$ за $|x| < 1$. Тачке $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ су превојне.
б) $f''(x) > 0$ за све x; нема превојних тачака ξ.
в) $f''(x) > 0$ за $x > 1$, $f''(x) < 0$ за $x < 1$. Тачка $x_1 = 1$ је превојна.
г) $f''(x) > 0$ за $x < -6$ и $0 < x < 6$, $f''(x) < 0$ за $-6 < x < 0$ и $x > 6$. Тачке $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$ су превојне.
д) $f''(x) > 0$ за $x < -1$, $f''(x) > 0$ за $x > -1$, тачка $x_1 = -1$ је превојна.
ђ) $f''(x) > 0$ за $x < -3$ и $x > -1$, $f''(x) < 0$ за $-3 < x < -1$; тачке $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$ - превојне.
е) $f''(x) > 0$ за $-1 < x < 1$, $f''(x) < 0$ за $|x| > 1$ и превојне тачке су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.
ж) $f''(x) > 0$ за $x \in \big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$, $f''(x) < 0$ за $x \in \big((2k+1)\pi, (2k+2)\pi\big)$, $k \in Z$. Тачке $x_k = k\pi$ су превојне.
з) $f''(x) > 0$ за $x < 0$, $f''(x) > 0$ за $x > 0$. Тачка $x_1 = 0$ је превојна.

229. а) $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0$ за све x.

230. а) $m = 2$; б) $a = \dfrac{1}{6}$, $b = -1$.

231. а) Како је $f''(x) = \dfrac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$, график функције има три превојне тачке за $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$. Како је $f(1) = 1$, $f(-2 \pm \sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3})$, једноставно се доказује да све три ове тачке припадају правој $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4}$.

232. 1° **Дефинисаност**
Функција је дефинисана за $(x+1)^2 \neq 0$, тј. за $x \neq -1$, тј. њен домен је $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
2° **Нуле функције**
Функција је једнака нули за $x^3 = 0$, тј. за $x = 0$. Дакле, $f(0) = 0$ и график функције садржи координатни почетак.
3° **Знак функције**
Како је $2(x+1)^2 \geq 0$, знак функције једнак је знаку израза x^3; дакле, за $x > 0$ функција је позитивна, а за $x < 0$ – негативна.
4° **Парност, непарност, периодичност**
$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \dfrac{-x^3}{2(x-1)^2} \neq \pm f(x)$. Дакле, функција није ни парна, ни непарна. Takође, функција није периодична.

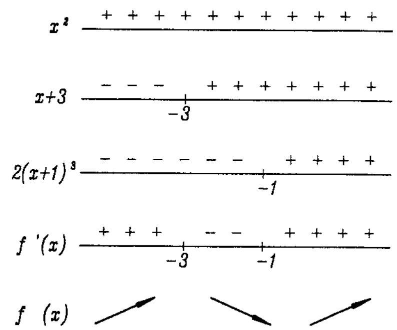
5° **Асимптоте**

а) *Вертикалне асимптоте.* Како је $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$, функција $y = f(x)$ има вертикалну асимптоту $x = -1$.

б) *Хоризонталне асимптоте.* Из $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следи да график функције нема хоризонталних асимптота. в) *Косе асимптоте.* График има косу асимптоту, јер је $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2(x+1)^2 x} = \dfrac{1}{2}$ и $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2(x+1)^2} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + x)}{2(x+1)^2} = -1$. Једначина косе асимптоте је $y = \dfrac{x}{2} - 1$. Да бисмо одредили како график функције тежи асимптоти, посматрамо $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (kx - n)) = \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}) - \dfrac{1}{x}x + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{2(x+1)^2} = \begin{cases} +0, & x \to +\infty \\ -0, & x \to -\infty \end{cases}$. Дакле, за $x \to +\infty$ график функције је "изнад" асимптоте, а за $x \to -\infty$ "испод" асимптоте (видети слику).

6° **Извод функције, монотонија, екстремуми**

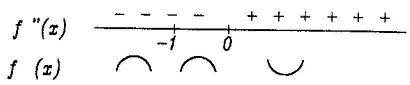
Како је $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$ знак првог извода се једноставно утврђује применом таблице:



Дакле, функција је растућа ($f'(x) > 0$) за $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, а опадајућа ($f'(x) < 0$) за $x \in (-3, -1)$. Тачка $x_0 = 3$ у којој први извод мења знак (од + ка −) је тачка максимума, док у тачки −1 функција није дефинисана, па ово не може да буде екстремна тачка.

7° **Други извод функције, конвексност, превојне тачке**

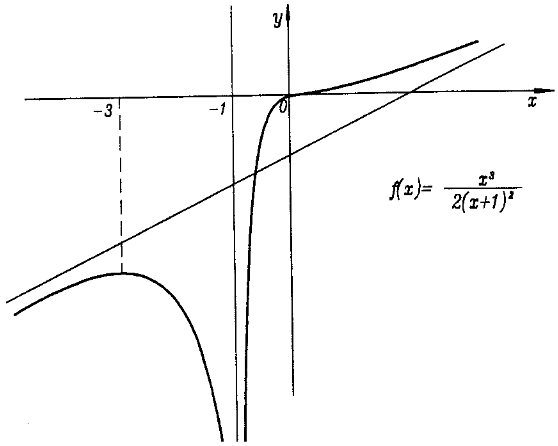
Како је $f"(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ и $(x+1)^4 > 0$ очигледно је $f"(x) > 0$ за $x > 0$ и у тим тачкама је функција конвексна, а $f"(x) < 0$ за $x < 0$ и у тим тачакама је функција конкавна. Тачка $90, 0)$ у којој други извод мења знак је превојна тачка графика:



8° **График функције**

График је приказан на слици.

Напомена. Решење једначине $\dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = \dfrac{x}{2} - 1$, $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ је пресечна тачка графика функције и косе асимптоте.

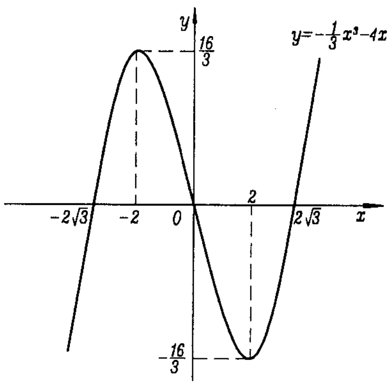


Сл. уз зад. 232

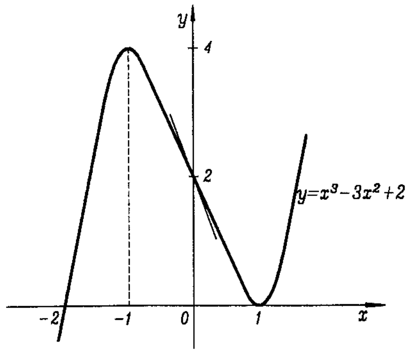
233. 1° Дефинисана је за $x \in \mathbf{R}$. 2° $y = 0$ за $x = 0$, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$; $f(0) = 0$ – график пролази кроз координатни почетак. 3° График функције нема асимптоте јер је функција полином. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$. 4° $y' = x^2 - 4$, $y" = 2x$. 5° Максимум је у тачки $\left(-2, \frac{16}{3}\right)$, а минимум у тачки $\left(2, -\frac{16}{3}\right)$. 6° $f(-x) = -f(x)$, функција је непарна. 7° $f"(x) > 0$ за $x \in (0, +\infty)$ – график функције је конкавна крива; $f"(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$, па је у том интервалу функција конвексна. 8° За $x = 0$ је $f'''(0) = 2 \neq 0$, па је $x = 0$ апсциса превојне тачке криве чија ордината је $y = f(0) = 0$. 9° $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, па је у тим интервалима функција монотоно растућа. $f'(x) < 0$ за $x \in (-2, 2)$, па је у том интервалу функција монотоно опадајућа.

Напомена. Ако функција f има у тачки C други извод једнак нули: $f"(C) = 0$ и дефинисан трећи извод $f'''(C)$, који је рзличит од нуле, онда функција у тачки C има превој.

б) – и) Графике функција задатка 233 видети на сликама 233б до 233и.

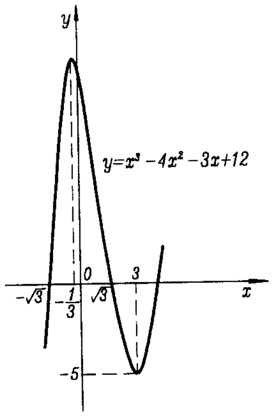


Сл. уз зад. 233а

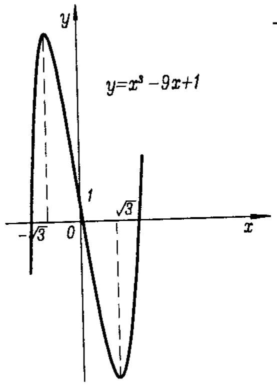


Сл. уз зад. 233б

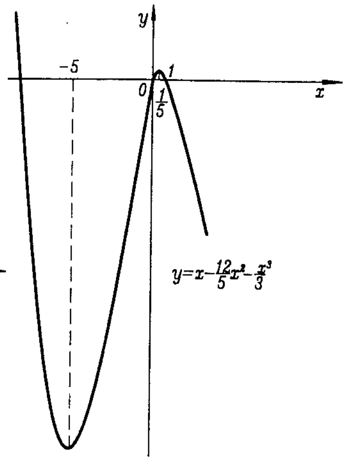
ј) $y' = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Тачке $x_1 = -2$ и $x_3 = 1$ су тачке максимума, а у



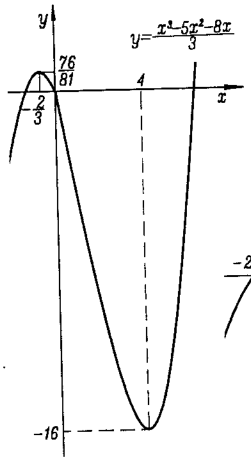
Сл. уз зад. 233в



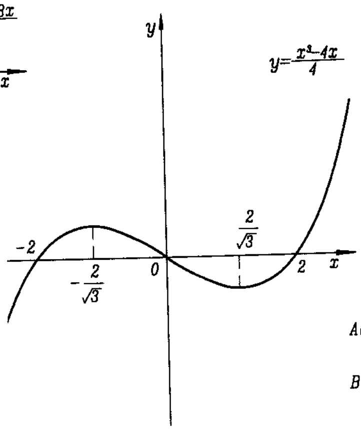
Сл. уз зад. 233г



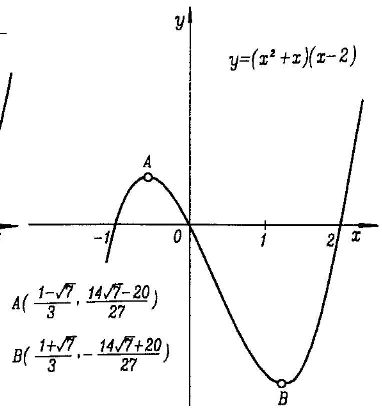
Сл. уз зад. 233д



Сл. уз зад. 233ђ



Сл. уз зад. 233е



Сл. уз зад. 233ж

тачкама $x_2 = -1$ и $x_4 = 2$ функција има минимум. $y'' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$. Превојне тачке су $x_5 = 0$, $x_{6,7} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ (видети слику).

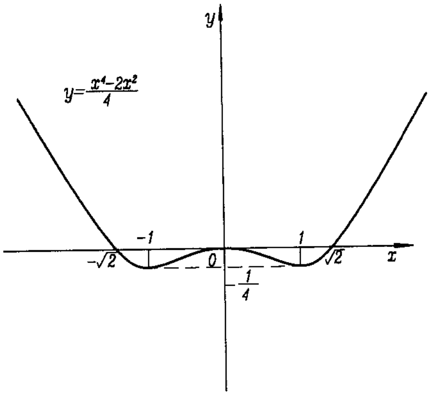
к) Функција је парна. $y' = 2x(1 - x^2)$, $y'' = 2(1 - 3x^2)$ У тачкама $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ функција има максимум, а у тачки $x_3 = 0$ - минимум. У тачкама $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{18})$ и $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{8})$ график функције има превоје (видети слику).

л) $y' = 3x^2 + 3$, $y" = 6x$. Функција је стално растућа. Тачка $M(0, 2)$ је превојна.

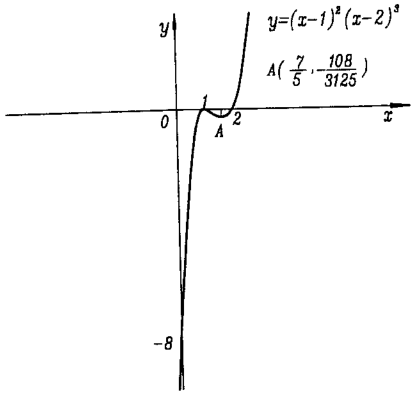
љ) $y' = 4x(x^2 - 3)$, $y" = 12(x^2 - 1)$. Функција има минимуме у тачкама $(-\sqrt{3}, -\sqrt{9})$ и $(\sqrt{3}, -\sqrt{9})$, а максимум у тачки $(0, 0)$; превојне тачке су $(-1, -5)$ и $(1, 5)$.

234. а) Видети слику.

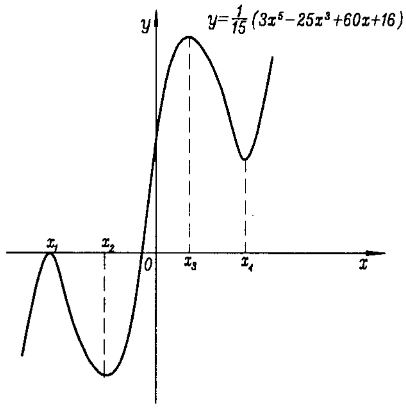
б) Функција је дефинисана за све x и парна. $y_{\max} = 3$ за $x = 0$, $y_{\min} = -1$ за $x = \pm 2$. График нема асимптоте, ни превојне тачке. У тачки $(0, 3)$ график функције има разне тангенте.



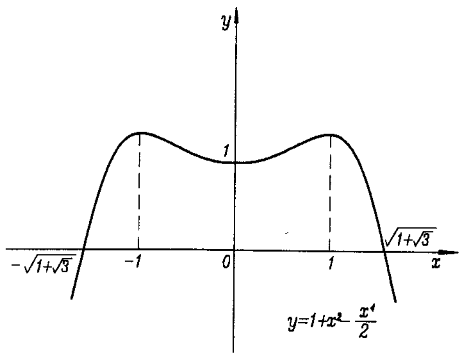
Сл. уз зад. 233з



Сл. уз зад. 233и



Сл. уз зад. 233j



Сл. уз зад. 233к

в) Функција је парна, $y_{\max} = 1$ за $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ за $x = 0$. Нема превојних тачака.

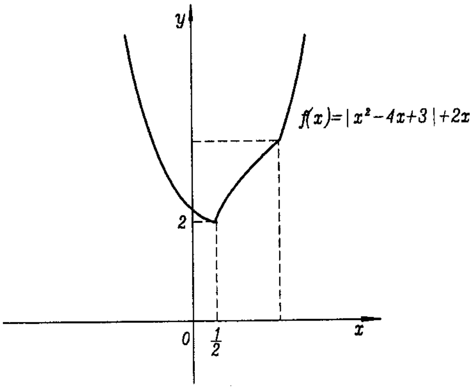
235. а) Дефинисана за $x \neq -1$ и $x \neq 1$; праве $x = -1$ и $x = 1$ су вертикалне асимптоте; $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ за све x па је функција стално опадајућа; $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; $(0,0)$ је превојна тачка. (видети слику).

б) $x = -1$ је вертикална асимптота; $f'(x) = \dfrac{3(1-2x^3)}{(1+x^3)^2}$, тачка $x_1 = \sqrt[3]{1/2}$ је максимум; $f''(x) = \dfrac{18x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3}$ — тачка $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ је превојна (видети слику).

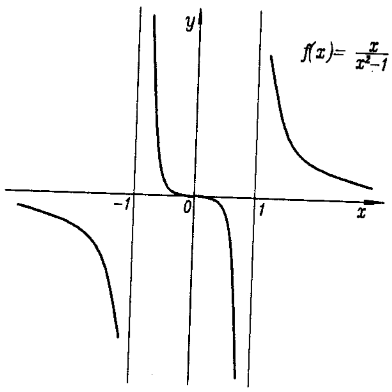
в) – ђ) Видети слике.

е) $y' = \frac{-3x+5}{(x+1)^3}$; $y'' = \frac{6(x-3)}{(x+1)^4}$ (видети слику).

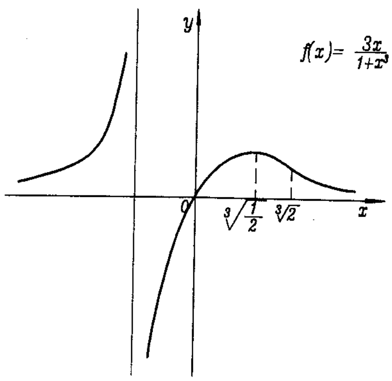
ж) Вертикална асимптота: $x = 2$; коса асимптота $y = -x + 4$; $y' = \frac{(1-x)(x-3)}{(x-2)^2}$, минимум у тачки $(1, 4)$, максимум у тачки $(3, 0)$; $y'' = \frac{-2}{(x-2)^3}$, $x_0 = 2$ - превојна тачка (видети



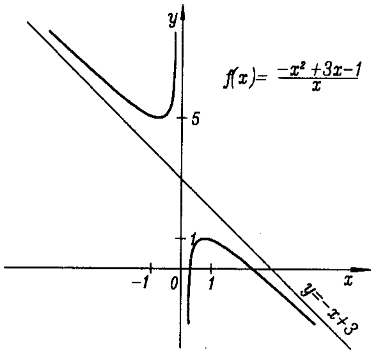
Сл. уз зад. 234



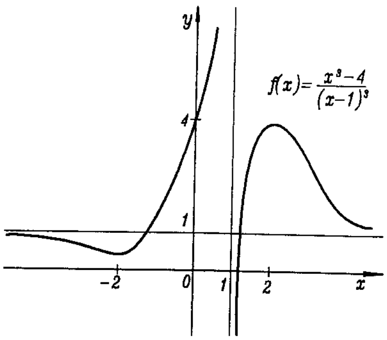
Сл. уз зад. 235а



Сл. уз зад. 235б



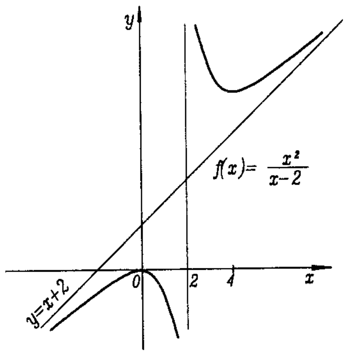
Сл. уз зад. 235в



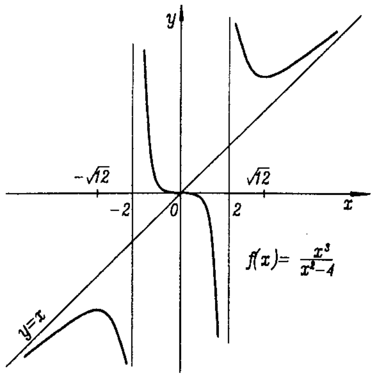
Сл. уз зад. 235г

слику).

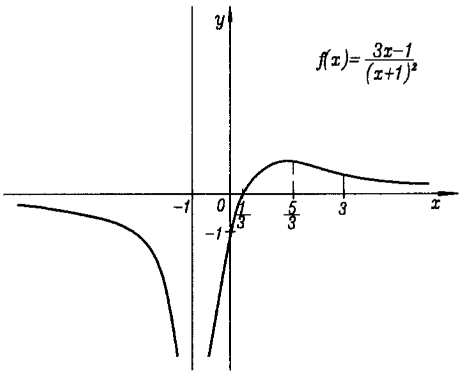
з) Функција је дефинисана и непрекидна за све $x \in \mathbf{R}$. Једина нула функције је $x = 0$. За $x > 0$ је $f(x) > 0$, а за $x < 0$ је $f(x) < 0$. Због $f(-x) = -f(x)$, функција је непарна, па је њен



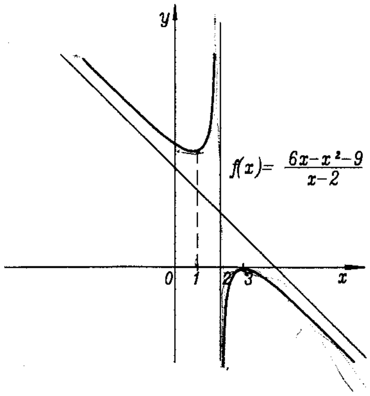
Сл. уз зад. 235д



Сл. уз зад. 235ђ



Сл. уз зад. 235е



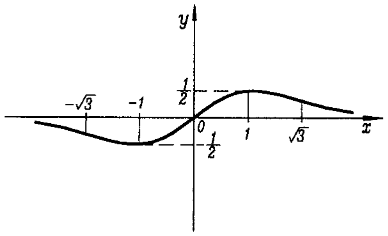
Сл. уз зад. 235ж

график централно симетричан у односу на координатни почетак. Пошто је $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, то график има хоризонталну асимптоту $y=0$, вертикалних и косих асимптота нема. Како је $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, то је $y'>0$ тј. функција је растућа за $-1<x<1$, а $y'<0$ — функција опадајућа за $x<-1$ или $x>1$. Тачке $x_1=-1$ и $x_2=1$ су тачке минимума, односно максимума. Пошто је $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, налазимо да је $y''>0$ за $-\sqrt{3}<x<0$ или $x>\sqrt{3}$ (функција је конвексна), а $y''<0$ за $x<-\sqrt{3}$ до $0<x<\sqrt{3}$ (функција је конкавна). Тачке $(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4})$, $(0,0)$ и $(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ су превојне. График је приказан на слици.

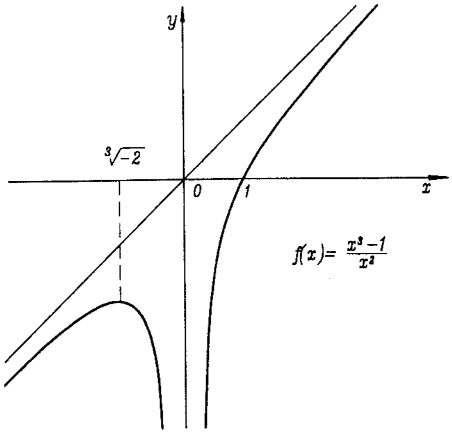
и) Функција је дефинисана за $x\neq 0$ има нулу $x_0=1$, вертикалну асимптоту $x=0$ и косу асимптоту $y=x$. Изводи функције су $y'=\frac{x^3+2}{x^3}$ и $y''=-\frac{6}{x^4}$. У тачки $(-\sqrt[3]{2},-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$ функција има минимум (видети слику).

ј) Функција је дефинисана за $x\neq 1$, има нулу $x_0=0$. Изводи су $y'=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$ и $y''=\frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$. У тачки $(\frac{3}{2},\frac{27}{4})$ функција има минимум, а тачка $(0,\,0)$ је превојна (видети слику).

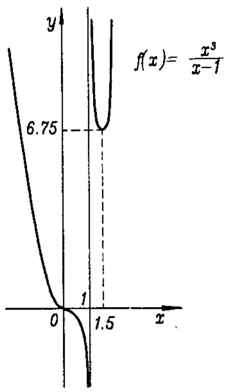
к) Права $x=0$ је вертикална асимптота. $y'=x-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{x^3+2}{x^3}$. Минимум функције је у



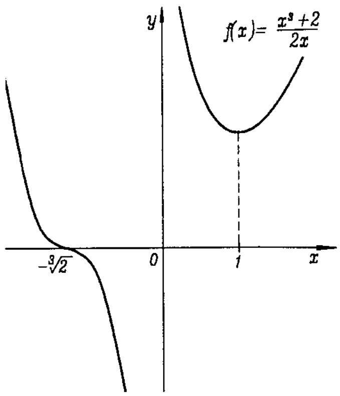
Сл. уз зад. 235з



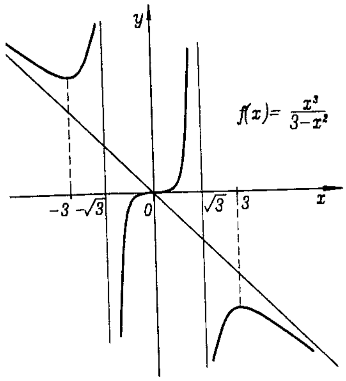
Сл. уз зад. 235и



Сл. уз зад. 235j



Сл. уз зад. 235к



Сл. уз зад. 235л

81
−48
33

тачки $x_1 = 1$; за $x = -\sqrt[3]{2}$ функција има превој (та тачка је истовремено и нула функције) (видети слику).

л) Коса асимптота: $y = -x$; вертикалне асимптоте $x = \pm\sqrt{3}$; $y' = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$; $y'' = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$ (видети слику).

м) Функција је парна – има хоризонталну асимптоту $y = 1$ и вертикалне асимптоте $x = 1$ и $x = -1$; $y' = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, па је $(0,0)$ тачка максимума; $y" = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.

н) Коса асимптота: $y = -x$; $y' = \dfrac{3-x^2}{(1-x^2)^2}$, $y" = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$. Минимум је у тачки $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, а максимум у тачки $\left(\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$. Превојна тачка је $(0,0)$. Функција је непарна.

њ) Вертикална асимптота: $x = 0$, хоризонтална асимптота $y = 1$; $y' = \dfrac{x-2}{x^3}$, $y" = \dfrac{2(3-x)}{x^4}$. Минимум је у тачки $\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$, а превојна тачка је $\left(3, \dfrac{7}{9}\right)$.

о) Вертикална асимптота: $x = -1$, хоризонтална асимптота $y = -1$; $y' = \dfrac{4-6x}{(x+1)^3}$, $y" = \dfrac{6(2x-3)}{(x+1)^4}$. Максимум је у тачки $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}\right)$, а превојна тачка је $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{5}\right)$.

п) $y' = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$, $y" = \dfrac{2(x-2)}{(x+1)^4}$.

р) Коса асимптота графика је $y = x$. Како је $y' = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ то је минимум функције у тачки $(2,4)$, а максимум у тачки $(-2,4)$; $y" = \dfrac{8}{x^3}$ и нема превојних тачака.

с) Вертикална асимптота $x = -2$, коса асимптота $y = x$; $y' = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$, $y" = \dfrac{8}{(x+2)^3}$. Минимум – $(0,2)$, максимум – $(-4,-6)$.

т) Функција је непарна. Асимптоте – $x = 0$ и $y = 0$; $y' = \dfrac{3(1-x^2)}{x^4}$, $y" = \dfrac{6(x^2-2)}{x^5}$, па су минимум за $x_1 = -1$, максимум за $x_2 = 1$, а превоји за $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

ћ) Коса асимптота: $y = x + 5$ $y' = \dfrac{x^2-8x+8}{(x-4)^2}$, $y" = \dfrac{16}{(x-4)^3}$, максимум за $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$, минимум за $x_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

у) Коса асимптота $y = x$; $y' = \dfrac{x^4+x^2+6}{x^4}$, $y" = \dfrac{-2(x^2+12)}{x^5}$.

236. а) $f(x) = \dfrac{3+\cos 4x}{4}$;

б) Функција је дефинисана у интервалима $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Период је 2π, а функција је парна. Асимптоте $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y_{\max} = 0$ за $x = 2k\pi$. График нема превојних тачака.

в) Функција је дефинисана у интервалима $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Функција је парна и периодична са периодом 2π; $y_{\min} = 1$ за $x = 2k\pi$; асимптоте: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; график нема превојних тачака.

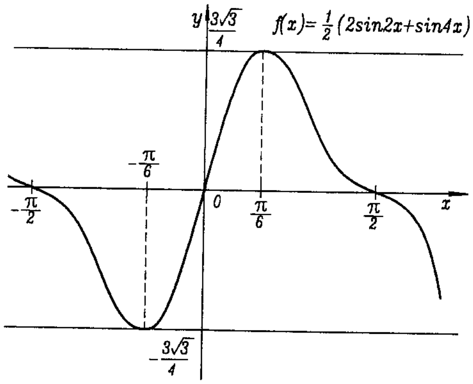
г) Функција је свуда дефинисана и непарна. Нема асимптота, ни екстрема. Превојне тачке су $(k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. У превојним тачкама график сече праву $y = x$.

д) Крива се налази између правих $y = x + 1$ и $y = x - 1$. За $x = (2k+1)\pi$ крива додирује праву $y = x + 1$, а за $x = 2k\pi$ додирује праву $y = x - 1$, док за $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ крива сече праву $y = x$. Нема екстрема.

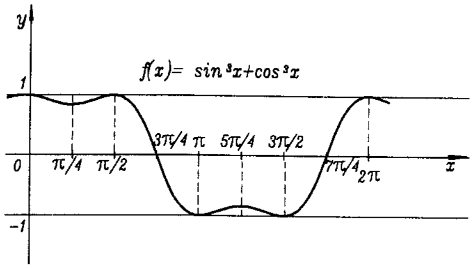
ђ) Функција је периодична са периодом 2π. За $x \in [0, 2\pi]$, нуле: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$; максимуми $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{4}$ и $y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{4}$, минимуми $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ и $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$, четири превојне тачке за $\sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$.

е) Функција је периодична са периодом 2π; нуле: $x_k = k\pi$, максимуми за $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, минимуми за $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$, превојне тачке за $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

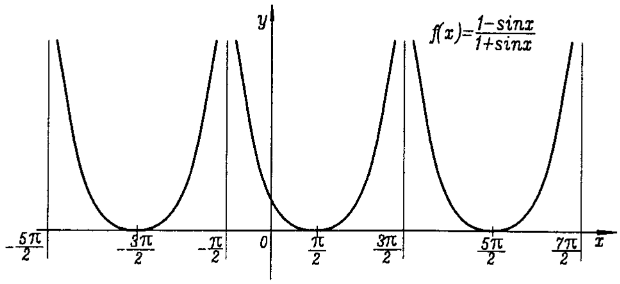
ж) Функција је непарна и периодична са периодом π. Из $y' = 4\cos 3x \cos x$ налазимо да су тачке $x_k = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ тачке максимума, а тачке $x_l = \frac{\pi}{2} + l\pi$ - минимума. Како је $y'' = -4\sin 2x(1 + 4\cos 2x)$, то су $x_k = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + k\pi$, $x_m = m\pi$ и $x_l = \frac{\pi}{2} + l\pi$ превојне тачке (видети слику), $k, l, m \in \mathbf{Z}$.



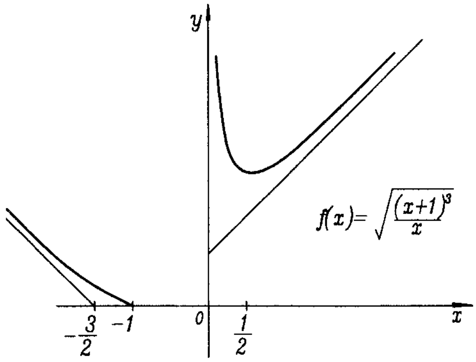
Сл. уз зад. 236ж



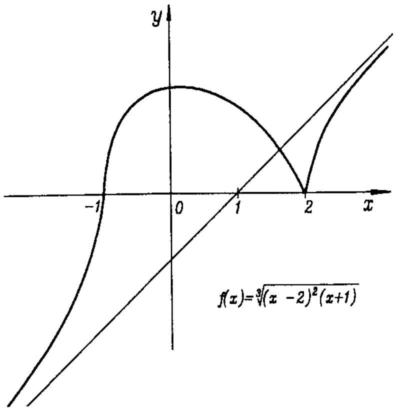
Сл. уз зад. 236з



Сл. уз зад. 236и



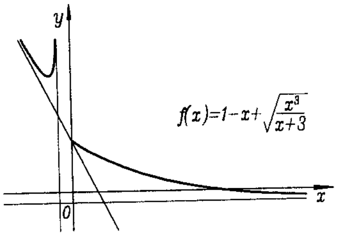
Сл. уз зад. 237а



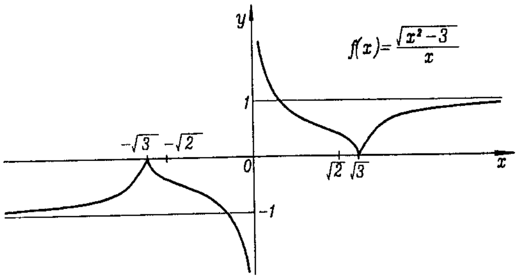
Сл. уз зад. 237б

з) Период функције је $T = 2\pi$; нуле су $x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $y' = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$, минимуми: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, максимуми: $2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $y'' = 3(\sin x + \cos x)(\frac{3}{2}\sin 2x - 1)$ (видети слику).

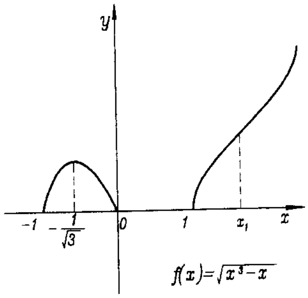
и) $y' = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$, $y'' = \frac{-2\sin^2 x + 2\sin x + 4}{(1+\sin x)^3} \geq 0$ за све x (видети слику).



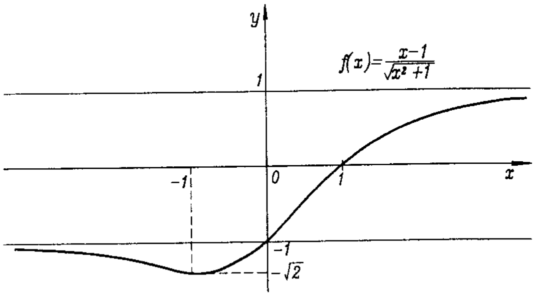
Сл. уз зад. 237в



Сл. уз зад. 237г



Сл. уз зад. 237д

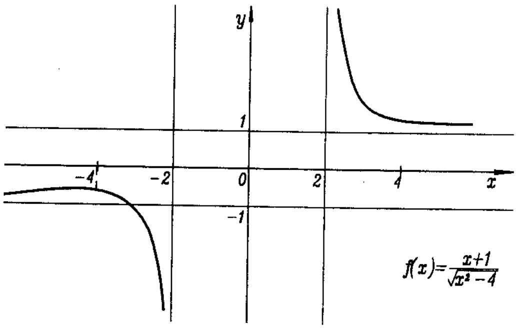


Сл. уз зад. 237ђ

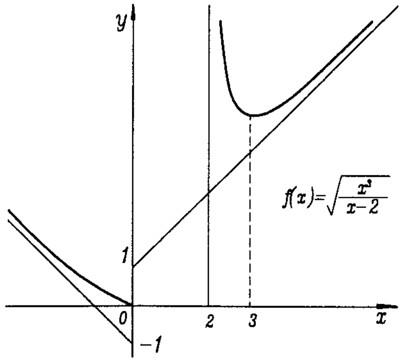
237. а) Косе асимптоте $y = x + \dfrac{3}{2}$ $(x \to +\infty)$ и $y = -\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$, $(x \to -\infty)$; вертикалне асимптоте $x = 0$; $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x^3}}$; $x_1 = \dfrac{1}{2}$ — минимум; $f''(x)$ је позитиван за све x из области дефинисаности, па нема превојних тачака (видети слику).

б) Коса асимптота $y = x - 1$; $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$. $x_1 = 0$ — максимум, $x_1 = 2$ — минимум функције; $f''(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)^5}}$ — $(-1, 0)$ — превојна тачка (видети слику).

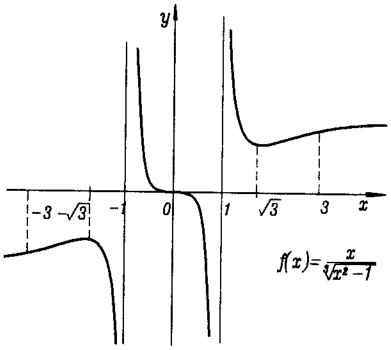
в) Хоризонтална асимптота $y = -\dfrac{1}{2}$ за $x \to +\infty$ и коса асимптота $y = -2x + \dfrac{5}{2}$ за $x \to -\infty$, $y' = -1 + \dfrac{(2x+9)\sqrt{x(x+3)}}{2(x+3)^2}$; $y'' = \dfrac{27}{4(x+3)^2\sqrt{x(x+3)}} > 0$ за све x (видети слику).



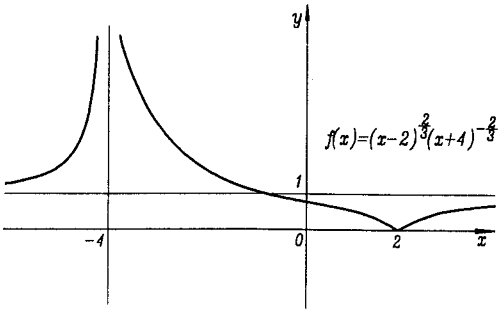
Сл. уз зад. 237е



Сл. уз зад. 237ж



Сл. уз зад. 237з



Сл. уз зад. 237и

г) Функција је непарна. Означимо са $f_1(x)$ функцију за $x > 0$ — њена асимп тота је права $y = 1$;

$$f_1'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{x^2\sqrt{3-x^2}}, & x \in (0,\sqrt{3}) \\ \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2-3}}, & x > \sqrt{3} \end{cases} \qquad f_1''(x) = \begin{cases} \dfrac{9(2-x^2)}{x^3(3-x^2)^{3/2}}, & x \in (0,\sqrt{3}) \\ \dfrac{-9(x^2-2)}{x^3(x^2-3)^{3/2}}, & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

Минимум функције $f_1(x)$ је тачка $x_1 = \sqrt{3}$, а за $x = \sqrt{2}$ је превојна тачка (видети слику).

д) Функција је дефинисана за $-1 \le x \le 0$, $x \ge 1$. $f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$, $f''(x) = \dfrac{3x^4-6x^2-1}{4(x^3-x)^{3/2}}$.

Максимум је $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, а превојна тачка за $x_1 = \sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ (видети слику).

ђ) $y' = \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$, $y'' = \frac{-2x^2-3x+1}{(x^2+1)^{5/2}}$ (видети слику).

е) Хоризонталне асимптоте: $y = 1$, $y = -1$, вертикалне асимптоте $x = 2$, $x = -2$; $y' = \frac{-(x+4)}{(x^2-4)^{3/2}}$, $y'' = \frac{2(x^2+6x+2)}{(x^2-4)^{5/2}}$ (видети слику).

ж) Функција није дефинисана за $0 < x < 2$. Вертикална асимптота $x = 2$; косе асимптоте - $y = -x-1$ $(x \to -\infty)$ и $y = x+1$ $(x \to +\infty)$; $y' = (x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}}$; $y'' = \frac{3x}{(x-2)^3}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$ (видети слику).

з) $f'(x) = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $f''(x) = \frac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$ (видети слику).

и) $f'(x) = \frac{4}{(x-2)^{1/3}(x+4)^{5/3}}$, $f''(x) = \frac{-8(x-1)}{(x-2)^{4/3}(x+4)^{8/3}}$ (видети слику).

j) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, $y" = -\dfrac{1+3\sqrt{x}}{2x(1+\sqrt{x})^3}$.

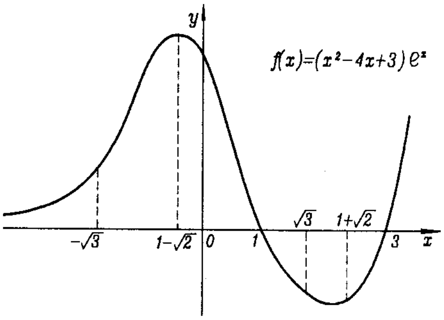
к) Функција је дефинисана за $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. Вертикална асимптота је права $x = -1$, а хоризонтална $y = 1$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}} > 0$ за све x из области дефинисаности, па је функција стално растућа; $y" = \dfrac{1-2x}{\sqrt{(x-1)^3(x+1)^5}}$.

л) Функција је парна, дефинисана за $-1 < x < 1$ и има две вертикалне асимптоте: $x = -1$ и $x = 1$. Како је $y' = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ и $y" = \dfrac{x^2+2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, то је тачка $O(0,0)$ минимум функције, а превојних тачака нема.

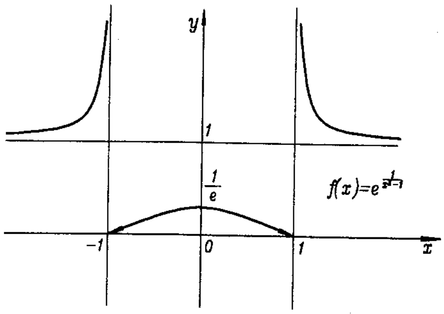
љ) $y' = \dfrac{21-3x}{2\sqrt{10-x}}$, $y" = \dfrac{3(x-13)}{4(10-x)^{\frac{3}{2}}}$.

м) $y' = 4 - 4x^{\frac{1}{3}}$, $y" = -\dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Максимум је у тачки $(1,1)$.

238. *Напомена*: За налажење граничних вредности користимо задатак 241 или Лопиталову теорему.



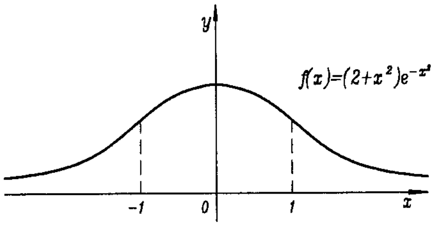
Сл. уз зад. 238а



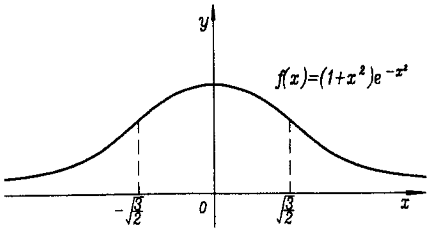
Сл. уз зад. 238б

а) Хоризонтална асимптота $y = 0$ за $x \to -\infty$; $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$ — максимум у тачки $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, минимум у тачки $x_2 = 1 + \sqrt{2}$; $f''(x) = (x^2 - 3)e^x$, превојне тачке су за $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ (видети слику).

б) Парна функција; хоризонтална асимптота $y = 1$, вертикалне асимптоте $x = -1$ и $x = 1$; $f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $x_1 = 0$ - максимум; $f''(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \dfrac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}$, за $x = \pm\sqrt[4]{1/3}$ — превојне тачке (видети слику).



Сл. уз зад. 238в



Сл. уз зад. 238г

в) Парна функција; $y = 0$ хоризонтална асимптота; $f'(x) = -2xe^{-x^2}(1 + x^2)$ — $x_1 = 0$ — максимум; $f''(x) = 4(x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ за $x = \pm 1$ — превојне тачке (видети слику).

г) Парна функција; $y = 0$ — хоризонтална асимптота; $f'(x) = -2x^3e^{-x^2}$ — $x_1 = 0$ — максимум; $f''(x) = 2x^2e^{-x^2}(2x^2 - 3)$ — превојне тачке су за $x = -\sqrt{3/2}$ и $x = \sqrt{3/2}$ (видети слику).

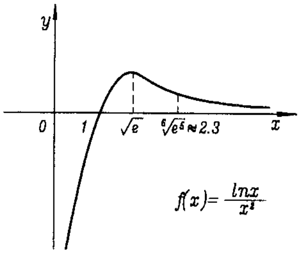
д) Хоризонтална асимптота $y = 0$; $y' = e^{-x}(1 - x)$, $y'' = e^{-x}(x - 2)$; $x_1 = 1$ — минимум; $(2, 2e^{-2})$ — превојна тачка.

ђ) Хоризонтална асимптота $y = 0$ (за $x \to -\infty$), вертикалне асимптоте графика су праве $x = -2\sqrt{2}$ и $x = 2\sqrt{2}$; $y' = \dfrac{e^x(x^2 - 2x - 8)}{(x^2 - 8)^2}$, $x_1 = -2$ — тачка максимума; $x_2 = 4$ — тачка минимума функције.

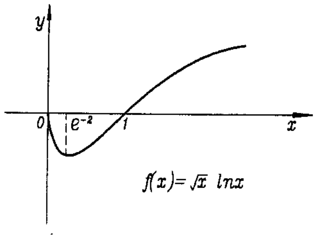
е) Функција је дефинисана за $x \geq 0$; нула функције је тачка $x_0 = 0$; хоризонтална асимптота графика је права $y = 0$ за $x \to +\infty$. Максимум функције је у тачки $x_1 = \dfrac{1}{2}$, а превојна тачка је за $x = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

ж) Како је $y' = \dfrac{e^x(1 + 2x)}{2\sqrt{x}}$ и $y" = \dfrac{e^x(4x^2 + 4x - 1)}{4x\sqrt{x}}$, то је за све $x > 0$ функција растућа и има превој у тачки $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{2}}{8}$.

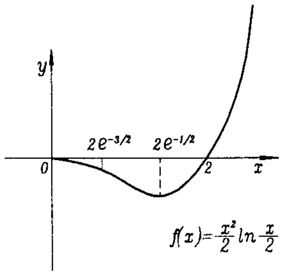
з) Вертикална асимптота: $x = 0$, коса асимптота: $y = x - 1$; $y' = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $y" = e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^{-3}$. Минимум је у тачки $(-1, -e)$.



Сл. уз зад. 239а



Сл. уз зад. 239б

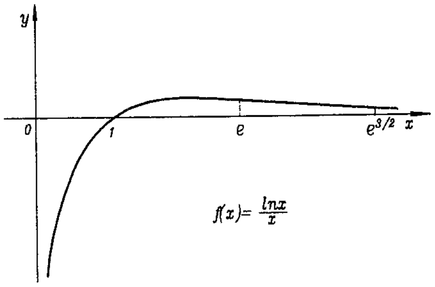


Сл. уз зад. 239в

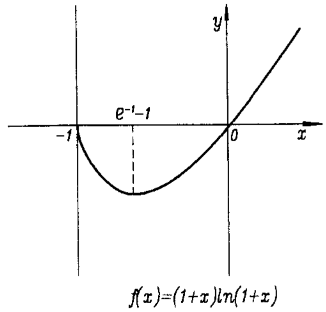
239. а) Функција је дефинисана за $x > 0$, има вертикалну асимптоту $x = 0$ и хоризонталну асимптоту $y = 0$. Како је $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$, $f''(x) = \dfrac{6\ln x - 5}{x^4}$, налазимо да је тачка $x_1 = \sqrt{e}$ максимум функције, а за $x = \sqrt[6]{e^5}$ превојна тачка (видети слику).

б) Функција је дефинисана за $x > 0$. Како је $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, функција нема асимптоте. Из $f'(x) = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ одређујемо да је минимум функције у тачки $x_1 = e^{-2}$, а превојна тачка $(1, 0)$ (видети слику). Како је $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = \infty$ у нули функција има вертикалну тангенту.

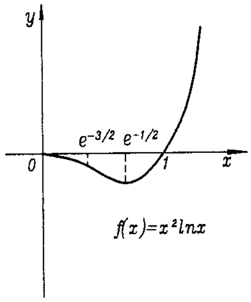
в) Из $y' = \dfrac{x}{2}\left(2\ln\dfrac{x}{2} + 1\right)$, $y'' = \ln\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$ одређујемо минимум у тачки $x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$, а превој за $x = \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ (видети слику).



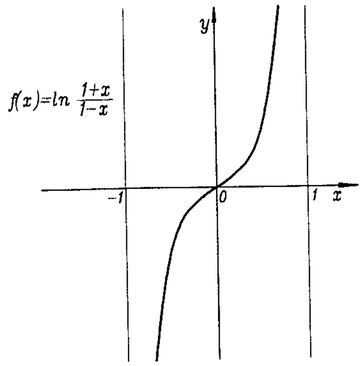
Сл. уз зад. 239г



Сл. уз зад. 239д



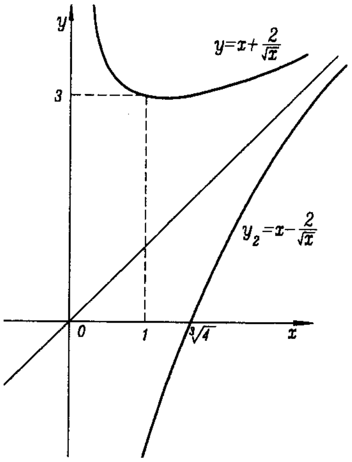
Сл. уз зад. 239ђ



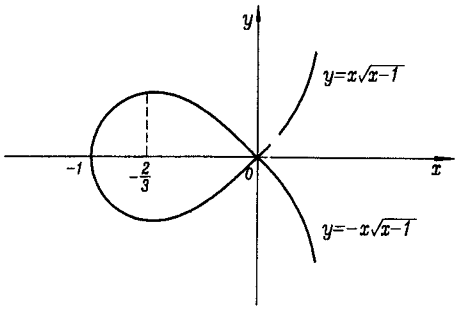
Сл. уз зад. 239е

г) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$. За $x=e$ функција има максимум, за $x=e^{3/2}$ превојну тачку (видети слику).
д) $f'(x)=1+\ln(1+x)$, $f''(x)=\frac{1}{1+x}>0$ за све x (видети слику).
ђ) $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $f''(x)=2\ln x+3$ (видети слику).
е) Функција је дефинисана за $|x|<1$ и непарна. Како је $y'=\frac{2}{1-x^2}$ функција је растућа; $y''=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$, (видети слику).
ж) Функција је дефинисана за $x>0$ и $x\neq 1$ и има вертикалну асимптоту $x=1$. Како је $y'=\dfrac{\ln x-2}{(\ln x)^3}$ и $y"=\dfrac{2(3-\ln x)}{x(\ln x)^4}$ то је тачка $\left(e^2,\dfrac{e^2}{4}\right)$ минимум, а превојна тачка је $\left(e^3,\dfrac{e^3}{9}\right)$.
з) Функција је дефинисана за $x>1$ и има вертикалну асимптоту $x=1$. Како је $y'=\dfrac{x-2}{x-1}$ то је минимум у тачки $(2,2)$ и функција је за све $x>1$ позитивна, а како је $y"=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, то нема превојних тачака.
и) $y'=\dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$, $y"=\dfrac{x^2+2x+2}{2(x+1)^2}$. Минимум је у тачки $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

240. а) График се састоји од графика две функције: $y_1=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ и $y_2=x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Обе функције су дефинисане за $x>0$ и имају асимптоте $x=0$ и $y=x$. Како је $y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ ова функција има минимум за $x=1$, док је због $y_2'=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}>0$ функција y_2 растућа за све $x > 0$. Једноставно се налази да је $y_1'' = \dfrac{3}{2\sqrt[5]{x}} > 0$, $y_2'' = \dfrac{-3}{2\sqrt[5]{x}} < 0$ за све $x > 0$ (видети слику).



Сл. уз зад. 240а



Сл. уз зад. 240г

б) График је симетричан у односу на x-осу; област дефинисаности $x \geq 0$; асимптота је права $y = 0$; за $x = 1$ екстреми $y = \pm\dfrac{1}{e}$.

в) Област дефинисаности $|x| < \sqrt{2}$; график је симетричан у односу на x-осу и y-осу; за $x = \pm 1$ екстреми $y_e = \pm 1$; нуле у тачкама $x_1 = 0$ $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

г) Област дефинисаности је $x \geq -1$. График се састоји од графика функција $y_1 = x\sqrt{x+1}$ и $y_2 = -x\sqrt{x+1}$, који су симетрични у односу на x-осу (видети слику). Функција y_1 има максимум за $x = -\dfrac{2}{3}$. Тачка $(0,0)$ је тачка самопресека криве.

241. а) Најпре се математичком индукцијом по n и коришћењем чињенице да је извод функције позитиван ако и само ако је та функција растућа доказује неједнакост

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Нека је сада n природан број већи од α. На основу претходне неједнакости важи:

$$0 \leq \frac{x^\alpha}{e^{kx}} < \frac{x^n}{e^{kx}} < \frac{x^n}{1 + kx + \dfrac{k^2x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{k^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}} < \frac{x^n}{\dfrac{k^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{k^{n+1}x},$$

одакле следи да је $0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{kx}} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{k^{n+1}x} = 0$, дакле $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{kx}} = 0$.

б) Нека је $a^x = e^{kx}$, $k = \ln a > 0$. Примени се а). в) Заменимо у а): $k = 1$, $e^x = t$; г) Заменимо у в): $t = \dfrac{1}{z}$, $\ln\dfrac{1}{z} = -\ln z$.

242. а) $-\dfrac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}$; б) $-3x\sqrt{1-x^2}$; в) $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$; г) $\dfrac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$;

д) $\dfrac{7\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{3\sqrt{x}}$; ђ) $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$; е) $\dfrac{15}{2}x\sqrt{x+1}$.

243. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$; в) $\arcsin x$; г) $3x^2\sin 2x^3$.

244. а) $\arcsin\sqrt{x}$; б) $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$; в) $\dfrac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$; г) $\dfrac{2}{5-3\cos x}$.

245. а) $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$; б) $e^{\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$; г) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

246. а) $\dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; в) $\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $\dfrac{4\sqrt{1-x^4}}{x^5}$.

247. а) $|x| = x\operatorname{sgn}x$, па је за $x\neq 0$ $y' = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0. \end{cases}$ У нули функција нема извод.

б) Како је $y = x^2\operatorname{sgn}x$, биће $y' = 2x\operatorname{sgn}x = 2|x|$. У овај резултат се уклапа и извод у нули, пошто је $y'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h|h|}{h} = 0$.

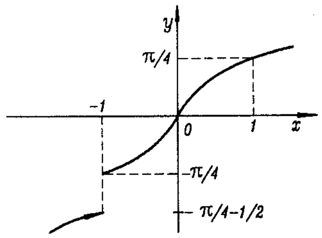
в) Функција има извод само у нули и тада је $y'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y(h)-y(0)}{h}\imath 0$.

г) $y' = 1/x$.

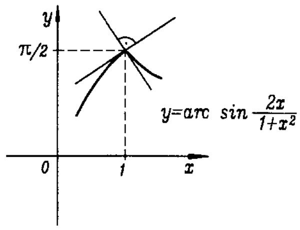
248. а) $\ln y = x\ln\sin x + \sin x\ln x$, па је $y' = y\left(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x + \cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$;

б) Нека је $y_1 = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $y_2 = x^{\sqrt{x}}$. Тада је $\ln y_1 = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $\ln y_2 = \sqrt{x}\ln x$, па је $y'_1 = y_1\left(\ln\dfrac{x+1}{x} + x\cdot\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{-1}{x^2}\right)$, $y'_2 = y_2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$, а $y' = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right) + x^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$;

в) $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a} a x^{a-1}\ln a + a^{a^x} a^x \ln^2 a$.



Сл. уз зад. 249



Сл. уз зад. 261

249. Непосредно се налази $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|<1 \\ \dfrac{1}{4}, & |x|>1. \end{cases}$ Ако постоји $f'(1)$ морало би да буде $\lim\limits_{h\to 0_+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0_-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Потражимо ове граничне вредности:

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1+h-1}{4}-\frac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{h\to 0_-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{\operatorname{arctg}(1-h)-\frac{\pi}{4}}{-h} = (\text{смена } \operatorname{arctg}(1-h) = t)$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-t}{1-\operatorname{tg} t} = \left(\text{смена } \frac{\pi}{4}-t=z\right) \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-\frac{1-\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg} z}}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{z(1+\operatorname{tg} z)}{2\operatorname{tg} z} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4},$$

према томе $f'(1)$ не постоји. У тачки -1 дата функција је прекидна, па не може имати извод. График функције скициран је на слици.

250. $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{h^2}-\frac{\pi}{2}}{h} = \left(\text{смена } t=\operatorname{arctg}\frac{1}{h^2}-\frac{\pi}{2}\right) \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{-\operatorname{tg} t}} = 0$, па је једноставно одредити $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^4+1}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ Одавде налазимо $f''(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{-2h}{h^4+1}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2}{h^4+1}$ $= -2$.

251. а) На $[0,\sqrt{2}]$ $f(x)$ задовољава услове Ролове теореме јер је диференцијабилна и непрекидна и $f(0)=f(\sqrt{2})=0$, $f'(\xi)=4\xi^2-4\xi=0$ за $\xi_1=1$. Тачка $\xi_2=0$ не задовољава услов да је унутрашња тачка интервала $[0,\sqrt{2}]$.
б) $\xi_1=-1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=1$; в) функција није диференцијабилна у нули; г) функција није диференцијабилна у нули; д) функција је прекидна у јединици; ђ) $\xi_1=2/3$; е) функција није диференцијабилна у нули јер не задовољава услове Ролове теореме. Ипак важи $f'(-1)=f'(1)=0$; ж) не, јер не постоји $f'(2)$.

252. Предпоставимо да постоји решење $x=a$, $a\neq 0$. Тада функција $f(x)=e^x-x-1$ задовољава услове Ролове теореме на интервалу $[0,a]$ (или $[a,0]$) јер је непрекидна и диференцијабилна $f(0)=f(a)=0$. Међутим, $f'(\xi)=e^{\xi}-1=0$ само за $\xi_1=0$, што противуречи тврђењу Ролове теореме да је $0<\xi_1<a$.

253. а) Функција задовољава услове Лагранжове теореме. Пошто је $f(b)=b^2$, $f(a)=a^2$, $f'(\xi)=2\xi$, то је $f'(\xi)=\dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\dfrac{b+a}{2}$ (за $b\neq a$).

б) $\xi=\dfrac{9}{4}$; в) Функција је прекидна у нули; г) Функција није диференцијабилна у нули. д) $\xi=\sqrt{4/\pi-1}$; ђ) $\xi=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$; е) $\xi=\dfrac{1}{\ln 2}$; з) За $x=\dfrac{\pi}{2}$ функција нема извод.

254. а) По Лагранжовој теореми је $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{8+1}{2+1}=3$, па је $3\xi^2=3$, због $-1<\xi<2$ мора бити $\xi=1$. б) $\xi=-1$; в) $\xi=-\dfrac{1}{2}$; г) $\xi=2$.

255. Пошто је за $x=1$: $\dfrac{3-x^2}{2}=\dfrac{1}{x}=1$ и за $x=1$: $\left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'$, односно $-x=-\dfrac{1}{x^2}=-1$, $f(x)$ је непрекидна и диференцијабилна функција у интервалу $[0,2]$, па задовољава услове Лагранжове теореме. Пошто је $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$, налазимо из $-\xi=-\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{\xi^2}=-\dfrac{1}{2}$ тачке $\xi_1=\dfrac{1}{2}$, $\xi_2=\sqrt{2}$.

256. а) Применом Лагранжове теореме у одсечку $[0,x]$ на функцију $f(x)=\ln(1+x)$ имамо $\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\dfrac{1}{1+\xi}$, па како је $\xi\in(0,x)$, то је $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$, тј. $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$, одакле множењем са x добијамо посматрану неједнакост. б) Применом Лагранжове теореме на интервалу $[1,x]$ за функцију $f(x)=e^x$.

257. а) Применом Лагранжове формуле за функцију $\operatorname{tg} x$ на интервалу $[\beta,\alpha]$ налазимо $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\cos^2\xi}$, а због $\beta<\xi<\alpha$, биће $\cos\alpha<\cos\xi<\cos\beta$ и $\dfrac{1}{\cos^2\beta}<\dfrac{1}{\cos^2\xi}<\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, одакле је $\dfrac{1}{\cos^2\beta}<\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\alpha-\beta}<\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Једнакости важе ако и само ако је $\alpha=\beta$. И у осталим случајевима поступа се на сличан начин. Треба применити Лагранжову теорему за функције:

б) $f(x)=x^n$ на $[b,a]$; в) $f(x)=\sin x$; г) $f(x)=\cos x$; д) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; ђ) $f(x)=\ln x$ на $[b,a]$.

258. а) Нека је $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$. Како је

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\dfrac{1+x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2}=\frac{x^2+x^3+(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2(1+x^2)}>0$$

за $x>0$ и $f(0)=0$, то је функција $f(x)$ растућа за $x>0$, тј. за све $x>0$ $f(x)>0$.

259. а) $f'(x)=0$ за $x\geq 1$, $f(x)=\pi$. б) $f(x)=\dfrac{3}{4}$; в) $f(x)=0$.

260. а) Означимо $f(x)=\operatorname{arctg} x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Како је $f'(x)=0$, то је $f(x)$ константа, а пошто је $f(0)=0$, то је $f(x)=0$, за све x.

261. Како је

$$y'=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|<1\\[2mm] \dfrac{-2}{1+x^2}, & |x|>1,\end{cases}$$

имамо да је $\lim\limits_{x\to 1_-} y'=1$ и $\lim\limits_{x\to 1_+} y'=-1$, одакле следи да је угао између леве и десне тангенте у тачки $x_1=1$ једнак 90^0 (видети слику).

262. Како је $f'(x)=\dfrac{12x^2}{p^2}-3$ функција $f(x)$ има у тачки $-\dfrac{p}{2}$ локални максимум, а у тачки $\dfrac{p}{2}$ локални минимум. Будући да је $f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=2p$, $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=0$, геометријско место тачака максимума је $\{(x,y)\mid y=-4x,\, x\neq 0\}$, а тачка минимума је скуп $\{(x,0)\mid x\neq 0\}$.

263. а) Имамо да је за $x\neq 1$:

$$S_1=(x+x^2+\cdots+x^n)'=\left(x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\right)'=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

За $x=1$ је $S_1=\dbinom{n+1}{2}$.

б) $S_2=(x^2+x^3+\cdots+x^{n+1})''$.

в) Диференцирати релацију $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$, $x\neq 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

г) Пођимо од релације $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$. Логаритмовањем леве и десне стране добијамо:

$$\ln\cos\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2^2}+\cdots+\ln\cos\frac{x}{2^n}=\ln\sin x-2^n\ln\sin\frac{x}{2^n},$$

а ако једнакост диференцирамо, због $\left(\ln\cos\frac{x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ итд., налазимо

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x.$$

264. *Упутство*: Применити математичку индукцију.

265. а) $y^{(8)} = x\cos x + 7\sin x$;

б) Нека је $u = x^2$, $v = e^{2x}$. Због $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = u^{IV} = \cdots = u^{(20)} = 0$, биће $(x^2e^{2x})^{(20)} = u^{(0)}v^{(20)} + 20u'v^{(14)} + \binom{20}{2}u''v^{(18)} = 2^{20}(x^2+20x+95)e^{2x}$;

в) $y^{(10)} = e^x\sum\limits_{n=0}^{10}(-1)^n\binom{10}{n}\frac{n!}{x^{n+1}}$;

г) Пошто је $y=\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 x$ и $\cos^{(n)}x = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, биће $y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$;

д) $(x^3e^x)^{(n)} = x^3e^x + n\cdot 3x^2e^x + \binom{n}{2}xe^x + \binom{n}{3}6e^x$;

ђ) $(x\operatorname{sh}x)^{(n)} = x\operatorname{sh}^{(n)}x + n\operatorname{sh}^{(n-1)}x = \begin{cases} x\operatorname{sh}x + n\operatorname{sh}x, & n - \text{парно}\\ x\operatorname{ch}x + n\operatorname{sh}x, & n - \text{непарно}\end{cases}$ $\left(qx = \dfrac{e^x+e^{-x}}{s}\right)$.

266. а) Ако је $u=x^2$, $v=e^{2x}$, по Лајбницовој формули налазимо $f^{(n)}(x) = u\cdot v^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} = x^2e^{2x} + n\cdot 2x\cdot 2^{n-1}e^{2x} + \binom{n}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}e^{2x}$, одакле је $f^{(n)}(0) = \binom{n}{2}\cdot 2^{n-1}$.

б) $f^{(n)}(0) = \binom{n}{2}\cdot 2\cdot(\ln 2)^{n-2}$;

в) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot n$;

г) $f^{(n)}(0) = \begin{cases} n!, & n - \text{парно}\\ 0, & n - \text{непарно}.\end{cases}$ *Упутство*: $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

267. Како је $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то је $(1+x^2)f'(x) = 1$. Применимо у овој релацији Лајбницову формулу за n-ти извод производа: $(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$ и заменимо у овој релацији $x=0$. Добија се $y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0)$. Пошто је $y'' = \dfrac{-2x}{1+x^2}$, биће $y''(0)=0$, па је и за све m $y^{(2m)}(0) = 0$, а

$$y^{(2m+1)}(0) = -(2m-1)\cdot(2m)y^{(2m-1)}(0) = (-1)^m\cdot(2m)!.$$

268. Како је $\dfrac{dy}{dx} = 1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$, то је $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{x}{x+1}$.

271. а) Диференцирањем налазимо $2y' = y^3 + 3xy^2y'$, одакле заменом $x=1$ и $y=1$ добијамо $2y' = 1+3y'$, па је $y'(1) = -1$, тј. $y+x-2=0$;

б) Диференцирањем се добија $5x^4+5y^4y'-2y-2xy'=0$, а једначина тангенте је $x+y-2=0$;

в) $14x-13y+12=0$;

г) у тачки $(1,0)$ $y=2x-2$; у тачки $(2,0)$ $y=-x+2$ и у тачки $(3,0)$ $y=2x-6$;

д) диференцирањем по x налазимо $2x+2yy'+2=0$ одакле је $y' = \dfrac{-1-x}{y}$. За $y=3$ добијамо $x_1=-3$, $x_2=1$, па се добијају следеће две тангенте: $y-3=\frac{2}{3}(x+3)$ и $y-3=-\frac{2}{3}(x-1)$;

ђ) $x+y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$; е) $2y=-x-3$ и $2y=x+1$.

272. а) $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$, за $x\neq -2$ и $x\neq 1$. У тим тачкама функција није диференцијабилна.

б) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$, за $x\neq -1$ и $x\neq 2$. У овим тачкама функција није диференцијабилна.

в) За $x\neq 0$ $f'(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$, а у тачки 0 функција није диференцијабилна јер је $\lim\limits_{h\to 0\pm}\frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{h^2}=\pm\lim\limits_{h\to 0\pm}\sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{h^2}}=\pm 1$ пошто је $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1$.

г) Како је $y=\begin{cases}(\pi^2-x^2)\sin^2 x, & |x|\le\pi\\ (x^2-\pi^2)\sin^2 x, & |x|>\pi\end{cases}$ то је

$$y'=\begin{cases}-2x\sin^2 x+(\pi^2-x^2)\sin 2x, & |x|<\pi\\ 2x\sin^2 x+(x^2-\pi^2)\sin 2x, & |x|>\pi.\end{cases}$$

Да је $y'(\pi)=y'(-\pi)=0$ директно се проверава

$$y'(\pi)=\lim_{h\to 0+}\frac{\left((\pi+h)^2-\pi^2\right)\sin^2(\pi+h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\left(\pi^2-(\pi+h)^2\right)\sin^2(\pi+h)}{h}=0$$

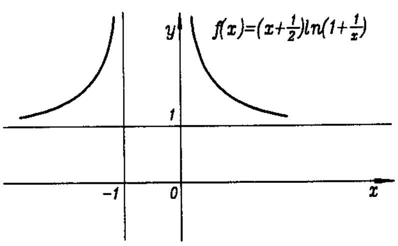
итд.

д) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot(-\sin x)=\begin{cases}-1, & \sin x>0\\ 1, & \sin x<0\end{cases}$. У тачкама $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ функција нема извод.

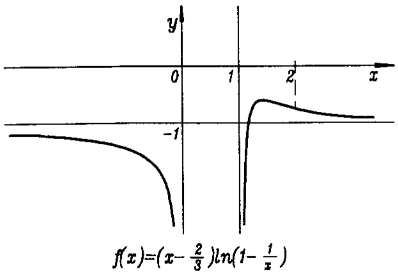
ђ) $f'(x)=\begin{cases}1, & \cos x>0\\ -1, & \cos x<0\end{cases}$, а у тачкама $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ функција није диференцијабилна.

273. а) Како је $y'=-\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, то је $\lim\limits_{x\to 0}y'=-1$, па је тангента $y=-x+1$; б) $y=-\frac{x}{2}+1$.

274. а) $-\frac{a^2}{y^3}$; б) $\frac{-r^2}{(y-b)^3}$; в) $\frac{-2(1+y^2)}{y^5}$; д) $\frac{-6a^2}{(x+2y)^3}$.



Сл. уз зад. 275а

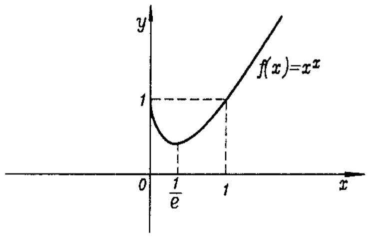


Сл. уз зад. 275б

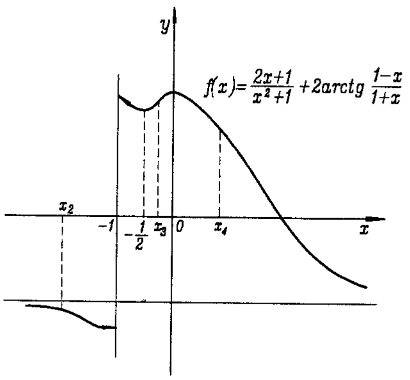
275. а) Како је $f''(x)=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$, график функције је конвексан за све x из области дефинисаности ($x<-1$ или $x>0$) (видети слику).

б) Функција је дефинисана за $x<0$ или $x>1$. Како је $f''(x)=\frac{x-2}{3x^2(x-1)^2}$, график функције за $x=2$ има превој, за $x>0$ и $1<x<2$ функција је конкавна, а за $x>2$ конвексна (видети слику).

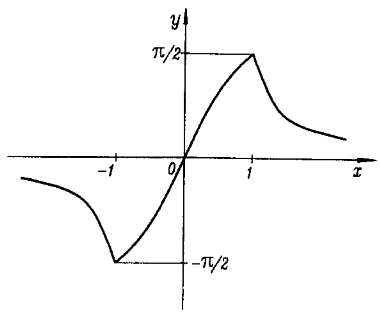
276. Како је $f(x) e^{x \ln x}$, функција је дефинисана, непрекидна и диференцијабилна за све $x > 0$. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Пошто је $f'(x) = e^{x\ln x}(1+\ln x)$, $f'(x)$ има знак израза $1+\ln x$, тј. за $x < \frac{1}{e}$ $f(x) < 0$, а за $x > \frac{1}{e}$ $f(x) > 0$, па је тачка $x = \frac{1}{e}$ тачка минимума функције. Када $x \to 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \ln x}{x} = -\infty$ па је y-оса тангента графика криве у нули (видети слику).



Сл. уз зад. 276



Сл. уз зад. 277а



Сл. уз зад. 277б

277. а) Функција није дефинисана у тачки -1. $\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = -\frac{1}{2} \pm \pi$. Права $y = -\frac{\pi}{2}$ је хоризонтална асимптота. $f'(x) = \frac{-2x(1+2x)}{(x^2+1)^2}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ је минимум, а $x_1 = 0$ максимум функције. $f''(x) = 2 \cdot \frac{4x^3+3x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$, па постоје три превојне тачке: $-2 < x_2 < -1$, $-\frac{1}{2} < x_3 < 0$, $0 < x_4 < 1$ (видети слику).

б) Функција је непарна, њен график има асимптоту $y = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \\ \frac{-2}{1+x^2}, & |x| > 1, \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & |x| < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тачка $x_1 = -1$ је минимум, а $x_2 = 1$ максимум функције. Тачке $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $(0,0)$ и $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ су превојне (видети слику).

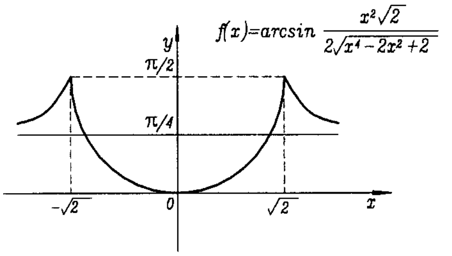
в) Парна функција, хоризонтална асимптота $y = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^4 - 2x^2 + 2}, & |x| > \sqrt{2} \\ \dfrac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}, & |x| < \sqrt{2}, \end{cases}$$

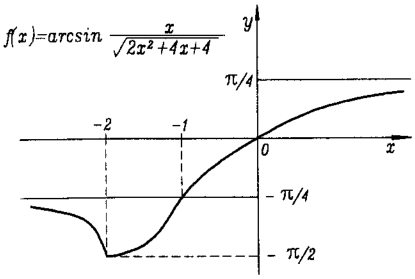
$x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$ су локални максимуми (видети слику).

г) Хоризонталне асимптоте $y = \pm\frac{\pi}{4}$ (за $x \to \pm\infty$). $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(x+2)}{x^2+2x+2}$, $f''(x) = \operatorname{sgn}(x+2)\cdot\dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}$; $x_1 = -2$ — минимум; $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ — превојне тачке. (видети слику).

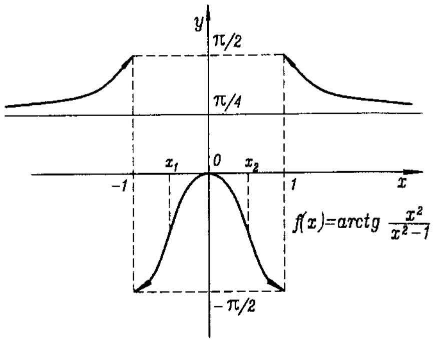
д) Хоризонтална асимптота $y = \frac{\pi}{4}$. Функција је парна. $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_+} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{x^4+(x^2-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(6x^4-2x^2-1)}{\left(x^4+(x^2-1)^2\right)^2}$. Максимум $x_0 = 0$, превоји за $x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}}$ (видети слику).



Сл. уз зад. 277в



Сл. уз зад. 277г



Сл. уз зад. 277д

Глава III – Апроксимације функција

278. $df = f'\cdot\Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x = \dfrac{0,1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{40}$.

279. $\Delta P = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2$, $dP = 2\pi r dr$. $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+$ $+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3$, $dV = 4\pi r^2 dr$.

280. Како је $\Delta y = y'dx + \varepsilon dx$, то је $\frac{\Delta y}{dy} = \frac{y'dx + \varepsilon dx}{y'dx} = 1 + \frac{\varepsilon dx}{y'dx} = 1 + \frac{\varepsilon}{y'} \to 1$, јер $\varepsilon \to 0$ када $dx \to 0$.

281. а) $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $dy = 3x^2dx$;
б) $\Delta \sin x = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$, $d\sin x = \cos x dx$.

282. $dV = 3x^2dx = 0,75$; $\frac{dV}{x^3} = 0,006$ дакле $0,6\%$.

283. Како је $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$, биће $(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha = \Delta y \approx dy = \alpha x^{\alpha-1}\Delta x$ одакле је $(x+\Delta x)^\alpha \approx x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}\Delta x = x^\alpha\left(1 + \frac{\alpha\Delta x}{x}\right)$.

а) За $\alpha = \frac{1}{3}$, $\Delta x = 0,3$, $x = 27$ добијамо $\sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27}\left(1 + \frac{\sqrt[3]{27}\cdot 0,3}{3\cdot 27}\right) \approx 3{,}011$;
б) $\sqrt{4,02} \approx 2,005$.

284. а) $\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}\cdot\Delta x$. За $x=1$ и $\Delta x = 0,02$, добијамо: $\operatorname{arctg} 1,02 = \frac{1}{1+1}\cdot 0,02 + \frac{\pi}{4} = 0,01 + 0,785 = 0,795$;

б) $\sin(60^0 + 1^0) - \sin 60^0 = \cos 60^0 \cdot 1^0$, па је $\sin 61^0 = \frac{\pi}{2\cdot 180} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi + 180\sqrt{3}}{360}$;

в) $\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}5151$.

285. Применити приближну једнакост $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, $(\Delta x \to 0)$, на функције:
а) $f(x) = \ln(1+x)$; б) $f(x) = a\sqrt{1+\frac{x}{a^2}}$.

286. а) $y = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-1)(-2)(-5)}\cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-5)}{1\cdot(-1)(-4)}\cdot 3 + \frac{x(x-1)(x-5)}{2\cdot 1\cdot(-3)}\cdot 12 + \frac{x(x-1)(x-2)}{5\cdot 4\cdot 3}\cdot$ $147 = x^3 + x^2 - x + 2$;
б) $y = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + \frac{10x}{3} + 1$.

287. $L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\cdot 2 + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\cdot 2^0 + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\cdot 2^{-1} = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 1$.
$a = 2^{\frac{1}{10}} \approx L_2\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{400} + \frac{3}{40} + 1 = 1,0775$.

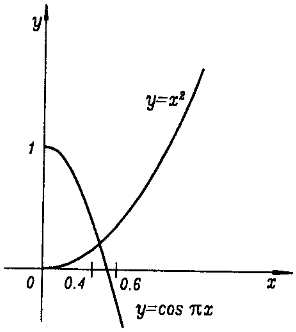
288. Како је $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, биће $L_2(x) = -0,36x^2 - 0,19x + 1,08$, а $L_2\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx L_2(0,63) = 0,82$.

289. $L_2(x)\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\cdot 11 + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-121)(144-100)}\cdot 12 \approx$ $4,1568 + 0,006752x + 0,00009x^2$; $L_2(115) \approx 10,72023$.

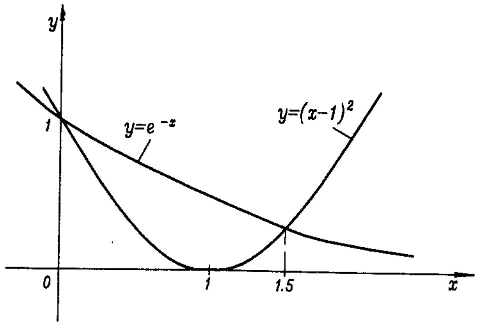
290. а) $y = x^2 - 10x + 1$, $y(0) = 1$; б) $y = 3x^4 - 4x^2 + 7x + 6$, $y(0) = 6$; в) $y = \frac{5}{42}x^3 - \frac{1}{14}x^2 - \frac{55}{21}x + 1$, $y(0) = 1$.

291. а) – г): видети слике.

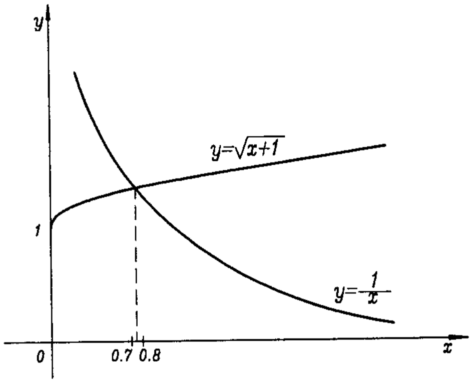
292. а) Нека је $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Тада је $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 > 0$, дакле функција $f(x)$ је стално растућа, па пошто је непрекидна и $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 3 > 0$,



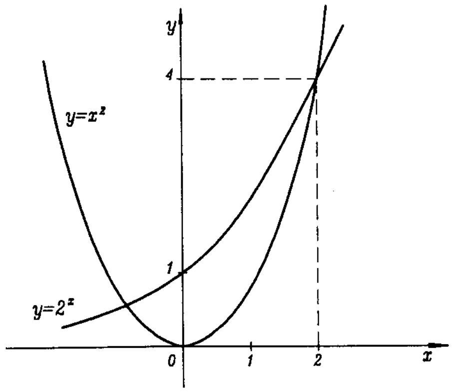
Сл. уз зад. 291а



Сл. уз зад. 291б



Сл. уз зад. 291в



Сл. уз зад. 291г

то значи да у интервалу $(0,1)$ има тачно један корен x_1. Будући да је $f(0,1) < 0$, а $f(0,2) > 0$, то је $0,1 < x_1 < 0,2$.

б) $0,8 < x_1 < 0,9$. Посматрати функцију $f(x) = xe^x - 2$.

293. *Упутство*: Видети претходни задатак; $-0,7 < x_1 < -0,6$ и $0,8 < x_2 < 0,9$.

294. а) Означимо $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0,9$. Како је $f(-3) = 174,9 > 0$, $f(-2) = 8,9 > 0$, $f(-1) = -3,1 < 0$, $f(0) = 0,9 > 0$, $f(1) = -3,1 < 0$, $f(2) = -15,1 < 0$, $f(3) = -11,1 < 0$ и $f(4) = 56,9$, функција $f(x)$ има три нуле x_1, x_2, x_3 и то тако да је $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$, $3 < x_3 < 4$.

б) $-3 < x_1 < -2$, $0 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < 2$. в) $-1 < x_1 < 0$, $5 < x_2 < 6$. г) $-3 < x_1 < -2$, $0 < x_2 < 1$, $2 < x_3 < 3$.

295. а) Како је $f(0) = -1$, $f(1) = 3$ где је $f(x) = x^3 + 3x - 1$, то корен постоји. Биће $x_1 = 0 - \dfrac{1-0}{3-1}(-1) = 0,25$. Пошто је $f(0,25) \approx -0,234$, биће $x_2 = 0,25 - \dfrac{1-0,25}{3-(-0,234)} \cdot (-0,234) \approx$, $f(0,304) \approx -0,60$, па је $x_3 = 0,304 - \dfrac{1-0,304}{3-(-0,060)} \cdot (-0,060) \approx 0,310$ Даље налазимо да је $x_4 = 0,3176 - \dfrac{1-0,3176}{3-(-0,0152)} \cdot (-0,0152) = 0,321$. Па смо са тачношћу $0,01$ одредили корен $x = 0,32$. (x_n се од вредности разликује приближно за $0,0011$).

б) Овде је $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f''(x) = 6$ и како је за $x \in [0,1]$ $f''(x \geq 0)$ узимамо $x_0 = 1$. Биће

$f(1) = 3 > 0$. Пошто је $f'(x = 6)$, то је $x_1 = 1 - \frac{3}{6} = 0,5$. Даље $f(0,5) = 0,625$, $f'(o,5) = 3,75$ и због тога $x_2 = 0,5 - \frac{0,625}{3,75} = 0,33$. На исти начин налазимо $x_3 = 0,33 - \frac{0,04}{3,33} = 0,32$. Пошто је x_4 такође једнако $0,32$, то је $0,32$ корен наше једначине са тачношћу $0,01$.

296. $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, $f''(x) = 20x^3 > 0$ за $x > 0$. Једноставно се закључује да $f(x)$ има тачно један корен c на интервалу $(0,4,0,5)$. Налазимо $x_1 = 0,4 - \frac{(0,5-0,4)f(0,4)}{f(0,5)-f(0,4)} = 0,4 + \frac{0,1 \cdot 0,18}{0,23} \approx 0,478$, $x_2 = 0,478 + \frac{0,022 \cdot 0,0190}{0,0502} \approx 0,4863$.

297. Нека је $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$. Пошто је $f(3) = -10$, $f(4) = 9$, то $f(x)$ има корен у интервалу $[3,4]$. Обе функције $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ и $f''(x) = 6x - 4$ су сталног знака на овом интервалу. Добијамо $x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} \approx 4 - 0,32 \approx 3,7$, $x_2 = 3,7 - \frac{f(3,7)}{f'(3,7)} \approx 3,7 - \frac{1,473}{22,27} \approx 3,634$.

298. Како је $f'(x) = (1 - |x|)e^{-|x|}$, то је $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{-|x_n|}}{(1-|x_n|)e^{-|x_n|}} = \frac{x_n|x_n|}{|x_n|-1}$, $n = 0,1,2,\ldots$ Добијамо $x_0 = 0,49$, $x_1 = -0,4708$, $x_2 = 0,4138$, $x_3 = -0,3018$, $x_4 = 0,1305$, $x_5 = -0,0196$, $x_6 = 0,0604$, $x_7 = -0,0000$. *Напомена*: Тачна вредност решења једначине је нула.

299. а) $0,208$; б) $2,600$; в) $1,712$; г) $1,512$; д) $-0,857$; ђ) $1,382$.

300. $x = \frac{1}{4} + \sin x = \varphi(x)$. Налазимо: $x_0 = 1$, $x_1 = 1,091$, $x_2 = 1,137$, $x_3 = 1,158$, $x_4 = 1,166$, $x_5 = 1,169$, $x_6 = 1,170$. На интервалу $[1,2]$ је $\varphi'(x) = \cos x \leq \cos 1 < 0,54$, па је $R_5 < 0,54^5 < 0,04$.

301. Можемо узети $x = \frac{8}{5}(1 + \ln x)$. Тада је $\varphi'(x) = \frac{8}{5x} \leq \frac{8}{15}$ на интервалу $[3,4]$. Добијамо да је: $x_1 = 3,818$, $x_2 = 3,744$, $x_3 = 3,712$, $x_4 = 3,698$, $x_5 = 3,693$, а $R_5 < \left(\frac{8}{15}\right)^5 < 0,04$.

302. Нека је $x = \frac{1}{24}(5 + 15x^5 - x^8) = \varphi(x)$. Биће $\varphi'(x) = \frac{1}{24}(75x^4 - 8x^7) < 0,2$ за $x \in [0,\frac{1}{2}]$. Налазимо: $x_1 = 0,21$, $x_2 = 0,2086$, $x_3 = 0,2086$, $x_4 = 0,2086$. Грешка је мања од $\frac{1}{5} \cdot 0,2^5 < 0,0007$.

303. $x_1 \approx -2,51282$; $x_2 \approx 1,47765$. Посматрати једначину $x = \varphi(x) = -2\ln|x-1|$ у првом и једначину $x = \varphi(x) = 1 + e^{-x/2}$ у другом случају.

Глава IV – Интеграл

304. а) $\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = x^3 + C$; б) $-\frac{1}{x^2} + C$; в) $x^{\frac{5}{3}} + C$; г) $-\frac{1}{x} + C$; д) $10x^{0,83} + C$; ђ) $\frac{9}{2}x^2 - 2x + C$; е) $\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + C$; ж) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$; з) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$; и) $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$; ј) $\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_n x + C$.

305. а) $\frac{1}{3}x^3 + 3\ln|x| + C$; б) $\frac{1}{2}x^2 - 2ax + a^2\ln|x| + C$; в) $a\ln|x| - \frac{1}{2a}x^2 + C$; г) $ax + \frac{1}{5}x^5 + C$; д) $\frac{1}{3}x^3 - x + C$; ђ) $\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}\ln|x| + C$; е) $-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + C$; ж) $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 + C$.

306. а) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; б) $\frac{m}{n+m}x^{\frac{n}{m}+1} + C$; в) $2\sqrt{x} + C$; г) $\ln|x| - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; д) $3x^2\sqrt[3]{x} + C$; ђ) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C$; е) $x\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C$; ж) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - x + C$; з) $\frac{x^7}{7} - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x + C$; и) $x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} +$

$3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3} + C$; j) $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$; к) $\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$; л) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$; љ) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln x + C$; м) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$; н) $-\frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C$.

307. а) $\frac{(2e)^x}{1+\ln 2} + C$; б) $\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} + C$; в) $\ln|x| + e^x + C$; г) $3x - \frac{2(1,5)^x}{\ln 1,5} + C$; д) $\frac{a^x}{\ln a} + \frac{b^x}{\ln b} + C$; ђ) $\frac{1}{\ln a - \ln b}\left(\frac{a}{b}\right)^x + C$; е) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; ж) $e^x + \frac{1}{x} + C$; з) $e^x - e^{-x} + C$; и) $-\frac{1}{3^x \ln 3} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$.

308. а) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\text{ctg}\, x - \text{tg}\, x + C$;

б) $-\text{ctg}\, x - x + C$; в) $\text{tg}\, x - x + C$; г) $x - \sin x + C$; д) $\frac{1}{2}(\text{tg}\, x + x) + C$;

ђ) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{tg}\, x - \text{ctg}\, x + C$;

е) $\cos x - \text{ctg}\, x + C$; ж) $x + \cos x + C$.

309. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$; б) $3\text{arctg}\, x - 2\arcsin x + C$;

в) *Први начин:* Прошири се бројилац са ± 1 да би се добио израз као у имениоцу и тиме омогућава раздвајање на два проста интеграла: $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \text{arctg}\, x + C$;

Други начин: Подели се бројилац имениоцем и добија $1 - \frac{1}{1+x^2}$. Када се то интеграли добија се претходни резултат.

г) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^2} = \int \frac{x^2-1+1}{-(x^2-1)} = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$;

д) $x + \text{arctg}\, x + C$; ђ) $x - 2\ln|x+1| + C$; е) $x - 2\text{arctg}\, x + C$;

ж) с обзиром да разлагање бројиоца не доводи до резултата, делимо бројилац имениоцем. На овај начин добијају се таблични интеграли. $(x^3 + x - 2) : (x^2+1) = x - \frac{2}{x^2+1}$.

Даље је $\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2\text{arctg}\, x + C$;

з) $\frac{x^2}{2} - x + \text{arctg}\, x + C$; и) $\arcsin x + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$; j) $\text{arctg}\, x - \frac{1}{x} + C$; к) $\ln|x| + 2\text{arctg}\, x + C$;

л) $\frac{x^3}{3} - x + \text{arcctg}\, x + C$; љ) $\arcsin x + x + C$.

310. а) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; б) $\frac{1}{3}\text{ctg}^{\,3} x + C$; в) $e^{\sin x} + C$; г) $2\sqrt{1+x^2} + C$; д) $\ln\sqrt{1+x^2} + C$.

311. а) $\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$;

б) $\int \left(\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}\right)dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c}\ln|cx+d| + C_1$;

в) $\int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

г) $\frac{1}{a-b}\int \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$;

д) $\int \frac{1+\cos 2ax}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$;

ђ) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$;

е) $\frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}d\left(\frac{xb}{a}\right)}{1+\left(\frac{xb}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a} + C.$

312. а) $F(x) = \int (4x+1)\,dx = 2x^2 + x + C$, а пошто је $F(-1) = 2$, то је $C = 1$, па је $F(x) = 2x^2 + x + 1$.

б) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; в) $F(x) = \frac{7}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$; г) $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$; д) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + x^3 + \frac{5}{2}$; ђ) $\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x$; е) $6\sin\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos 5x - \frac{14}{5}$.

313. а) $\frac{(x+5)^{11}}{11} + C$; б) $\frac{1}{12}(2x-6)^6 + C$; в) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-1)^4} + C$; г) $\frac{2}{15}\sqrt{(5x+6)^3} + C$; д) $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(2-x)^3} + C$; ђ) $\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)d(-3x) = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$; е) $\frac{1}{a}\int e^{ax}d(ax) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$; ж) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$; з) $-\frac{1}{a}\cos ax + C$; и) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$; ј) $\ln|x+1| + C$; к) $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.

314. *Напомена.* Интеграли овог облика своде се на $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

а) $\frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{1+\frac{x^4}{4}} + C = \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$ (смена $\frac{x^2}{2} = t$, $xdx = dt$);

б) $\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}x + C$

(смена $\sqrt{\frac{2}{3}}x = t$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,dt$);

в) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\,dt}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (смена $x = at$, $dx = a\,dt$);

г) $\operatorname{arctg} e^x + C$ (смена $e^x = t$);

д) после трансформације своди се на г);

ђ) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x-2) + C$;

е) $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C$.

315. *Напомена.* Интеграли овог облика се своде на $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C$ (смена $2x = t$, $dx = \frac{1}{2}dt$);

б) $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + C$ (смена $2x = t\sqrt{3}$); в) $\frac{\sqrt{5}}{5}\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right) + C$ (смена $x\sqrt{5} = t\sqrt{2}$);

г) $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ (смена $x = at$, $dx = a\,dt$);

д) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-(x^3)^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C$ (смена $\frac{x^3}{\sqrt{2}} = t$, $x^2\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\,dt$);

ђ) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x + C$; е) $\arcsin(x-1) + C$ $(x-1=t)$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1)+C$; з) $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$; и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$.

316.

а) Сменом $ax+b=t$ добијамо $\int t^n \cdot \frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$;

б) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ (смена $ax+b=t$); в) $\frac{1}{n+1}\ln|x^{n+1}+1|+C$ (смена $x^{n+1}+1=t$);

г) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$ (смена $\ln x=t$); д) $-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$ (смена $t=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$);

ђ) $\ln x - \ln 2\ln|\ln x + 2\ln 2| + C$; е) $\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C$; ж) $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$;

з) $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}+C$.

317. а) Уведимо смену $t=f(x)$. Тада је $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C$;

б) $\frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)+C$.

318. *Напомена.* Применом интеграла $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$ може се решити сваки интеграл разломљене функције код које је бројилац извод имениоца (видети задатак 317а).

а) $\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$; б) $\ln|x^2+1|+C$; в) $\ln|x^2-3x+5|+C$; г) $\ln|x^3-2x|+C$;

д) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln|\cos x|+C$ (смена $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$);

ђ) $\ln|\sin x|+C$; е) $-\ln|1+\cos x|+C$; ж) $\ln(\sin^2 x+1)+C$; з) $\ln|\ln x|+C$; и) $\ln|\arcsin x|+C$;

ј) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1|+C$;

к) $\int\frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{t\,dt}{\sin t\cos t} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}\,t}$ (смена $x=2t$, $dx=2dt$) $= \int\frac{dz}{z} = \ln|z|+C = \ln|t|+C = \ln|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|+C$ (смена $\mathrm{tg}\,t=z$, $\frac{dt}{\cos^2 t}=dz$);

л) $\ln|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)|+C$.

319. а) $\sqrt{1+x^2}+C$; б) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$; в) $-\frac{1}{5(4+x^5)}+C$; г) $\frac{1}{\cos x}+C$; д) $-\frac{1}{4\ln^4 x}+C$.

320. Видети задатак 317б.

а) $-\frac{1}{40}(1-6x^5)^{\frac{4}{3}}+C$; б) $\frac{1}{6}(1+4\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$; в) $\frac{1}{3}(\mathrm{arctg}\,x)^3+C$; г) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$; д) $\frac{1}{3}(\arcsin x^3)+C$;

ђ) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$; е) $\frac{1}{4}\ln^2\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; ж) $\frac{1}{3}\sin^6 x+C$; з) $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$;

и) $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$;

ј) $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)+C$; к) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x^2+C$.

321. а) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$;

б) $6\int\frac{z^6\,dz}{z-1} = 6\int\frac{z^6-1+1}{z-1}\,dz = 6\left(\int(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)\,dz+\int\frac{dz}{z-1}\right) = 6\left(\frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[6]{x^4}}{4}+\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3}+\frac{\sqrt[6]{x^2}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right)+C$;

в) $\dfrac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$;

г) $\displaystyle\int\frac{2\sin z\cos z\,dz}{\sqrt{\sin^2 z-\sin^4 z}}=2z+C=2\arcsin\sqrt{x}+C$;

д) $\displaystyle\int\frac{(x+1)e^x\,dx}{xe^x(1+xe^x)}=\int\frac{dz}{z(1+z)}=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+1}=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$;

ђ) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\frac{dx}{x^2}=-\int\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\,dz=-\int\frac{(1-z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}-$
$\displaystyle-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}}-\arcsin z+C=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\arcsin\frac{1}{x}+C$;

е) $\dfrac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$; ж) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$.

322. а) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C$; б) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; в) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$; г) $\dfrac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}x+C$; д) $C-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, (смена $x=\dfrac{1}{z}$ или $x=\operatorname{tg}z$); ђ) $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$; е) $-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$ (смена $x=\dfrac{1}{z}$).

323. а) Нека је $u=x$, $dv=\sin 2x\,dx$. Тада је $du=dx$, $v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$, па је $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

б) $x\sin x+\cos x+C$; в) $-e^{-x}(x+1)+C$; г) xe^x-e^x+C; д) $e^x(x^2-2x+2)+C$; ђ) $x\ln x-x+C$; е) $\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\ln x-\dfrac{x^{a+1}}{(a+1)^2}+C$; ж) $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; з) $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; и) $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$; ј) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; к) $\dfrac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\dfrac{3^x}{(\ln 3)^2}+C$; л) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; љ) $-\dfrac{x\cos 2x}{4}+\dfrac{\sin 2x}{8}+C$; м) $\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C$; н) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; њ) $\dfrac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\dfrac{2x+5}{4}\cos 2x+C$.

324. а) Нека је $I=\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ ($u=\sqrt{1-x^2}$, $du=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv=dx$, $v=x$), даље је $I=x\sqrt{1-x^2}-\displaystyle\int\frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, тј. $I=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x$, односно $I=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C$;

б) $\displaystyle\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$; в) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$; г) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$.

325. а) $I_1=e^x\sin x-\displaystyle\int e^x\cos x\,dx=$ ($u=\sin x$, $dv=e^x\,dx$) $e^x\sin x-e^x\cos x-I_1$ ($u=\cos x$, $dv=e^x\,dx$), па је $I_1=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$;

б), в) $I_2=x\sin(\ln x)-\displaystyle\int\cos(\ln x)\,dx$ ($u=\sin(\ln x)$, $dv=dx$), $I_3=x\cos(\ln x)+\displaystyle\int\sin(\ln x)\,dx$ ($u=\cos(\ln x)$, $dv=dx$), па је $I_2+I_3=x\sin(\ln x)$ и $I_3-I_2=x\cos(\ln x)$, одатле налазимо $I_2=\dfrac{x}{2}\big(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\big)+C$, $I_3=\dfrac{x}{2}\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)+C$;

г) $I_4=\dfrac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$.

326. а) Парцијалном интеграцијом налазимо: $I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx = x^n e^x - nI_{n-1}$;
б) $I_5 = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$;
в) $I_n = e^x(x^n - nx^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot n!) + C$, јер је $I_n = x^n e^x - nI_{n-1} = x^n e^x - n(x^{n-1}e^x - (n-1)I_{n-2}) = e^x(x^n - nx^{n-1}) + n(n-1)I_{n-2}$ итд.

327. а) $I_n = \int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$ ($u = \cos^{n-1}x$, $dv = \cos x\,dx$), $I_n = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, одакле се добија $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$;
б) $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$;
в) $I_n = \frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}I_{n-2}$ ($m > n$), $I_m = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}I_{m-2}$ ($m < n$), $I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int(\sin 2x)^n d(2x)$ ($m = n$) ради се као б);
г) $I_n = \int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x\,dx = x\ln^n x - nI_{n-1}$.
д) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int x\cdot\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ $\left(u = x,\ dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}\right)$, одакле налазимо $I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$ ($n > 1$). Овај резултат се може добити и на други начин сменом $x = \operatorname{tg} x$, па је $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и $I_n = \int \cos^{2n-2}t\,dt$.

329. а) Применимо најпре смену $\sqrt{x} = t$, а затим парцијалну интеграцију ($u = t$, $dv = e^t\,dt$): $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$;
б) Сменом $\sqrt[3]{x} = t$, затим парцијалном интеграцијом ($u = t^2$, $dv = \sin t\,dt$), резултат је $3\left[(2 - \sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right] + C$;
в) Сменом $z = \arcsin x$, затим парцијалном интеграцијом $u = z$, $dv = \frac{dz}{\cos^2 z}$ добијамо резултат: $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$;
г) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$;
д) Смена $\operatorname{arctg} x = z$, а затим парцијална интеграција $u = z$, $dv = \frac{dz}{\operatorname{tg}^2 z}$, резултат је $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C$;
ђ) $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$.

330. а) Нека је $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$. Биће $du = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $v = e^{\operatorname{arctg} x}$, па је тражени интеграл: $I = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{d(e^{\operatorname{arctg} x})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, одакле је: $I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} + C$.
б) $u = \operatorname{arctg} e^x$, $dv = e^{-x}\,dx$; резултат је $-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$.
в) $u = xe^x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, резултат је $\frac{-xe^x}{x+1} + e^x + C$; г) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$;

д) $-\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$; ђ) $2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) + C$; е) $\ln x(\ln\ln x - 1) + C$;

ж) Нека је $u = (\arcsin x)^2$, $dv = dx$. Биће $du = \dfrac{2\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$, па је $\int(\arcsin x)^2\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int\dfrac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$ (код последњег интеграла узето је $u = \arcsin x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$).

з) Нека је $u = \arcsin x$, $dv = \dfrac{dx}{x^2}$. Добијамо: $\int\dfrac{\arcsin x\,dx}{x^2} = -\dfrac{\arcsin x}{x} + \int\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (смена $x = \sin t$) $= -\dfrac{\arcsin x}{x} + \int\dfrac{dt}{\sin t} = -\dfrac{1}{x}\arcsin x + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{\arcsin x}{2}\right| + C$.

331. а) Именилац нема реалних нула. Написаћемо квадратни трином $x^2 + 2x + 5$ у канонском облику $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$, па ћемо увести смену $\dfrac{x+1}{2} = t$, $dx = 2dt$. Даље је: $\int\dfrac{dx}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{4}\int\dfrac{dx}{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{1}{2}\int\dfrac{dt}{t^2+1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + C$;

б) $\int\dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx = \int\dfrac{3x-2}{(x-2)^2+1}\,dx$ (смена $x - 2 = t$, $dx = dt$) $= \int\dfrac{3t+4}{t^2+1}\,dx = 3\int\dfrac{t}{t^2+1}\,dx + 4\int\dfrac{dt}{t^2+1}$ (смена $t^2 + 1 = z$, $2tdt = dz$) $= \dfrac{3}{2}\int\dfrac{dz}{z} + 4\int\dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{3}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + 4\operatorname{arctg}(x-2) + C$;

в) *Први начин:* $\dfrac{x-4}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2} = \dfrac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)}$. Како је $A(x-2) + B(x-3) \equiv x - 4$, заменом вредности за $x = 2$ и $x = 3$ добија се $A = -1$, $B = 2$.

Други начин: сређивањем последњег разломка по опадајућим степенима по x добија се $\dfrac{x(A+B) - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$. Изједначавањем почетног и крајњег бројиоца разломка добија се $x - 4 \equiv x(A+B) - 2A - 3B$. Коефицијенти уз x морају бити једнаки на обе стране као и слободни чланови, па се из система једначина $A + B = 1$ и $-2A - 3B = 4$ добија $A = -1$, $B = 2$. Даље је $\int\dfrac{x-4}{x^2-5x+5}\,dx = \int\dfrac{2}{x-2}\,dx - \int\dfrac{dx}{x-3} = 2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C = \ln\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-3}\right| + C$;

г) $\ln\left|\dfrac{x^3(x-1)}{x+1}\right| + C$.

332. а) $\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{\left(x^2 - 2\cdot\dfrac{5}{4}x + \dfrac{25}{16}\right) + \dfrac{7}{2} - \dfrac{25}{16}} = \dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{31}{16}} == \dfrac{1}{2}\int\dfrac{dz}{z^2 + \dfrac{31}{16}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4z}{\sqrt{31}} + C = \dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-5}{\sqrt{31}} + C$;

б) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + C$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{6x-1}{\sqrt{11}} + C$; г) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3-\sin x}{\sqrt{3}} + C$ (смена $3 - \sin x = t$);

333. а) $\int\dfrac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}}{x^2-x-1}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-x-1) - \dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-x-1) - \dfrac{1}{2}\int\dfrac{dz}{z^2-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-x-1) - \dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1/\sqrt{5}}{z-\sqrt{5}/2} - \dfrac{1/\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}/2}\right)dz = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-x-1) - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C$;

б) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right| + C$; в) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\right| + C$ (смена $x^2 = t$); г) $\int\left(\dfrac{13}{x-2} - \dfrac{20}{x-3}\right)dx = 13\ln|x -$

$2| - 20\ln|x-3| + C$.

334. а) Нуле полинома у имениоцу су реалне, али једна је двострука, па је растављање на збир елементарних разломака следеће: $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$ (број слова A, B, C једнак је степену полинома у имениоцу). Даље је $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = \dfrac{(A+C)x^2+(B-A)x-B}{x^2(x-1)}$ (видети задатак 331б, други начин). Из $A+C=0$, $B-A=0$ и $-B=1$ добија се $A=-1$, $B=-1$, $C=1$, па је $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x-1)} = -\int dx - \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x-1} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + C$.

б) $\displaystyle\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$;

в) $\displaystyle\int\left(1 + \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\right)dx = x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$;

г) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{x^2+1} + \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\text{arctg}\, x + C$;

д) $\displaystyle\int\left(\frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}\right)dx = 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C$;

ђ) $\displaystyle\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{8}}{x+\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{8}}{x-\frac{5}{2}}\right)dx = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right| + C$;

е) $\displaystyle\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

ж) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-2}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\,(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\,(x\sqrt{2}-1) + C$;

з) $\displaystyle\int\left(1 + \frac{1}{x^4-1}\right)dx = x + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\text{arctg}\, x + C$;

и) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$;

ј) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$;

к) $\displaystyle\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1}\right) + C$;

л) $\displaystyle\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$.

335. а) $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,(\sqrt{2}\text{tg}\, x) + C$;

б) $\displaystyle\int\frac{(1+t^2)^2\,dt}{t^4} = \text{tg}\, x - \frac{2}{\text{tg}\, x} - \frac{1}{3\text{tg}^3 x} + C$;

в) $\displaystyle\frac{1}{4}\int\left(\frac{dt}{t+1} - \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{2(t-1)}{(t^2+1)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} + C$;

г) $\displaystyle\frac{\text{tg}^3 x}{2} + \text{tg}\, x + C$; д) $\displaystyle\frac{1}{2}\text{arctg}\,(2x) + C$; ђ) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\text{tg}\, x + 3 - \sqrt{13}}{2\text{tg}\, x + 3 + \sqrt{13}}\right| + C$;

е) $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|1+\text{tg}\, x| - \frac{1}{8}\ln|1+\text{tg}^2 x| - \frac{1+\text{tg}\, x}{4(1+\text{tg}^2 x)} + C$.

336. а) $\displaystyle\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{1+t} = \ln\left|1+\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$; б) $\displaystyle\ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$;

в) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$; г) $\dfrac{1}{2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}+C$; д) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$; ђ) $x-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C$; е) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$;

ж) $-x+2\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C$; з) $\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C$; и) $\dfrac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+\dfrac{1}{3}\ln\left(3+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)+C$.

337. а) $\dfrac{1}{8}\displaystyle\int\sin^2 2x(\cos 2x+1)\,dx=\dfrac{1}{8}\int\left(\sin^2 2x\cos 2x+\dfrac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)dx=\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+\dfrac{1}{16}x-$ $\dfrac{1}{64}\sin 4x+C$; б) смена $t=\sin x$: $\displaystyle\int t^2(1-t^2)\,dt=\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^5}{5}+C$;

в) смена $t=\cos x$: $-\displaystyle\int\dfrac{t^4-2t^2+1}{t^4}\,dt=-t-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{3t^3}+C$; г) $-\dfrac{1}{14}\cos 7x-\dfrac{1}{6}\cos 3x+C$;

д) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\sin 4x-\sin 2x)\sin 4x\,dx=\dfrac{1}{4}\int(-\cos 8x+1+\cos 6x-\cos 2x)\,dx=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\sin 8x}{8}+\dfrac{\sin 6x}{6}-\right.$ $\left.\dfrac{\sin 2x}{2}+x\right)+C$; ђ) $\dfrac{1}{22}\sin 11x+\dfrac{1}{10}\sin 5x+C$; е) $-\dfrac{1}{4}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}x+C$.

338. а) Смена $2x-1=z^4$: $\displaystyle\int\dfrac{2z^3\,dz}{z^2-z}=2\int\left(z+1+\dfrac{1}{z-1}\right)dz=(z+1)^2+2\ln|z-1|+C=$ $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2+2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1|+C$;

б) смена $2x+3=t^6$: $\displaystyle\int\dfrac{3t^5\,dt}{t^3-2t^2}=3\int\dfrac{t^3\,dt}{t-2}=3\int\left(t^2+2t+4+\dfrac{8}{t-2}\right)dt=t^3+3t^2+12t+$ $24\ln|t-2|+C$;

в) смена $t=\sqrt{x+1}$, резултат је: $\ln(t-1)^2-\ln(t^2+t+1)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$;

г) $\displaystyle\int\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\dfrac{dx}{x+1}=\int\dfrac{-3t\,dt}{t^3-1}=\int\left(-\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+$ C $\left(\text{смена: } t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}},\ dx=\dfrac{-6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}\right)$;

д) смена $x+2=t^3$, резултат: $\dfrac{3}{4}t^4-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{4}\ln|t-1|+\dfrac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\dfrac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}}+C$;

ђ) смена $x=t^{10}$: $10\displaystyle\int\dfrac{t^9\,dt}{t^{14}(t+1)}=10\int\dfrac{dt}{t^5(t+1)}=10\int\left(\dfrac{1}{t^5}-\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}\right)dt=$ $10\left(\dfrac{t^{-4}}{-4}-\dfrac{t^{-3}}{-3}+\dfrac{t^{-2}}{-2}-\dfrac{t^{-1}}{-1}+\ln|t|-\ln|t+1|\right)+C$;

е) смена $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\dfrac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$: $\displaystyle\int\dfrac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx=\int\dfrac{dt}{t^2}=-\dfrac{1}{t}+C=$ $-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$;

ж) смена $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$: $I=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2t}{t^3-1}+C$;

з) $2\sqrt{x-1}\left(\dfrac{(x-1)^3}{7}+\dfrac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$;

и) $\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$ (смена $\sqrt{x}=t^3$);

ј) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2}}+C$; к) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$; л) $-\dfrac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$;

љ) $\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2}-\sqrt[3]{x^4+1}+\ln(\sqrt[3]{x^4+1}+1)\right]+C$; м) $\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C$.

339. а) $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a})+C$; б) $2\arcsin\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+C$;

в) $\dfrac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$; г) $\dfrac{-\sqrt{x^2+2x-2}}{x+1}+C$; д) $\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-4)+C$; ђ) $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}}-\sqrt{2x-x^2}+C$.

340. Означимо са $x_0 = a$, $x_1 = a + d$, $x_2 = a + 2d, \ldots, x_n = b\,(= a + nd)$, где је $d = \dfrac{b-a}{n}$; нека је $\xi_i = x_i$. Тада је по дефиницији одређеног интеграла:

$$\begin{aligned}\int_a^b e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\xi_i}(x_{i+1}-x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} e^{x_i}(x_{i+1}-x_i)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} e^{a+id}\cdot d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} de^a(e^d)^i = e^a\lim_{n\to\infty} d\sum_{i=0}^{n-1}(e^d)^i\\ &= e^a \lim_{\substack{n\to\infty\\(d\to 0)}} \frac{d}{e^d-1}\cdot(e^{nd}-1) = e^a(e^{b-a}-1) = e^b - e^a,\end{aligned}$$

јер је $\displaystyle\lim_{d\to 0}\frac{e^d-1}{d} = 1$.

341. Означимо $q = \sqrt[n]{b/a}$, $x_0 = a$, $x_1 = aq$, $x_2 = aq^2, \ldots, x_n = aq^n = b$ и $\xi_i = x_i = aq^i$. Тада је

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)(aq^{i+1}-aq^i)\\ &= a^3\lim_{n\to\infty}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^3)^i = a^3\lim_{n\to\infty}(q-1)\frac{(q^3)^n-1}{q^3-1}\\ &= (b^3-a^3)\lim_{n\to\infty,q\to 1}\frac{q-1}{q^3-1} = (b^3-a^3)\lim_{q\to 1}\frac{1}{q^2+q+1} = \frac{b^3-a^3}{3}.\end{aligned}$$

342. а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

343. а) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e^x\big|_0^1 = e-1$; б) $\dfrac{8}{3}$; в) 2; г) $\displaystyle\frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}\frac{d(11+5x)}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\,\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{7}{72}$;

д) $5\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$; ђ) $\dfrac{4-\pi}{8}$; е) $\dfrac{1066}{243\ln 3}$; ж) $\dfrac{100}{3}$.

344. Како је $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$, то је $\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^\pi|\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\,dx = \sin x\big|_0^{\pi/2} - \sin x\big|_{\pi/2}^{\pi} = 2$.

345. а) Смена $1-x=t^3$: $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx = 3\int_{-2}^{0}(1-t^3)t^3\,dt = -66\frac{6}{7}$;

б) смена $1-x=t^2$: $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = 2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$;

в) смена $x = a\sin t$, резултат је $\dfrac{\pi a^4}{16}$;

г) смена $e^x = t$, резултат је $\operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{4}$;

д) смена $x-2 = 3\sin t$: $\displaystyle\int_2^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_0^{\pi/6}\frac{3\cos t\,dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \frac{\pi}{6}$;

ђ) смена $\operatorname{tg} x = t$, резултат је $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$; е) смена $\ln x = t$, резултат је $\ln 2$.

346. а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}d(1+x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$; б) $-5(\sqrt[5]{16}-1)$; в) $\displaystyle\int_4^9(\sqrt{y}-1)\,dy = \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_4^9 - y|_4^9 = \frac{23}{3}$;

г) $\displaystyle\int_0^{16}\frac{\sqrt{y+9}+\sqrt{y}}{9}\,dy = \frac{1}{9}\,\frac{(y+9)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{16} + \frac{1}{9}\,\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{16} = 12$;

д) $\displaystyle\int_0^1 (e^x-1)^4 d(e^x-1) = \frac{(e^x-1)^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{(e-1)^5}{5}$;

ђ) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos^6 x\cdot\cos x\,dx = \int_0^{\pi/6}(1-\sin^2 x)^3 d(\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 - -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{7}$;

е) $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\Big|_1^2 = \frac{3}{20}$; ж) $7+2\ln 2$; з) $\displaystyle\frac{32}{3}$; и) $\displaystyle 2-\frac{\pi}{2}$.

347. а) Ако уведемо $x=u$, $\cos x\,dx = dv$, биће

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = x\sin x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}-1;$$

б) $u=\ln(x+1)$, $dv=dx$. Добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1)|_0^{e-1} - \int_0^{e-1}\frac{x}{1+x}\,dx\\ &= e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = e-1-(e-1)+\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} = 1;\end{aligned}$$

в) $\displaystyle\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; г) $\displaystyle\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$; д) $\displaystyle\frac{\pi}{2}-2$; ђ) $\displaystyle\frac{\pi}{2}+2$; е) $\displaystyle\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\displaystyle\frac{\pi^2}{4}-2$; з) $\displaystyle\frac{e^2+5}{4}$; и) $\displaystyle\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; ј) $\displaystyle 2-\frac{3}{4\ln 2}$.

348. Очигледно је да је $\displaystyle I_1+I_2 = \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{3}$, док применом парцијалне интеграције два пута налазимо да је $\displaystyle I_2 - I_1 = \int_0^\pi x^2\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{2}$. Одавде се лако добија $\displaystyle I_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ и $\displaystyle I_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

349. а) Како је $\displaystyle\frac{t^2+2t-1}{t^2+1} = 1+\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}$, биће

$$I_1 = \int_0^1\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}\,dt = \big(t+\ln(t^2+1)-2\operatorname{arctg} t\big)\Big|_0^1 = 1+\ln 2-\frac{\pi}{2};$$

б) $\displaystyle I_2 = \int_0^1\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt + \int_0^1 2t(t^2+1)^{-2}\,dt$. За израчунавање првог интеграла може се увести замена $z=\operatorname{arctg} t$, па је

$$I_2 = -\int_0^{\pi/4}\cos 2z\,dz + \frac{(t^2+1)^{-1}}{1-2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\sin 2z\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} = 0;$$

в) слично као б); добија се $I_{3/2} = 2-2\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

350. а) За $0\le x\le 1$ важи $\sqrt{1+x^2}\ge x$, па је $I_1 > I_2$; б) $I_1 < I_2$; в) $I_1 > I_2$.

351. Како је $0 \le \sin^2 x \le 1$, то је $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \le I \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{3}{2}}\, dx$, па је $\dfrac{\pi}{2} \le I \le \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

352. Како за $0 \le x \le 1$ важи $(1-x^2)^{n/2+1/2} \le (1-x^2)^{n/2}$, то је и $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}\, dx \le \int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\, dx$, тј. $J_{n+1} \le J_n$.

353. $\displaystyle J_m = \int_1^e \ln^m x\, dx = x\ln^m x|_1^e - m\int_1^e \ln^{m-1} x\, dx = e - mJ_{m-1}$ $(u = \ln^m x,\ dv = dx)$.

354. $\displaystyle I_n + I_{n-2} = \int_0^a (\mathrm{tg}^{\,n} x + \mathrm{tg}^{\,n-2} x)\, dx = \int_0^a \mathrm{tg}^{\,n-2} x(\mathrm{tg}^{\,2} x + 1)\, dx = \int_0^a \mathrm{tg}^{\,n-2} x\, d(\mathrm{tg}\, x) = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{\,n-1} x|_0^a = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{\,n-1} a.$

355. Поћи од релације $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\, dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1}\, dx - \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx$, па за израчунавање последњег интеграла применити парцијалну интеграцију $u = x$, $dv = x(1-x^2)^{n-1}\, dx$.

356. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^n x} = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{(n-1)}\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n-2} x}\ \left(u = \sin x,\ dv = \frac{\sin x\, dx}{\cos^n x}\right) = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{(\sqrt{2})^{n-2}}{n-1}$. Како је $\displaystyle I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \ln\frac{1+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}$, тако налазимо $I_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} I_1$ и $I_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3}{4} I_3$.

357. а) Како је $f'(x) = (x-1)(x-2)^2$, то је минимум функције $f(x)$ за $x = 1$: $\displaystyle f(1) = \int_0^1 (t-1)(t-2)^2\, dt = -\frac{17}{12}$; б) $x_n = n\pi$, $n \in \mathbf{N}$.

359. *Упутство*: Применити смену $t = \dfrac{1}{z}$.

360. а) $I(a) = \mathrm{arctg}\, x|_0^a = \mathrm{arctg}\, a$, $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = \dfrac{\pi}{2}$; б) $I(a) = \cos\dfrac{1}{x}\Big|_{2/\pi}^a = \cos\dfrac{1}{a}$, $\lim\limits_{a\to\infty} \cos\dfrac{1}{a} = 1$; в) $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{1}{\ln 2}$; д) $\dfrac{\pi^2}{8}$; ђ) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{1}{2}$.

361. а) Нека је $u = \ln t$, $dv = \dfrac{2t\, dt}{(1+t^2)^2} = \dfrac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$. Биће

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln t}{1+t^2}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)} = -\frac{\ln x}{1+x^2} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt \\ &= -\frac{\ln x}{1+x^2} + \ln x - \frac{1}{2}\big(\ln(1+x^2) - \ln 2\big) = -\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x^2}{x^2+1}, \end{aligned}$$

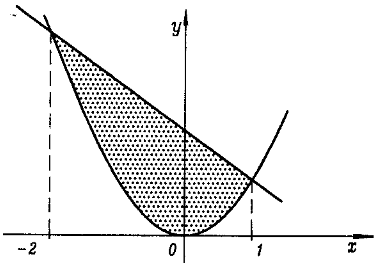
а $\lim\limits_{x\to\infty} I(x) = \dfrac{1}{2}\ln 2$;

б) $I(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2} + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

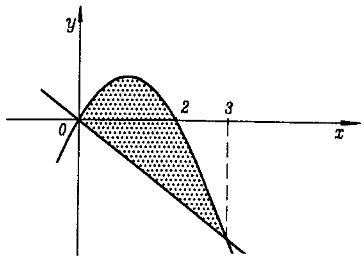
362. а) Тражена површина је (видети слику): $\displaystyle P = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)\, dx = 4,5$;

б) $\displaystyle P = \int_0^3 (2x - x^2 + x)\, dx = 4,5$ (видети слику);

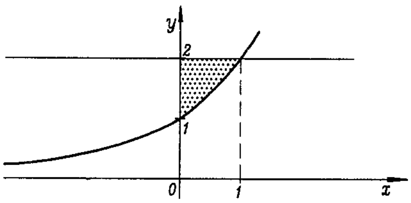
в) $\displaystyle P = \int_0^1 (2 - 2^x)\, dx = 2 - \frac{1}{\ln 2}$ (видети слику);



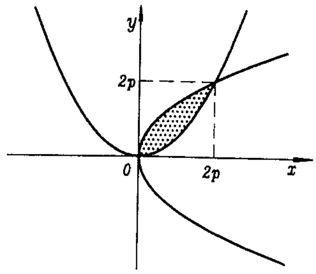
Сл. уз зад. 362а



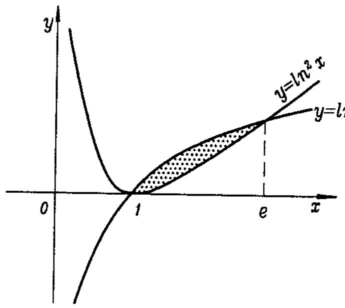
Сл. уз зад. 362б



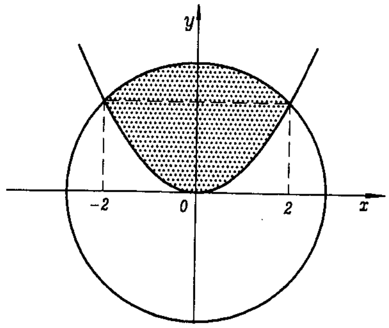
Сл. уз зад. 362в



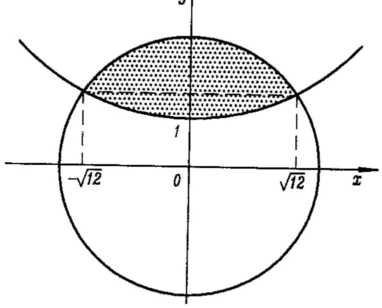
Сл. уз зад. 362г



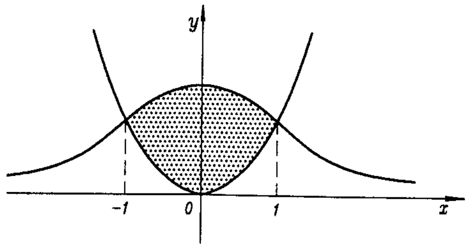
Сл. уз зад. 362д



Сл. уз зад. 362ђ



Сл. уз зад. 362е



Сл. уз зад. 362ж

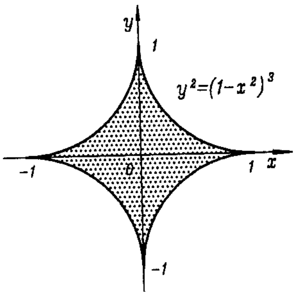
г) $P = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{3/2} - \frac{x^3}{6p}\Big|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^3$ (видети слику);

д) $P = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\, dx = 3 - e$ (видети слику)

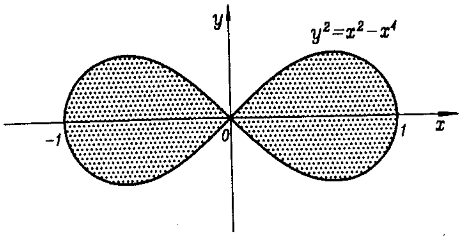
ђ) $P = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\, dx - 2\int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx = 2\pi + \frac{4}{3}$ (видети слику);

е) $P = 2\int_0^{\sqrt{12}} \sqrt{16-x^2}\, dx - 2\int_0^{\sqrt{12}} \left(1 + \frac{x^2}{12}\right) dx = 2\cdot 16\int_o^{\pi/3} \cos^2 dt - 2x|_0^{\sqrt{12}} - \frac{x^3}{18}\Big|_0^{\sqrt{12}} =$
$16\int_0^{\pi/3}(1+\cos 2t)\, dt - 2\sqrt{12} - \frac{12\sqrt{12}}{18} = \frac{16\pi}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$ (видети слику);

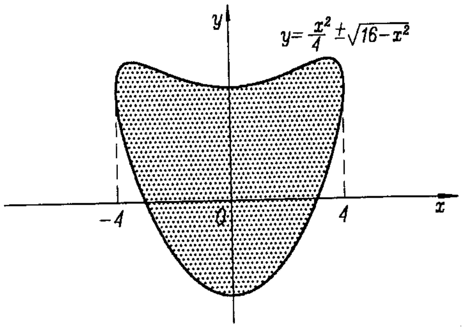
ж) $P = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(\operatorname{arctg} x|_0^1 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (видети слику).



Сл. уз зад. 363а



Сл. уз зад. 363б



Сл. уз зад. 363в

363. а) $P = 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2}\, dx = 4\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\, dx = 4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\, dt = \int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)^2\, dt =$
$\frac{\pi}{2} + \sin 2t|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}\, dt = \frac{3\pi}{4}$ (видети слику)

б) $P = 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = -2\int_1^0 \sqrt{t}\, dt = \frac{4}{3}$ (видети слику)

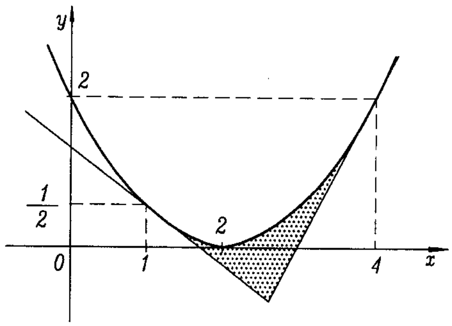
в) Како је $y = \frac{x^2}{4} \pm \sqrt{16-x^2}$, то је (видети слику) $P = 2\int_0^4 \left(\left(\frac{x^2}{4} + \sqrt{16-x^2}\right) -\right.$
$\left.-\left(\frac{x^2}{4} - \sqrt{16-x^2}\right)\right) dx = 4\int_0^4 \sqrt{16-x^2} = 16\pi.$

364. а) $P = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$; б) $121,5$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{81}{2}$; д) 9; ђ) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{2}{3}$; ж) $\frac{8}{3}$; з) 9; и) $\frac{1}{4}(15 - 16\ln 2)$; ј) $\frac{1}{3}(6e - 5)$; к) $\frac{5}{12}$; л) 5; љ) $\frac{6-\pi}{3\pi}$; м) $\frac{8}{9}$; н) $\frac{3\pi - 4}{4}$; њ) 32; о) $\frac{4 - 3\ln 3}{2}$; п) $6,5 - 6\ln 2$.

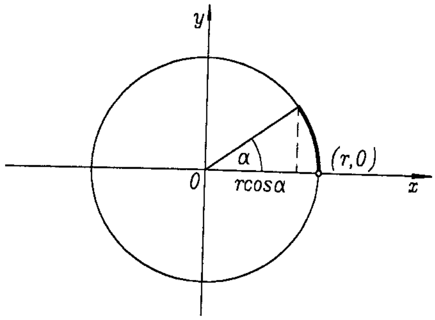
365. а) Како је $y' = x - 2$, то је $y'(1) = -1$ и $y'(4) = +2$, па су једначине тангенти $y = -x + 1,5$ и $y = 2x - 6$. Ове праве се секу за $x = 2,5$, па је тражена површина (видети слику):

$$\begin{aligned} P &= \int_1^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - (-x + 1,5)\right) dx + \int_{2,5}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - (2x - 6)\right) dx \\ &= \int_1^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{2,5}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) dx = \frac{9}{8}; \end{aligned}$$

б) $\frac{128}{3}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{7}{6}$; д) $\frac{4}{3}$; ђ) $(\ln 10 - \pi + 4)/2$.



Сл. уз зад. 365а



Сл. уз зад. 367

366. а) $\frac{5}{6}$; б) $2 - 2\ln 2$; в) $2\pi + 4$; г) $\frac{4}{3}$; д) $4\pi + 8$; ђ) 8.

367. Нека је једначина кружнице $x^2 + y^2 = r^2$. Тада је једначина лука $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r\cos\alpha \le x \le r$ (видети слику), па је

$$l = \int_{r\cos\alpha}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_{r\cos\alpha}^{r} \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_{\cos\alpha}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = r\alpha,$$

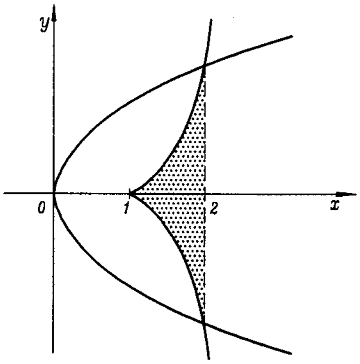
при чему је коришћена смена $x = rt$, $\cos\alpha \le t \le 1$.

368. а) $l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{x^2 + p^2}\,dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + p^2} + +\frac{p^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + p^2})\right)\Big|_0^a$ $= \frac{a}{2p}\sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + p^2}}{p}$;

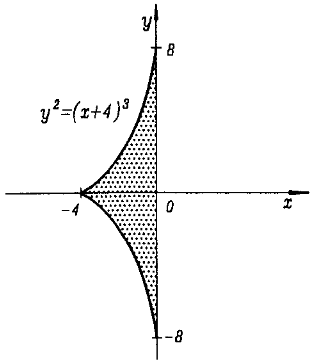
б) $l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$;

в) $l = \int_0^a \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}\,dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^a = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

г) $l = \int_a^b \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1} \frac{u + 2}{u(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1} \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du == \ln\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$;



Сл. уз зад. 371б



Сл. уз зад. 373а

д) $l=\int_0^{1/2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{1/2}\left(-1+\frac{1}{1+x}++\frac{1}{1-x}\right)dx=-\frac{1}{2}+\ln 3;$

ђ) $l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}.\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}+\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1-\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{d(1/x)}{\sqrt{1+(1/x)^2}}=1-\ln\left(\frac{1}{x}+\right.$
$\left.\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2};$

е) $l=\int_0^{b}\sqrt{1+\frac{4a^2x^2}{(a^2-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{b}\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,dx=2a^2\int_o^{b}\frac{dx}{a^2-x^2}-\int_0^{b}dx=a\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\,\Big|_0^b-b=$
$a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$

369. а) Како је $y'=\operatorname{ctg}x$, то је $l=\int_a^{\pi/2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}\,dx=\int_a^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\operatorname{tg}a/2}^{1}\frac{dt}{t}=-\ln\operatorname{tg}\frac{a}{2};$

б) Како је $y=0$ за $x=\frac{\pi}{3}$ и $y'=-\operatorname{tg}x$, то је

$$l=\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,dx=\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2\,dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\,\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}}=\ln(2+\sqrt{3});$$

в) Како је $x'(y)=\operatorname{tg}y$, то је $l=\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2y}\,dy=\ln(2+\sqrt{3})$ као у задатку б).

370. а) Очигледно је за $0\le x\le 1$ $y'=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, па је $l=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\big|_0^1=2;$

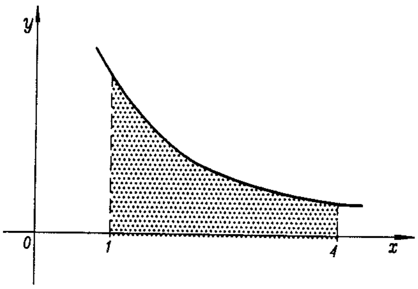
б) За $-1\le x\le 1$, добијамо $y'=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, па је $l=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{1+x}\big|_{-1}^{1}=4.$

371. а) $l=\int_1^e\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2}\,dy==\frac{1}{2}\int_1^e\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=\frac{1}{4}(1+e^2);$

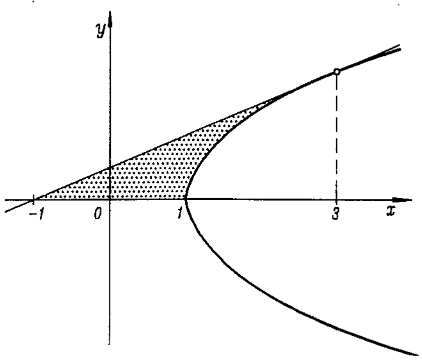
б) Пошто је $\frac{2}{3}(x-1)^3=\frac{x}{3}$ за $x=2$ (видети слику), то је $l=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{6}{4}(x-1)}\,dx=$
$2\int_1^2\sqrt{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_1^2\sqrt{3x-1}d(3x-1)=\frac{2\sqrt{2}}{9}(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}).$

372. Имамо да је за $0 \le x \le 1$ $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$, а $y'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1$. Дакле:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2x - 2\sqrt{x} + 1}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\, dt \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\, d\left(t + \frac{1}{2}\right) = 2\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{2u^2 + \frac{1}{2}}\, du \\ &= \sqrt{2}\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{4u^2 + 1}\, du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{(2u+1)^2 + 1}\, d(2u) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{z^2 + 1}\, dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{\ln|z + \sqrt{1+z^2}|}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$



Сл. уз зад. 373б



Сл. уз зад. 374

373. а) $V = \pi\displaystyle\int_{-4}^{0} y^2\, dx = \pi\int_{-4}^{0} (x+4)^3\, dx = \frac{\pi}{4}\,(x+4)^4\Big|_{-4}^{0} = 64\pi$ (видети слику);

б) $V = \pi\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 12\pi$ (видети слику); в) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx = \frac{\pi}{4}$;

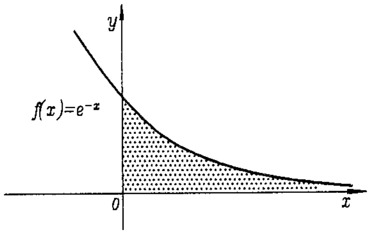
г) $V = \pi\left(\displaystyle\int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^4\, dx\right) = \dfrac{3\pi}{10}$; д) $V = \pi\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

374. Једначина тангенте на криву је $y - 2 = y'(3)(x - 3)$, односно $y = \dfrac{1}{2}(x+1)$ (видети слику), па је тражена запремина $V = \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_{-1}^{3} (x+1)^2\, dx - \pi\int_1^2 2(x-1)\, dx = \frac{4\pi}{3}$.

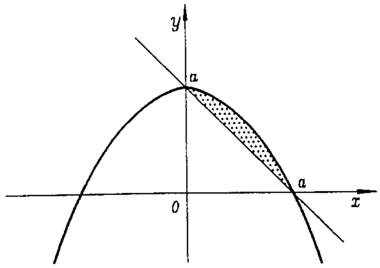
375. Једначина тангенте је $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 3\sqrt{2}$, па је запремина

$$V = 2\pi\int_{-6}^{6}\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2 dx - \pi\int_0^6 12x\, dx = 72\pi.$$

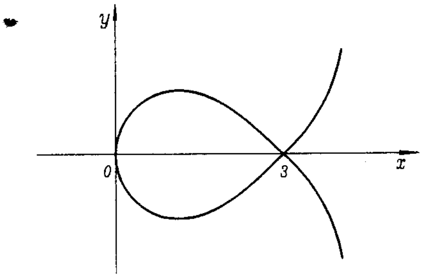
376. а) $V = \pi\displaystyle\int_0^2 (2x - x)^2\, dx = \frac{16}{15}\pi$;



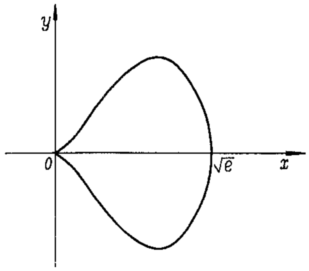
Сл. уз зад. 376б



Сл. уз зад. 376в



Сл. уз зад. 377



Сл. уз зад. 379

б) $V=\lim\limits_{a\to\infty}\pi\int_0^a e^{-2x}\,dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\pi\dfrac{e^{-2x}}{2}\Big|_a^0=\dfrac{\pi}{2}$ (видети слику).

в) $V=\pi\int_0^a\left(a-\dfrac{x^2}{a}\right)^2dx-\pi\int_0^a(a-x)^2\,dx=\pi\int_0^a\left(\dfrac{x^4}{a^2}-3x^2++2ax\right)dx=\dfrac{\pi a^3}{5}$ (видети слику).

377. Пошто је $0\le x\le 3$, то је (видети слику) $V=\pi\int_0^3 y^2\,dx=\pi\int_0^3\dfrac{x(3-x)^2}{9}\,dx=3\pi/4$.

378. а) $\dfrac{8\pi}{3}a^2b$; б) Како је $x=\sqrt[3]{y^2}-4$ (видети слику уз зад 373а), то је

$$V=2\pi\int_0^8 x^2\,dy=2\pi\int_0^8(\sqrt[3]{y^2}-4)\,dy=2\pi\cdot\frac{3}{7}y^{7/3}\Big|_0^8-16\pi\cdot\frac{3}{5}y^{5/3}\Big|_0^8+32\pi y\Big|_0^8=\frac{2^{11}\pi}{35};$$

в) $\dfrac{512\pi}{7}$; г) Пошто је $x_1^2=a^2-ay$, $x_2^2=(a-y)^2$, то је (видети слику уз задатак 376в):

$$V=\pi\int_0^a(a^2-ay-(a-y)^2)\,dy=\pi\int_0^a(ay-y^2)\,dy=\frac{\pi a^3}{6};$$

д) $\dfrac{4}{3}\pi a^2b$; ђ) $19,2\pi$; е) $\pi^2-2\pi$.

379. Запремина је (видети слику)

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\sqrt{e}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\sqrt{e}}x^4(1-2\ln x)^2\,dx\\&=\pi\left[(1-2\ln x)^2\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{e}}+\frac{4}{5}\int_0^{\sqrt{e}}x^4(1-2\ln x)\,dx\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{5}\pi \int_0^{\sqrt{e}} x^4(1-2\ln x)\,dx = \frac{4}{5}\pi\left[(1-2\ln x)\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{e}} + \frac{2}{5}\int_0^{\sqrt{e}} x^4\,dx\right]$$
$$= \frac{8\pi}{25}\int_0^{\sqrt{e}} x^4\,dx = \frac{8\pi}{125}e^2\sqrt{e}.$$

380. а) $2x + 2yy' = 0$; б) $x - c = -yy'$, па је $y^2y'^2 + y^2 = 1$; в) због $y' = c$, биће $y - xy' = 0$; г) како је $y' = -C_1\sin x + \varepsilon\cos x$, $y'' = -C_1\cos x - \varepsilon\sin x$, то је $y'' + y = 0$; д) $y' = C_1e^x - C_2e^{-x} + 3$, $y'' = C_1e^x + \varepsilon e^{-x}$, па је $y = y'' + 3x$; ђ) $2\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2} = \dfrac{x-yy'}{x^2-y^2}$; е) $\left((y'')^{-2/3}\right)''' = 0$; ж) $y\ln y' + x(1-y') = 0$.

381. а) Како је $y - x\dfrac{dy}{dx} = 0$, то је $y\,dx = x\,dy$, тј. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, одакле, после интеграције, добијамо $\ln|y| = \ln|x| + C$, тј. $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, односно $|y| = |x|\cdot C$, па је опште решење $y = Cx$;

б) $y = Ce^{-1/x^2}$; в) $y = C(x + \sqrt{x^2+a^2})$; г) $2y = \dfrac{Cx^2}{(1+x)^2} - 1$; д) $\dfrac{C-x}{1+Cx}$; ђ) $y = Ce^{1/x}$;

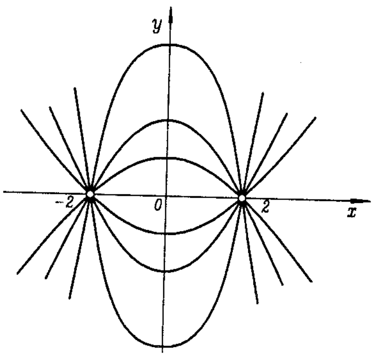
е) $S^2 = \dfrac{t^2 - 1 + Ct}{t}$; ж) $r = Ce^{1/\varphi} + a$; з) $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$;

и) једначина се може трансформисати на облик $\dfrac{x}{x-1}\,dx = -\dfrac{y+1}{y-1}\,dy$, опште решење је $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = C$.

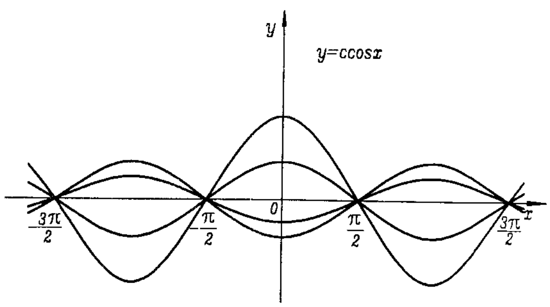
382. а) Због $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$, имамо $\dfrac{dy}{-y^2} = dx$, одакле је $\dfrac{1}{y} = x + C$, тј. опште решење је $y = \dfrac{1}{x+C}$. Пошто је $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, биће $2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+C}$, одакле је $C > 0$, па је тражено партикуларно решење $y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = Ce^{\sqrt{x}}$, $y = e^{\sqrt{x}-2}$; в) $y = \dfrac{C\sin^2 x - 1}{2}$, $y = 2\sin^2 x - \dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = C$, $y = -x$.

383. а) $xy = C$, $xy = -8$; б) $x^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$; в) $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$.



Сл. уз зад. 384а



Сл. уз зад. 384б

384. а) $y = C(x^2 - 4)$ (видети слику); б) $y = C\cos x$ (видети слику).

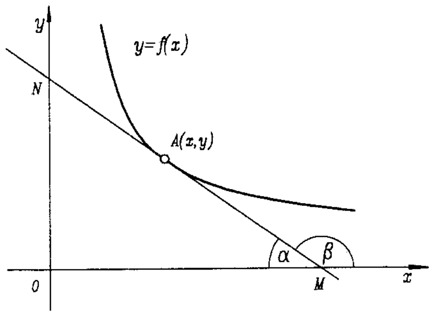
385. а) Ако је $y = k$, тада је $y' = 0$, па заменом у једначину добијамо $k^2 + (1-2x)k - 2x = 0$, тј. $k(k+1) - 2x(k+1) = 0$, што је испуњено ако и само ако је $k = -1$:

б) $k=1$; в) $k=1$ или $k=-1$; г) $k=-1$.

386. Нека су v_0 и s_0 почетне вредности брзине и пређеног пута у тренутку $t=0$. Пошто је $\dfrac{dV}{dt}=a$, налазимо $v=at+C$, па због $v_0=a\cdot 0+C$, имамо да је $C=v_0$, тј. $v=v_0+at$. Како је $v=\dfrac{ds}{dt}$, то је $\dfrac{ds}{dt}=at+v_0$, па је $s=\int(at+v_0)\,dt=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+C_1$ и за $t=0$ је $s=s_0$, па је $C_1=s_0$, одакле добијамо закон кретања тачке: $s=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+S_0$.

387. $y'=x^2$; $y=\dfrac{x^3}{3}+C$.

388. Из $y'=y+3$, добијамо $\dfrac{dy}{y+3}=dx$. Опште решење ове једначине је $y=-3Ce^x$, а из услова $y(0)=-2$ добијамо $C=1$, па је тражена једначина $y=-3+e^x$.



Сл. уз зад. 389

389. Нека је $\alpha=\sphericalangle OMN$ (видети слику). Тада је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$ и $\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}\alpha=y'$, па је $y'=-\dfrac{y}{x}$, тј. $\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dx}{x}=0$, одакле налазимо да све тражене криве имају једначине облика $y=\dfrac{C}{x}$.

390. $y=\dfrac{1}{b}(t-ax-C)$, $y'=\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{dt}{dx}-a\right)$, па је $f(t)=\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{dt}{dx}-a\right)$, одакле се налази опште решење $x=\displaystyle\int\frac{dt}{bf(t)+a}$.

391. а) Како је $y'=\int xe^x\,dx=(x-1)e^x+C_1$, то је $y=\int\big((x-1)e^x+C_1\big)\,dx=(x-2)e^x+C_1x+C_2$. Из $y'(0)=0$ следи $C_1=1$, а из $y(0)=1$ налазимо да је $C_2=3$;
б) $y=C_1x+C_2-\ln\cos x$, $y=-\ln\cos x$;
в) $y''=-\cos x+\sin x+C_1$, $y'=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2$, $y=\cos x-\sin x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$, $y=-\cos x+\sin x$;
г) $y=\dfrac{x^3}{6}-\sin x+x$; д) $y=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln|x|-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{4}$.

392. 2°. а) $\dfrac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2x+1)\,dx=\dfrac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\dfrac{1}{2}x+C$;

б) $\int\operatorname{ch}^2x\,d(\operatorname{sh}x)=\int(1+\operatorname{sh}^2x)\,d(\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x+\dfrac{\operatorname{sh}^3x}{3}+C$; в) $x+C$;

г) $\int dt=t+C=\ln\left(\dfrac{x}{a}+\sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

д) $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$; ђ) $\displaystyle\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$

393. Нека је $u=\sqrt{x^2+1}$, $dv=dx$; тада је $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $v=x$, па је

$$I=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

одакле налазимо да је $I=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)+C$.
На други начин овај интеграл се може израчунати ако се уведе смена $x=\operatorname{sh}t$.

394. Ако уведемо замену $x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\cos t$, добијамо

$$\int_\pi^0-\frac{(b-a)^2}{4}\sin^2t\,dt=\int_0^\pi\frac{(b-a)(1-\cos t)}{8}\,dt=\pi\frac{(b-a)^2}{8}.$$

395. а) Нека је $u=x^n$, $dv=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ $(v=-2\sqrt{1-x})$. Биће: $I_n=-2x^n\sqrt{1-x}+2n\displaystyle\int x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx=-2x^n\sqrt{1-x}+2n\int\frac{x^{n-1}(1-x)\,dx}{\sqrt{1-x}}==-2x\sqrt[n]{1-x}+2n(I_{n-1}-I_n)$, па је $(2n+1)I_n=-2x^n\sqrt{1-x}+2nI_{n-1}$.

б) $I_0=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}+C_0$; $I_1=-\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x}(x+2)+C_1$; $I_2==-\dfrac{2}{5}\sqrt{1-x}\left(x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{8}{3}\right)+C_2$.

396. За $x\geq 0$ имамо $\displaystyle\int e^{-|x|}\,dx=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C_2$, а за $x<0$, $\displaystyle\int e^{-|x|}\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C_1$. Пошто је примитивна функција непрекидна, за $x=0$ мора бити $-1+C_2=1+C_1$, па је $C_2=2+C_1$. Дакле,

$$\int e^{-|x|}\,dx=\begin{cases}2-e^{-x}+C, & x\geq 0\\ e^x+C, & x<0,\end{cases}$$

где је C произвољна константа.

397. Како је за $x>0$ $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$ и за $x<0$ $\displaystyle\int -x\,dx=-\frac{x^2}{2}+C_2$, а за $x=0$ $C_1=C_2$, то је $\displaystyle\int|x|\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x|x|}{2}+C$.

398. За $|x|\leq 1$ добијамо $\displaystyle\int\max(1,x^2)\,dx=\int dx=x+C_1$, а за $|x|>1$: $\displaystyle\int\max(1,x^2)\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C_2$. Пошто је за $x=1$: $1+C_1=\dfrac{1}{3}+C_2$, а за $x=-1$: $-1+C_1=-\dfrac{1}{3}+C_2$, добијамо :

$$\int\max(1,x^2)\,dx=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}+C, & -\infty<x<-1\\ x+C, & -1\leq x\leq 1\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}+C, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

399. а) Нека је $h=\dfrac{b-a}{n}$, $\xi_i=a+ix$. Тада је

$$\int_a^b\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\sin(a+ih)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\cos\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right) - \cos\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)\right)$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (h\to 0)}} \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} \left(\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \left(\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right) = \cos a - \cos b;$$

б) $\dfrac{b^4-a^4}{4}$. Упуцтво: изабрати $\xi_i = a+ih$, где je $h = \dfrac{b-a}{n}$ и искористити резултат: $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

400. Да je $I_1 = I_2$ једноставно се показује када се уведе смена $t = 1-x$. С друге стране,

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos t\,dt}{\frac{1}{2}\cos t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi,$$

па je $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{2}$. (Користили смо смену $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$).

401. Рад A, извршен под дејством силе F паралелно x-оси којим je тело T померено од тачке a до тачке b je $A = \displaystyle\int_a^b F(x)\,dx$. Ако je M маса Земље и R полупречник Земље, а x растојање неке тачке од центра Земље, сила F у тој тачки je $F(x) = k\dfrac{mM}{x^2}$, где je k константа. Тако je: $A = \displaystyle\int_R^{R+h} F(x)\,dx = kmM\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2} = kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$. Коефицијент k налазимо из услова да je $mg = k\dfrac{mM}{R^2}$, тj. $k = \dfrac{gR^2}{M}$, jep je на површини Земље (за $x = R$) $F = mg$. Према томе $A = mgR^2\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)$. Ако тело треба да буде бесконачно удаљено, тада je $\lim\limits_{h\to\infty} A = mgR$.

402. a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^3 x} = -\int_{1/2}^{0}\frac{du}{(1-u^2)^2} = \int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u^2)^2} = = \frac{1}{4}\int_0^1\left[\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u-1}+\right.$ $\displaystyle\left.\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}\right]du = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{1/2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$

б) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{(1+t^2)^2\,dt}{t^3} = \frac{1}{4}\left(\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{t^3}+2\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{dt}{t}++\int_{\sqrt{3}/3}^{1}t\,dt\right) = -\frac{1}{8}\cdot$ $\displaystyle\frac{1}{t^2}\Big|_{\sqrt{3}/3}^{1}+\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{\sqrt{3}/3}^{1}+\frac{1}{8}t^2\Big|_{\sqrt{3}/3}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$

403. a) Смена $x = -t$ даје: $I(a,b) = \displaystyle\int_{-a}^{-b}\frac{(1-t^2)(-\,dt)}{\sqrt{1+t^4}(t^2+1)} = \int_{-b}^{-a}\frac{(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} = I(-b,-a).$

б) Узети смену $x = \dfrac{1}{t}$ $\left(dx = -\dfrac{dt}{t^2}\right)$.

404. a) $F'(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2};$

б) $F'(x) = \left(-\int_5^x \sqrt{1+t^2}\,dt\right) = -\sqrt{1+x^2}$;

в) $F'(x) = \left(\int_2^u \sqrt{1+t^2}\,dx\right)'_x = \left(\int_2^u \sqrt{1+t^2}\,dt\right)'_u \cdot u'_x = \sqrt{1+u^2}\cdot u'_x = 2\sqrt{1+4x^2}$;

г) $F'(x) = \left(\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'_x + \left(\int_0^{e^x} \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'_x = \left(-\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'_x + \left(\int_0^u \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'_u \cdot$ $u'_x = -\sqrt{1+x^4} + e^x\cdot\sqrt{1+e^{4x}}$.

405. Како је $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2+1}$, очито је да је локални минимум функције тачка $x_0 = -\dfrac{1}{2}$. Да бисмо одредили најмањи и највећу вредност функције на овом интервалу, наћићемо $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\,dt + 3\int_0^x \frac{dt}{(t-1)^2+1} = \ln|t^2-2t+2|\Big|_0^x + 3\operatorname{arctg}(t-1)\Big|_0^x \\ &= \ln(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arctg}(x-1) - \ln 2 + \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

па је $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{13}{8} + 3\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{3\pi}{4} \approx -0{,}11$ најмања вредност функције, а највећа вредност функције је $f(1)$, јер је $f(1) = \dfrac{3\pi}{4} - \ln 2 \approx 1{,}66 > f(-1) = \ln\dfrac{5}{2} - 3\operatorname{arctg} 2 + \dfrac{3\pi}{4} \approx -0{,}02$.

406. Како је $\left(\int_x^T f(t)\,dt\right)'_x = f(x+T) - f(x) = 0$, значи да је $\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ је константа.

407. Уведимо смену $x = \pi - u$ и тада је

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = -\int_\pi^0 (\pi-u)f(\sin(\pi-u))\,du \\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin u)\,du - \int_0^\pi uf(\sin u)\,du = \pi\int_0^\pi f(\sin u)\,du - J, \end{aligned}$$

па је $J = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin u)\,du$. С друге стране,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\sin u)\,du &= \int_0^{\pi/2} f(\sin u)\,du + \int_{\pi/2}^\pi f(\sin u)\,du \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\sin u)\,du + \int_{-\pi/2}^0 \big(-f(\sin v)\big)\,dv = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx, \end{aligned}$$

где смо користили смену $v = \pi - u$.

408. Ако уведемо смену $a+b-x = u$, добићемо

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)\,dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)\,du = \int_a^b (a+b-u)f(a+b-u)\,du \\ &= \int_a^b (a+b-u)f(u)\,du = \int_a^b f(u)\,du - \int_a^b uf(u)\,du. \end{aligned}$$

Како се променљива u може означити и са x, биће:

$$\int_a^b xf(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b xf(x)\,dx,$$

одатле се добија тражена релација.

409. Како за све природне бројеве n важи $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^m} \le 1$, биће $1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^m}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, па је $\int_0^{1/2} dx \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ тј. $\frac{1}{2} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} \le \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

410. а) Како је $0 < I_n < \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, а како је за све $x \in (0,1)$: $0 < x^n\sin(\pi x) < x^{n-1}\sin(\pi x)$, то је $I_n < I_{n-1}$, $n \ge 2$.

б) $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin(\pi x)|_0^1 - \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cos(\pi x)\,dx = -\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}$ $\left(x^{n+2}\cos(\pi x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 x^{n+2}\sin(\pi x)\,dx\right) = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)}I_{n+2}$.

411. а) $I_0 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 te^t\,dt = 2$.

б) $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n e^1\,dx = \frac{e}{n+1}$, па је $\lim\limits_{n to\infty} I_n = 0$. С друге стране, за $0 \le x \le 1$ важи $x^n e^{\sqrt{x}} < x^{n-1}e^{\sqrt{x}}$, па је $I_n < I_{n-1}$ за $n \ge 1$.

в) Уводимо смену $\sqrt{x} = t$:

$$
\begin{aligned}
I_n &= 2\int_0^1 t^{2n+1}e^t\,dt = 2t^{2n+1}e^t|_0^1 - 2\int_0^1 t^{2n}e^t\,dt \\
&= 2e - 2(2n+1)e + 2(2n+1)2n\int_0^1 t^{2(n-1)+1}e^t\,dt \\
&= -4ne + (2n+1)\cdot 2nI_{n-1}.
\end{aligned}
$$

412. б) Ако је $u = x^{n-1}$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$ $(v = \sqrt{1+x^2})$, добијамо:

$$
\begin{aligned}
J_n &= x^{n-1}\sqrt{1+x^2}|_0^1 - (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} - (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n,
\end{aligned}
$$

одакле је $J_n = \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{n-1}{n}J_{n-1}$.

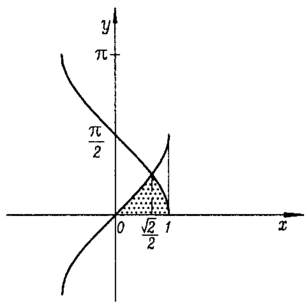
413. Како је $\int_0^1 (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, значи да полином $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ не може бити сталног знака у интервалу $(0,1)$, па мора имати бар један корен у том интервалу.

414. Због $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ f не може бити сталног знака на $[0,1]$, па због непрекидности мора имати бар једну нулу. Нека је $x_0 \in [0,1]$ једна нула функције f на том интервалу и нека је, на пример, $f(x) < 0$ за $x \in [0, x_0)$ и $f(x) > 0$ за $x \in (x_0, 1]$. Тада је

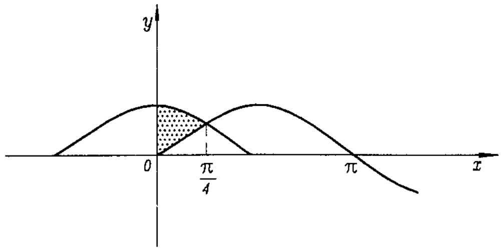
$$
0 = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx - x_0\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-x_0)f(x)\,dx > 0,
$$

јер је $(x-x_0)f(x) > 0$ за $x \ne x_0$, што је контрадикција. Према томе, f мора имати бар две нуле на интервалу $[0,1]$.

415. Претпоставимо супротно, да таква функција постоји. Тада постоји тачка $C \in (0,1)$ таква да је $f(C) > 0$. Нека у тачки $x_0 \in [0,c]$ функција $f(x)$ има највећу вредност на интервалу $[0,c]$. Тада би било $\int_0^{x_0} f(t)\,dt \le f(x_0)\cdot x_0 \le f(x_0)\cdot c \le f(x_0)$, што је супротно постављеном услову.



Сл. уз зад. 416а,I



Сл. уз зад. 416а,II

416. а) I *начин*. Како је $\arcsin x = \arccos x$ за $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (видети слику), то је

$$P = \int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x\,dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \arccos x\,dx = \sqrt{2} - 1.$$

II *начин*. Тражена површина једнака је: $P = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx = \sqrt{2} - 1$ (видети слику).

б) $p = \left|\displaystyle\int_0^1 y^2(y-1)\,dy\right| = \left|-\dfrac{1}{12}\right| = \dfrac{1}{12}$. в) $p = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sin \pi y - (-1+\sqrt{y})\Big)\,dy = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{3}$.

417. а) Због $y' = (1-2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2}$, екстремне вредности су $y_e = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2\alpha e}}$ за $x_e = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2\alpha}}$. Одавде се непосредно налази да све ове тачке припадају правој $y = \dfrac{x}{\sqrt{e}}$.

б) $p(A) = \displaystyle\int_0^A x e^{-\alpha x^2}\,dx = \dfrac{1}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha A^2})$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} p(A) = \dfrac{1}{2\alpha}$.

418. $\phi'(x) = \dfrac{x f(x)\int_0^x - f(x)\int_0^x t f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2} = \dfrac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}\cdot \phi(x) \ge 0$, јер је $\phi(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt \ge 0$, пошто је $f(t) > 0$, $t \le x$.

419. Једначина се може представити у облику $\displaystyle\int_0^x y\,dx + xy = \int_0^x xy\,dx + +(x+1)xy$, одакле диференцирањем (по x) налазимо: $y = xy + 2xy + x^2 y$; тј. $x^2 y' + (3x-1)y = 0$, односно $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{(1-3x)\,dx}{x^2}$. Опште решење је $y = \dfrac{Ce^{-1/x}}{x^3}$.

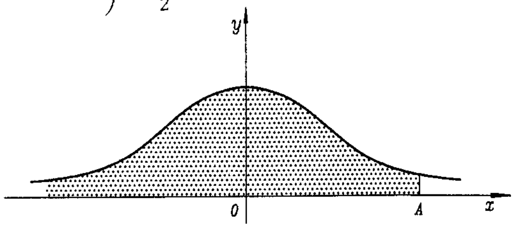
420. а) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-2x\,dx}{1+x^2}$, одакле налазимо да је опште решење $y = \dfrac{C}{1+x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;

в) $V = \displaystyle\lim_{A\to\infty} 2\pi \int_0^A \dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$ (видети слику). Како је

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^A \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{x\cdot(-2x)\,dx}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_0^A + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^A = \operatorname{arctg} A + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{1+A^2} - \operatorname{arctg} A\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{1+A^2} + \operatorname{arctg} A\right),$$

то је $V = \lim\limits_{A\to\infty} \pi\left(\frac{A}{1+A^2} + \operatorname{arctg} A\right) = \frac{\pi^2}{2}.$



Сл. уз зад. 420в

Глава V – Комбинаторика

421. а) Испред тројке може се налазити било који двоцифрени број, а њих има деведесет. б) 180.

422. 15.

423. Десет: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE.

424. 18.

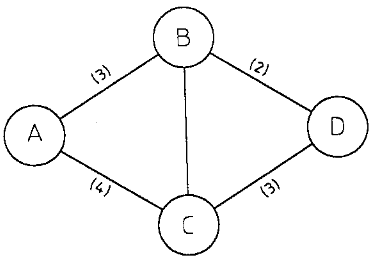
425. Осам.

426. Означимо са n број тачака. Под овим условима оне одређују $\frac{n(n-1)}{2}$ правих, па је $\frac{n(n-1)}{2} = 2n$, одакле налазимо да је $n = 0$ или $n = 5$.

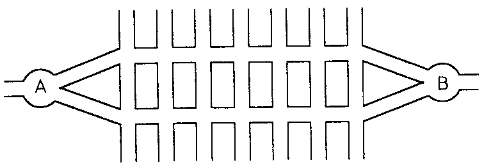
427. а) Двоцифрени завршеци могу бити 25 или 75 јер се цифре не могу понављати, па троцифрени завршеци могу бити само 025 или 075. У свакој од ових могућности "искоришћене" су по три цифре - преостаје још седам цифара које се могу распоредити на 7! начина. Резултат: $2 \cdot 7!$ б) $3 \cdot 6 \cdot 6! + 2 \cdot 7!$.

428. $6 \cdot 3 = 18$.

429. Мрежа путева од А до Д изгледа као на слици. Ако се иде путем А-Б-Д, тада има 6 путева, путем А-Ц-Д има 12 путева, ако се иде путем А-Б-Ц-Д, има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, а А-Ц-Б-Д $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ пута. Укупан број путева је $6 + 12 + 27 + 24 = 69$.



Сл. уз зад. 429



Сл. уз зад. 430

430. Почевши од трга А (видети слику) и сваки пут када једносмерном улицом стигне на раскрсницу, возач може да бира два пута. Укупан број могућности је $2^8 = 256$.

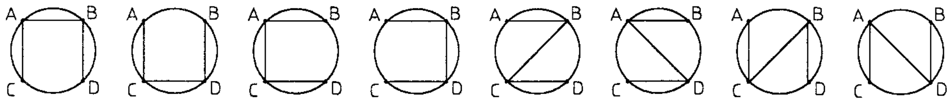
431. Означимо са $|C|$ број елемената скупа C. Тада је $\max(|A|, |B|) \leq |A \cup B| \leq m + n$, $0 \leq |A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$, $0 \leq |A \setminus B| \leq n$, $0 \leq |B \setminus A| \leq m$, $|A \times B| = mn$.

432. 2^6 начина.

433. а) Како је $2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$, сваки делилац броја 2400 је облика $2^x 3^y 5^z$, где је $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$. Пошто постоји 6 могућности за x, 2 за y и 3 за z, то постоји $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ различитих делилаца броја 2400.
б) $(k_1 + 1)\,(k_2 + 1)\,\cdots(k_m + 1)$.

434. Први топ се може поставити на произвољно поље на $8^2 = 64$ начина. Други топ се може поставити на $7^2 = 49$ начина (на било које поље које није у истој врсти или колони у којој је први топ). Трећи топ се може поставити на $6^2 = 36$ начина итд. Тражени број начина је $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

435. Како скуп A има n елемента, таблица било које његове операције има n^2 поља, а за свако поље има n могућности за попуњавање - прво поље може се попунити на n начина, друго опет на n начина, дакле, прва два на n^2 начина итд. Пошто поља има n^2, број начина попуњавају таблице је n^{n^2}.



Сл. уз зад. 436

436. На слици су приказане све такве изломљене линије за $n = 4$. Нека је A_1 једна од датих n тачака. Следећа тачка A_2 изломљене линије је једна од суседних тачака тачке A_1 и може се изабрати на два начина. Исто тако, тачка A_3 се може изабрати на два начина итд. до A_{n-1}. A_n је преостала тачка. Дакле, постоји 2^{n-2} оваквих изломљених линија. Пошто има n тачака од којих се може поћи и пошто би се свака изломљена линија на тај начин посматрала два пута, тражени број је $\frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^{n-2} = n \cdot 2^{n-3}$ различитих изломљених линија.

437. У првом колу одиграно је 2^{n-1}, у другом 2^{n-2}, трећем 2^{n-3} мечева итд. Дакле, на турниру је одиграно $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$ мечева. Сваки меч се игра у три, четири или пет сетова, па је $(2^n - 1) \cdot 3 \leq 2^{n+1} + 4n^2 + 184 \leq (2^n - 1) \cdot 5$, односно $2^n - 187 \leq 4n^2 \leq 3 \cdot 2^n - 189$. Провером за $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ види се да су ове неједнакости задовољене ако и само ако је $n = 8$. Дакле, број учесника турнира је 256.

438. а) Ако је број улица у насељу једнак n, онда из услова да се сваке две улице секу добијамо $\frac{n(n-1)}{2} = 21$, одакле следи да је $n = 7$.
б) Претпоставимо да се улице у насељу изграђују једна за другом. Изградњом сваке нове улице (после прве) број стамбених четврти, са свих страна ограничених улицама, повећава се за број који је за један мањи од броја новодобијених раскрсница. Зато је тражени број $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

439. Ако се три пута појављује нула, она је на месту јединица, десетица или стотина. На месту хиљада може бити било који од бројева $1, 2, \ldots, 9$, па таквих бројева има 9. Ако се три пута појављује цифра k, $k \neq 0$ онда четврта цифра може бити нула (ако је на првом месту добијају се троцифрени бројеви) или цифра l, $l \neq 0$, $l \neq k$. Број свих таквих бројева је $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$, јер четврта цифра (различита од претходних) може стајати на неком од четири места. Према томе, са наведеним својством има $324 + 9 = 333$ броја.

440. Укупно је одиграно утакмица $m\frac{2k(2k-1)}{2} + \frac{2m(2m-1)}{2} - m = m(k(2k-1) + 2(m-1))$. Из услова да је овај број непаран следи да k и m морају бити непарни, па је због

$m > 1$, $k > 1$: $m \geq 3$, $k \geq 3$. Из неједнакости $m(3 \cdot 5 + 2m - 2) \leq m(k(2k-1) + 2m - 2)$ следи $m(2m + 13) < 115$, што повлачи $m < 5$. Дакле, једино могуће је $m = 3$. Тада важи $3(k(2k-1)+1) \leq 114$, тј. $k(2k-1) \leq 37$, што повлачи $k < 5$. Преостаје једина могућност : $k = 3$.

441. $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$.

442. а) -50; б) -3492

443. а) $x_1 = 9$; б) $x_1 = 11$; в) $x_1 = 4$;

444. а) $x \in \{1,2,3,4\}$; б) $x \in \{1,2,3\}$;

445. а) $n \in \{0,1,2\}$; б) $n \in \{1,2\}$; в) $n \geq 2$; д) $n \in \{0,1,2,3\}$.

446. а)

1. ГКРУ	7. КГРУ	13. РГКУ	19. УГКР
2. ГКУР	8. КГУР	14. РГУК	20. УГРК
3. ГРКУ	9. КРГУ	15. РКГУ	21. УКГР
4. ГРУК	10. КРУГ	16. РКУГ	22. УКРГ
5. ГУКР	11. КУГР	17. РУГК	23. УРГК
6. ГУРК	12. КУРГ	18. РУКГ	24. УРКГ.

447. а) Са a почиње $6!$ пермутација, са b такође $6!$, па је 1440. пермутација $bgfedca$. Пошто са ca, cb и cd почиње по 120 пермутација то је 1800. пермутација $(1440 + 120 + 120 + 120 = 1800)$ $cdgfeba$. Са cea почиње $4! = 24$ премутације, са $ceba$ и $cebd$ по $3! = 6$ пермутација. Зато је 1836. пермутација $(1800 + 24 + 6 + 6 = 1836)$ - $cebdgfa$. Тражена 1841. пермутација је $cebfgad$.
б) 51397; в) 421635.

448. $eafbdc$.

449. $6! = 720$.

450. Ако спољашње гуме фиксирамо, а унутрашњим мењамо распоред, добијамо да је укупан број могућности $4!$.

451. а) $\dfrac{8!}{3!} = 6720$; б) $\dfrac{8!-7!}{3!} = 5880$.

452. а) $7!$; б) $5!$; в) $4!$.

453. $3! = 6$.

454. 1° а) Постоје следеће могућности: $2456abcd$, $a2456bcd$, $ab2456cd$, $abc2456d$, $abcd2456$, где су $a, b, c, d \in \{1,3,7,8\}$; они се у сваком од ових пет случајева могу распоредити на $4!$ начина. Дакле тражени број је $5 \cdot 4! = 120$.
б) $5! \cdot 4! = 2880$.
2° а) $(n-m+1)!$; б) $m! \cdot (n-m+1)!$

455. $5! \cdot 5! = 14400$.

456. а) $9!$; б) $2 \cdot 8 \cdot 8!$; в) $\frac{1}{2} \cdot 10!$ -јер је таква тачно половина укупног броја пермутација.

457. Тројка може бити на једном од 6 места, двојка на једном од 7 места на којем није тројка (6 могућности) и јединица на једном од 8 места на којима нису двојка и тројка (такође - 6 могућности). Преостале цифре могу се распоредити на слободна места на $6!$ начин. Тражени број пермутације је $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6! = 155520$.

458. $30! - 2 \cdot 29!$.

459. $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103680$;

460. Обзиром на то да производи фабрике А не смеју бити један до другог, по један производ може бити на почетку, у средини и на крају, а како су различити, могу се на тим местима распоредити на $3!$ начина. Производи фабрика Б, односно Ц, могу стајати на другом или претпоследњем месту и јер су различити могу се пермутовати на $4!$ односно $5!$ начина. Број могућих распореда је, дакле, $2 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 34560$.

461. а) $\frac{8!}{(2!)^3} - 3 \cdot \frac{7!}{(2!)^2} + 3 \cdot \frac{6!}{2!} - 5! = 2220$; б) $\frac{8!}{(2!)^4} - 4 \cdot \frac{7!}{(2!)^3} + 6 \cdot \frac{6!}{(2!)^2} - 4 \cdot \frac{5!}{2!} + 4! = 864$;

462. а) $n! - 2(n-1)!$; б) $n! - 6(n-2)!$.

463. а) $\frac{n!}{(n+1)\cdot n!-n!} = \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n}$; б) $\frac{n+1}{n+2}$; в) $\frac{n+3}{n+1}$;

464. Пошто је $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)! - k!$ за $k \in \mathbf{N}$ то је $S_n = 2! - 1! + 3! - 2! + \cdots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1$.

465. $5! - (2 \cdot 4! - 3!) = 78$.

466. а)

1. AAMM	4. MAAM
2. AMAM	5. MAMA
3. AMMA	6. MMAA

467. а) Са a почиње $\dfrac{7!}{2!\cdot 3!} = 420$ пермутација, са b и c почиње по $\dfrac{7!}{3!\cdot 3!} = 140$ пермутација. Дакле, 700. пермутација је $cdddbaaa$. Са da почиње $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$ пермутација, са db, односно dc по $\dfrac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$ и са dda $\dfrac{5!}{2!} = 60$ и са ddb, односно ddc почиње по $\dfrac{5!}{3!} = 20$ пермутација. На овај начин закључујемо да је 1100. пермутација $ddcdbaaa$, па је тражена 1099. пермутација $ddcdabaa$.
б) Једанаеста.

468. а) $ddcdbaaa$; б) $cbacaa$.

469. Тражени индекс је:
а) $\frac{9!}{8} + 3\cdot\frac{9!}{24} + \frac{7!}{2} + 4\cdot\frac{7!}{4} + 6! + 5! + 2\cdot\frac{5!}{2} + 3\cdot 3! + 2! + 2$;
б) $2\cdot\frac{12!}{8} + \frac{12!}{16} + 2\cdot\frac{11!}{4} + 4\cdot\frac{11!}{8} + 2\cdot\frac{10!}{2} + 2\cdot\frac{10!}{4} + \frac{9!}{2} + \frac{8!}{2} + 7! + 7! + 5\cdot 5! + 3\cdot 4! + 3\cdot 3! + 2! + 1 + 1$.

470. $\frac{80!}{20!20!20!20!}$. **471.** $\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040$. **472.** а) $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$; б) $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$.

473. Означимо један избор колача - на пример три кремпите, један шампоњез, два наполеона и један еклер са 1110101101. Сваком избору колача одговараће на овај начин један низ дужине 10 са 7 јединица и три нуле. Дакле, број избора једнак је броју пермутација са понављањем $\frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$.

474. Замислимо да се куглице замене нулама, а преградни зидови између кутија јединицама. Добијају се низови дужине шест од четири нуле и две јединице. Распореду: у првој и другој кутији су по две куглице, а трећа је празна одговара низ 001001 и сл. Број распореда једнак је $P_{4,2}(6) = \frac{6!}{4!2!} = 15$.

475. $P^{(13)}_{6,5,2} = \frac{13!}{6!\cdot 5!\cdot 2}$. **476.** $\frac{45!}{15!\cdot 15!\cdot 15!}$. **477.** $\frac{16!}{(3!)^2(2!)^4(1!)^2} = \frac{16!}{2^6\cdot 3^2}$.

478. $n = 20$. **479.** $V_9^2 = 72$, $V_9^3 = 504$. **480.** $V_{10}^6 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151200$.

481. $V_6^5 - 2V_5^4 = 720 - 2\cdot 120 = 480$. **482.** $V_n^k = n\cdot V_{n-1}^{k-1}$.

483. Дата једначина еквивалентна је једначини $(x+3)(x+2)(x+1) = 720 = 8\cdot 9\cdot 10$, одакле је $x = 7$.

484. а) $V_{13}^{11} = \frac{13!}{2!}$; б) $11! + 2\cdot V_{11}^{10}$.

485. Почетна варијација је АБЕИКЛПРУ, а 10411. варијација шесте класе је БЛИРКП.

486. $\overline{V}_5^3 = 5^3 = 125$. **487.** $\overline{V}_3^{13} = 3^{13} = 1594323$. **488.** $2^7 = 128$.

489. а) $(\overline{V}_{10}^6 - \overline{V}_{10}^5)\cdot 5sec \approx 52.083$ дана; б) Скраћење износи 52.083 - 6.075 $\approx$ 46 дана.

490. $\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

491. а) $\overline{V}_5^5 = 5^5$; б) $\overline{V}_5^5 - \overline{V}_5^4 = 5^5 - 5^4$.

492. а) $\overline{V}_5^{12} = 5^{12}$; б) $\overline{V}_3^2\cdot\overline{V}_2^3\cdot\overline{V}_5^7 = 3^2\cdot 2^3\cdot 5^7$.

493. Посматраћемо све низове дужине 32 формиране од нула и јединица, тако да 0 значи да на том месту нема зуба, а 1 да има. Различитих распореда зуба има, дакле, $\overline{V}_2^{32} = 2^{32}$, па број становника те државе није већи од 2^{32}.

494. Различитих иницијала има $\overline{V}_{30}^{2} = 900$, а како становника има хиљаду, то неки од њих морају имати исте иницијале.

495. Означимо са 1 постојање и са 0 непостојање зуба на одређеном месту. Број распореда зуба једнак је броју речи дужине 68 над азбуком $\{0,\ 1\}$, тј. $\overline{V}_{2}^{68} = 2^{68}$, Међутим $16^{17} = \left(2^4\right)^{17} = 2^{68} < 2^{68} + 1$.

496. а) $\overline{V}_{3}^{2} = 9$; б) $V_3^2 = 6$.

497. Пошто свако исказно слово може да добије вредност $\top$ или $\bot$, број редова у таблици истинитости једнак је броју варијација са понављањем од два елемента n-те класе: $\overline{V}_{2}^{n} = 2^n$.

498. а) Ови четвороцифрени бројеви се морају завршавати са 12, 24, 32 или 52. У сваком од случајева преостале три цифре можемо распоредити на два места на $V_3^2 = 6$ начина, па укупно има $4 \cdot 6 = 24$ оваква броја.
б) Овакви бројеви се могу завршавати са 12, 24, 32, 44 или 52. Преостала два места могу се попунити у сваком од случајева на $\overline{V}_{5}^{2} = 25$ начина, па укупно има $5 \cdot 25 = 125$ оваквих бројева.

499. Број се може завршавати са 0, или са 5. а) $V_5^3 + V_5^3 - V_4^2 = 108$;
б) $\overline{V}_{6}^{3} - \overline{V}_{6}^{2} + \overline{V}_{6}^{3} - \overline{V}_{6}^{2} = 360$.

500. У питању су варијације са понављањем седме класе од три елемента - има их 3^7.

501. $\overline{V}_{5}^{30} = 5^{30}$. **502.** а) 21; б) 56; в) 120; г) 30; д) 0; ђ) 375.

503. Има их четири и то су: *abce*, *bcde*, *bcef* и *bceg*.

504. а) $\binom{5}{2} = 10$; б) $\binom{8}{5} - 10 = 46$. **505.** $\binom{6}{3} = 20$.

506. $\binom{15}{3} = 455$. **507.** $\binom{7}{5} = 21$. **508.** $\binom{6}{2} = 15$.

509. $\binom{39}{7} = 15380937$. **510.** $\binom{n+2}{2} \cdot \binom{n+2}{2}$. **511.** $\binom{100}{2} - 7\left(\binom{4}{2} - 1\right) = 4915$.

512. $\binom{100}{2} - 2 \cdot 20 = 4910$. **513.** $\binom{15}{5} \cdot 5 = 15015$. **514.** $\binom{3}{1}\binom{6}{2}\binom{60}{20}$.

515. а) Збир 9 се добија само у три случаја: $1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4$. б) Збир мањи од 9 добија се у четири случаја $1+2+3$, $1+2+4$, $1+2+5$ и $1+3+4$, па је збир већи или једнак од 9 у $\binom{10}{3} - 4 = 116$ случајева.

516. Букет се може састојати од $3, 4, \ldots, 18$ различитих цветова. Он се може направити на $\binom{18}{3} + \binom{18}{4} + \cdots \binom{18}{18}$ начина. (Имајући у виду да је $\binom{18}{0} + \binom{18}{1} + \cdots \binom{18}{18} = 2^{18}$, број начина за прављење букета је $2^{18} - \binom{18}{0} - \binom{18}{1} - \binom{18}{2} = 261972$.)

517. $\binom{7}{2} \cdot 2^5 = 672$. **518.** $\binom{7}{3} \cdot 7^4 + \binom{7}{4} \cdot 7^3 + \binom{7}{5} \cdot 7^2 + \binom{7}{6} \cdot 7 + \binom{7}{7}$.

519. а) $\binom{48}{9} \cdot \binom{4}{1}$; б) $\binom{48}{8} \cdot \binom{4}{2}$; в) $\binom{52}{10} - \binom{48}{10}$; г) $\binom{52}{10} - \binom{48}{10} - \binom{48}{9} \cdot \binom{4}{1}$.

520. $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} = 371$.

521. Посматрамо случајеве кад играју тачно два бека и један центар, тачно три бека и један центар и тд. Укупан број начина састављања петорке је: $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} + \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{0} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0} + \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{0} = 540$.

522. I начин. Укупно избора има $\binom{9}{5}$, а избора у којима јесте A, али није B има $\binom{7}{4}$,па је тражени број $\binom{9}{5} - \binom{7}{4} = 91$.
II начин. Укупан број избора у којима је одабрано A (па због тога и B) је $\binom{7}{3}$, а број избора у којима није књига A је $\binom{8}{5}$. Тражени број је $\binom{7}{3} + \binom{8}{5} = 91$.

523. а) Означимо куглице са •••••••• и преградимо их усправним цртама, по кутијама, на пример |•••|••|•••|. Од седам међупростора између куглица, црте се могу ставити на два произвољна места, дакле 8 куглица се може распоредити на 3 кутије на $\binom{7}{2} = 21$ начин; б) $\binom{n-1}{k-1}$.

524. $\binom{19}{3} = 969$.

525. Означимо са 1 изабрану књигу, а са 0 неизабрану. Постоји 8 места између $\underbrace{000\cdots0}_{7}$ на која се могу ставити пет књига означне са 1. Дакле број начина је $\binom{8}{5} = 56$.

526. $\frac{1}{2}\binom{48}{24}\cdot\binom{4}{2}$.

527. $\frac{1}{8!}\binom{32}{4}\cdot\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{4}\cdots\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$.

528. Шеснаест тачака у равни, од којих никоје три нису колинеарне, одређивало би $\binom{16}{3} = 560$ троуглова. Међутим, на свакој страници има по $\binom{4}{3} = 4$ групе по три колиеарне тачке. према томе, има $560 - 4\cdot 4 = 544$ тражених троуглова. *Напомена.* Ако би на свакој страници било задато по н тачака, било би одређено $\binom{4n}{3} - 4\cdot\binom{n}{3} = 10n^3 - 6n^2$ троуглова.

531. а) $x_1 = 7$; б) $x_1 = 8$; в) $x_1 = 8$.

532. а) $x = 4$; б) једначина је еквивалентна једначини $6(x+3) - x(x+1) = \frac{120}{x+2}$. Пошто $x \in \mathbf{N}$, то је $6(x+3) > x(x+1)$, одакле се налази да је $1 \le x < 8$. Пошто је 120 дељиво са $x+2$ биће $x \neq 5$, $x \neq 7$. Провером се утврђује да је $x = 3$; в) $x = 10$.

533. а) $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$; б) $x \in \{11,12,\dots,18\}$; в) $x \in \{6,7,8,9\}$; г) $x \in \{11,12,13\}$.

534. $n = 6$, $m = 3$.

535. а) Када никоје три тачке не би биле колинеарне укупан број правих одређених датим тачкама био би $\binom{n}{2}$. Тада би p уочених тачака одређивало $\binom{p}{2}$ прввих. Међутим, како све оне припадају једној правој - оне и одређују само једну праву. Зато је максималан број правих које се могу конструисати кроз дате тачке $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$.
б) $\binom{n}{3} - \binom{m}{3} + 1$.

536. $\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}$.

537. $\binom{180}{1}\cdot\binom{179}{1}\cdot\binom{178}{3} = \frac{180!}{3!\cdot 175!}$.

538. $\binom{2}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2} = 180$.

539. $\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{7}\cdot\binom{8}{8} = 99768240$ начина.

540. $\binom{9}{0}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{21}{4} + \binom{9}{1}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{20}{4} + \binom{9}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{19}{4} + \binom{9}{3}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{18}{4} + \binom{9}{4}\cdot\binom{10}{0}\cdot\binom{17}{4}$.

541. $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}^2\cdot\binom{7}{6-k}^2 = 267148$.

542. Сваки четворочлани скуп који се састоји од по две од датих тачака са сваке од датих правих одређује тачка једну од описаних пресечних тачака и обрнуто. Због тога је тражени број једнак $\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}$.

543. а) 112233; б) 22356.

544. Комбинација друге класе са понављањем има $\overline{C}_4^2 = \binom{5}{2} = 10$ и то су: *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *bb*, *bc*, *bd*, *cc*, *cd* и *dd*. Комбинација треће класе са понављањем има $\overline{C}_4^3 = \binom{6}{3} = 20$ и то су: *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*, *abb*, *abc*, *abd*, *acc*, *acd*, *add*, *bbb*, *bbc*, *bbd*, *bcc*, *bcd*, *bdd*, *ccc*, *ccd*, *cdd* и *ddd*.

545. а) $\overline{C}_{10}^6 = \binom{15}{6} = 5005$; б) $\overline{C}_9^6 = \binom{14}{6} = 3003$; в) 10; г) $\overline{C}_5^6 = \binom{10}{6} = 210$; д) 5005 - 210 ı 4795.

546. Означимо јабуку првог детета са 1, дугог са 2, трећег са 3 и четвртог са 4. Неке могуће поделе су, на пример: 11112233333344444444 11111122223333334444 11111111112224444444 итд. Очигледно је да се ради о комбинацијама четири елемента двадесете класе са понављањем, а њих има $\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = 1771$.

547. а) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$. б) Ради се о комбинацијама са понављањем пете класе од два елемента, којих има $\binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = 6$.

548. Означимо бројем k (kı1,2,3,4) сваког човека који изађе на k-тој станици. Добијају се низови дужине 12, на пример 111222234444 или 112222244444 итд. Како се елементи могу понављати, а поредак не игра улогу добијени низови су комбинације са понављањем 4 елемента, дванаесте класе. Њих има $\overline{C}_4^{12} = \binom{12+4-1}{12} = \binom{15}{12}$.

549. а) $T_4 = \binom{11}{3}(x^2)^8(-y^2)^3 = -165x^{16}y^6$; б) $3003x^{10}y^5$; в) $495x^4y^2$.

550. $\binom{15}{8} = 6435$.

551. Из $\binom{n}{2} = 21$ добијамо $n = 7$.

552. Из $\binom{n}{1}+5=\binom{n}{2}$ најпре налазимо да је $n=5$. Трећи члан не садржи x - он је једнак $10\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\frac{y^2}{x^2}=10y^2$.

553. Десети члан.

554. Из $\binom{m}{3}=\binom{m}{12}$ налазимо да је $m=15$. Члан који не садржи x је $T_{11}=3003a^{10}$.

555. $T_7=\binom{15}{6}$.

556. Из $\binom{m}{4}:\binom{m}{2}=14:3$ налазимо да је $m=10$. $T_6=-\binom{10}{5}a^{-10}$.

557. Из $1+m+\frac{m(m-1)}{2}=46$ налазимо да је $m=9$. Члан који не садржи x налазимо из услова да је у $T_{k+1}=\binom{9}{k}x^{2(9-k)}\cdot\frac{1}{x^k}=\binom{9}{k}x^{18-3k}$ експонент $18-3k$ једнак нули, тј. $k=6$. Дакле, $T_7=\binom{9}{6}=84$.

558. Ако је n паран тада средњи члан $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ не садржи x, а ако је n непаран број, тада таквих чланова нема.

559. Пошто је $[1+(x^2-x^3)]^9=1^9+\binom{9}{1}(x^2-x^3)+\binom{9}{2}(x^2-x^3)^2+\binom{9}{3}(x^2-x^3)^3+\binom{9}{4}(x^2-x^3)^4+$ $+\cdots+\binom{9}{9}(x^2-x^3)^9$, видимо да се x^8 појављује само у четвртом и петом члану овог развоја. Како је $(x^2-x^3)^3=x^6-\binom{3}{1}x^4\cdot x^3+\binom{3}{2}x^6\cdot x^2-\binom{3}{3}x^9$ и $(x^2-x^3)^4=x^8-\binom{4}{1}x^6\cdot x^3+\cdots+\binom{4}{4}x^{12}$, то је коефицијент уз x^8 у развоју датог тринома $\binom{9}{3}\cdot\binom{3}{2}+\binom{9}{4}=252+126=378$.

560. Пошто је

$$(1+x^5+x^7)^{20}=(1+(1+x^2)x^5)^{20}=\binom{20}{0}+\binom{20}{1}x^5(1+x^2)+\binom{20}{2}x^{10}(1+x^2)^2+$$

$$+\binom{20}{3}x^{15}(1+x^2)^3+\binom{20}{4}x^{20}(1+x^2)^4+\cdots+\binom{20}{20}x^{100}(1+x^2)^{20},$$

то се x^{17} и x^{18} могу појавити само у члану $\binom{20}{3}x^{15}(1+x^2)^3$. Развијањем $(1+x^2)^3$ добијамо да је коефицијент уз x^{17} - $3\binom{20}{3}=3420$, а уз x^{18} коефицијент је 0.

562. $T_5=715(1-x)^2(1+x)^4\sqrt{1+x}$.

563. Пошто је $T_{k+1}=\binom{5}{k}(\sqrt[3]{3})^{5-k}(\sqrt{2})^k=\binom{5}{k}3^{\frac{5-k}{3}}\cdot2^{\frac{k}{2}}$, $k\leq5$ треба да бројеви $\frac{5-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ буду цели, а то је испуњено само за $k=2$. Дакле, $T_3=60$.

564. Пошто је $T_{k+1}=\binom{12}{k}x^{\frac{5}{6}k-6}$, рационални чланови су за $k=0$, $k=6$ и $k=12$ редом: x^{-6}, $\binom{12}{6}x^{-1}$ и x^4.

565. $\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n}=2\binom{2n-1}{n}$.

566. Трећи члан у развоју $(2x+\frac{1}{x^2})^m$ је $\binom{m}{2}(2x)^{m-2}(\frac{1}{x^2})^2=\binom{m}{2}\cdot2^{m-2}\cdot x^{m-6}$. Како он не садржи x, по услову задатка, то је $m=6$ и тај члан је једнак $\binom{6}{2}\cdot2^4=240$. Други члан у развоју $(1+x^3)^{30}$ је $30x^3$. Према томе, треба да буде $30x^3=240$, тј. $x^3=8$, односно $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$.

567. Девет.

568. 252.

569. Резултат се добија из $81^n=(10-1)^{2n}$.

570. Израз је геометријски низ код кога је $a_1=(1+x)^3$, $q=1+x$, $n=13$, а збир тог низа $S_n=(1+x)^3\cdot\frac{(1+x)^{13}-1}{x}$. Из овога закључујемо да је коефицијент уз x^3 у овом изразу једнак коефицијенту уз x^4 у развоју $(1+x)^{16}$ јер $\frac{(1+x)^3}{x}$ не садржи x^3 у развоју. Коефицијент уз x^4 у развоју $(1+x)^{16}$ је $\binom{16}{4}=1820$.

571. Нека је то k-ти члан $T_k=\binom{13}{k-1}(\sqrt[4]{a^2x})^{13-k+1}(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}})^{k-1}$. Пошто члан не садржи x то је $(\sqrt[4]{x})^{13-k+1}(\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}})^{k-1}=x^{\frac{78-13k}{20}}=x^0$, одакле је $k=6$. Сада је $T_6=\binom{13}{5}\frac{\sqrt[4]{a^{16}x^8}}{\sqrt[5]{a^5x^{10}}}=1287a^3$.

572. Највећи је тридесети члан.

573. Из $\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{16}=31$, тј. $\frac{n(n-1)}{32}=31$ налазимо $n=32$.

574. Како је $\left|\frac{T_{k-1}}{T_{k-2}}\right| = (\frac{51}{k}-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$, види се да је за $k \leq 18$, $\left|\frac{T_{k-1}}{T_{k-2}}\right| > 1$, а за $k \geq 18$ $\left|\frac{T_{k-1}}{T_k}\right| > 1$. Према томе највећи члан по апсолутној вредности је $T_{19} = \binom{50}{18}\cdot b^{50}\cdot 3^{16}$.

575. а) $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; б) $x_1 = 10^{-\frac{5}{2}}$, $x_2 = 10$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

576. а) $2a^6 - 30a^4b^2 + 30a^2b^4 - 2b^6$.
б) Применити Муаврову формулу: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^6 = \cos 6\alpha + \sin 6\alpha$.

577. а) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$;
б) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$;
в) Сабирањем једнакости добијених у а) и б) имамо: $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}) = \frac{1}{2}(2^n+0) = 2^{n-1}$.

578. По претходном задатку: а) 2^n; б) 2^{n-1}.

579. а) Пошто је $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$, то је тражена сума једнака $n[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}] = n\cdot 2^{n-1}$.
б) $n\cdot 2^{n-1}+2^n = (n+2)\cdot 2^{n-1}$; в) $(n+2k)\cdot 2^{n-1}$.

580. Имамо да је:
(1) $(x+1)^n = \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}+\cdots+1$ и (2) $(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n$.
Помножимо леве и десне стране релација (1) и (2) и:
а) изједначимо коефицијенте уз x^n. Добијамо: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.
б) изједначимо коефицијенте уз x^{n+2}. Биће: $\binom{2n}{n-2} = \binom{n}{0}\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-2}\binom{n}{n}$.

581. Означимо са M, I и G скупове ученика који имају одличне оцене, редом, из математике, историје и географије и са $|X|$ број елемената скупа X. Тада је $|M\cup I\cup G| = |M|+|I|+|G|-|M\cap I|-|I\cap G|-|G\cap M|+|M\cap I\cap G| = 15+13+12-8-6-7+3 = 22$.

582. Четири девојке се могу изабрати на $\binom{12}{4}$ начина. После овога бирамо на V_{15}^4 начина младиће. Укупно има: $\binom{12}{4}\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12 = 16216200$ начина.

583. а) $\binom{10}{2}\cdot 2^8 = 11520$; б) $\frac{10!}{(4!)^2\cdot 2!} = 3150$.

584. Сваком броју N из овог скупа пермутација може се придружити тачно један број N', тако да цифре броја N' буду комплементиране до 7 цифрама броја N. (На пример $(621543)' = 156234$). Како је $N+N' = 777777$, тражени збир је једнак $\frac{1}{2}\cdot 6!\cdot 777777$.

585. Уочимо најпре да ако се број x завршава цифром 1, тада се и x^{1988} завршава цифром 1; ако се x завршава цифром 7, тада се x^4 завршава цифром 1, па се и x^{1988} завршава цифром 1; ако се x завршава цифром 8, тада се x^4 завршава цифром 6, па се и x^{1988} завршава цифром 6. Ако се x завршава цифром 9, тада се x^2 завршава цифром 1, па се и x^{1988} завршава цифром 1. Од цифара 1,9,8,7 могу се формирати $4! = 24$ четвороцифрена броја. Шест од њих се завршавају цифром 1, шест цифром 9, шест цифром 8, а шест цифром 7. На основу претходних разматрања, можемо закључити да је последња цифра збира 1988. степена свих ових бројева једнака 4, јер је $6\cdot 1+6\cdot 1+6\cdot 6+6\cdot 1 = 54$.

586. Лавови се могу распоредити на 5! начина, док за 4 тигра има 6 места, па се они могу распоредити на $V_6^4 = 360$ начина. Укупан број распореда је, дакле, $5!\cdot V_6^4 = 43200$.

587. Једног од 12 витезова означимо са A. Означимо са X_A број начина да се изабере 5 витезова, који нису у непријатељству и међу којима је A, а са X_B број избора међу којима није A. Када се изабере A, тада у обзир за избор 4 витеза улази 9 витезова. "Поређајмо" тих 9 витезова у низ. Тражени број избора једнак је броју могућности да се у низ од 5 неизабраних витезова "сместе" још 4. Дакле, бира се 4 места од 6, па се то може учинити на $X_A = \binom{6}{4} = 15$ начина. Ако A није изабран тада се од преосталих 11 витезова бира 5. Слично као у рачунању X_A то се може учинити на $\binom{7}{5}$ начина - бира се 5 места од 7. Значи $X_B = \binom{7}{5} = 21$. Укупан број избора је $X_A+X_B = 36$.

588. $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = 4\cdot\binom{2n-1}{n}-\binom{2n+1}{n}\in\mathbf{N}$.

589. Непосредно се проверава да за $x=1$ и $x=2$ једначина нема решења. За $x=3$ добијамо да је $y=444$. Ако је $x\geq 4$ тада је $x!$ дељив са 4, па како је y^2 паран број, он је дељив и са 4. Међутим број 197142 није дељив са 4. Дакле, за $x \geq 4$ једначина нема решења у скупу $\mathbf{N}$. Према томе решење једначине је (3,444).

590. Ако поделимо обе стране једначине са $x!y!$ добићемо $\frac{1}{y!}+\frac{1}{x!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}=\binom{x+y}{x}=\binom{x+y}{y}$. Како је број $\binom{x+y}{x}$ природан, мора бити и $\frac{1}{y!}+\frac{1}{x!}$, а ово је могуће само у следећим случајевима: $x=y=0$, $x=0, y=1$, $x=1, y=0$, $x=1, y=1$, $x=2, y=2$. Провером се утврђује да је једино решење $x=1, y=1$.

591. Очигледно је да мора бити $x<z$ и $y<z$. Претпоставите да је $x<y$, $y\geq 2$. Тада је у једначини $x!=z!-y!$ израз на десној страни дељив са $y!$, за $y\geq 2$, а израз на левој није. Дакле, не може да буде $x<y$. Аналогно се доказује да не може бити ни $y<x, x\geq 2$. Преостаје могућност $x=y$. Једначина тада постаје $2x!=z!$. Пошто је $z>x$, то је $z\geq x+1$ и $z!\geq (x+1)!=(x+1)\cdot x!>2\cdot x!$, за $x\geq 2$. Значи, једначина нема решења за $x\geq 2$. За $x\leq 1$ решења се непосредно проналазе: (0,0,2), (0,1,2), (1,0,2), (1,1,2).

592. Збир $1!+2!+\cdots+x!$ се за $x\geq 4$ завршава цифром 3, а квадрат целог броја се не може завршавати цифром 3. Дакле, у обзир долази само $x=1$, или $x=2$, или $x=3$. Провером се налазе сва решења: (1,1), (1,-1), (3,3), (3,-3).

593. Међу бројевима $1,2,\ldots,100$ има њих $\left[\frac{100}{2}\right]$ дељивих са 2, $\left[\frac{100}{4}\right]$ дељивих са 4, $\left[\frac{100}{8}\right]$ дељивих са 8, $\left[\frac{100}{16}\right]$ дељивих са 16, $\left[\frac{100}{32}\right]$ дељивих са 32 и $\left[\frac{100}{64}\right]$ дељивих са 64. Укупан број фактора двојке у производу 100! је $\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{4}\right]+\left[\frac{100}{8}\right]+\left[\frac{100}{16}\right]+\left[\frac{100}{32}\right]+\left[\frac{100}{64}\right]=50+25+12+6+3+1=97$. Аналогно налазимо да је број фактора броја 3 у производу 100! једнак $\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{27}\right]+\left[\frac{100}{81}\right]=48$, број фактора броја 5 је $\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{25}\right]=24$, број фактора броја 7 је $\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{49}\right]=16$, а број фактора сваког простог броја p од 11 до 97 је $\left[\frac{100}{p}\right]$. На крају добијамо $100!=2^{97}\cdot 3^{48}\cdot 5^{24}\cdot 7^{16}\cdot 11^9\cdot 13^7\cdot 17^5\cdot 19^5\cdot 23^4\cdot 29^3\cdot 31^3\cdot 37^2\cdot 41^2\cdot 43^2\cdot 47^2\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97$.

594. Број $n!$ се завршава са $P_n=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\cdots$ нула, где је $[x]$ означен највећи цео број $\leq x$.

а) $P_{60}=\left[\frac{60}{5}\right]+\left[\frac{60}{25}\right]+\left[\frac{60}{125}\right]+\cdots=12+2=14$.

б) За $n\leq 49$, $P_n<10+1=11$, за $n=50$, $P_{50}=10+2=12$, за $n\geq 50$, $P_{50}\geq 10+2=12$. Према томе, не постоји природан број n такав да се $n!$ завршава са 11 нула.

595. Нека је $p(x)=a_{100}x^{100}+a_{99}x^{99}+\cdots+a_1x+a_0$. Збир коефицијената полином $p(x)$ очигледно је једнак $p(1)=(2\cdot 1-1)^{100}=1$.

596. Дата неједнакост еквивалента је са $n^{n-1}\geq 2^{n-1}\cdot(n-1)!$, односно $(n-1)!\leq(\frac{n}{2})^{n-1}$. Међутим,

$$(n-1)!=\sqrt{(n-1)!}\cdot\sqrt{(n-1)!}=\sqrt{(n-1)\cdot 1}\cdot\sqrt{(n-2)\cdot 2}\cdots\sqrt{1\cdot(n-1)}\leq$$
$$\frac{n-1+1}{2}\cdot\frac{n-2+2}{2}\cdots\frac{1+n-1}{2}=(\frac{n}{2})^{n-1}.$$

(Примењивали смо неједнакост између аритметичке и геометријске средине).

597. а) $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!\cdot n!}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{2n-1}{n}\cdot 2^n=(2-\frac{1}{1})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{3})\cdots(2-\frac{1}{n})\cdot 2^n<2^n\cdot 2^n=4^n$. Како је $2-\frac{1}{k}\geq 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, за $k=2,3,\cdots,n$, то је $(2-\frac{1}{1})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{3})\cdots(2-\frac{1}{n})\geq(\frac{3}{2})^{n-1}$, одакле се добија и друга неједнакост.

б) *Упутство*: најпре доказати да је $\binom{2n+1}{n}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$, а затим искористити резултат а).

Напомена: Ове неједнакости се могу доказати и применом математичке индукције.

598. $\binom{n+1}{n-1}^2-\binom{n}{n-2}^2=n^3$.

599. Конструисано је укупно 35 правих (10 одређених тачкама A_i, 10 одређених тачкама B_i и још 15 правих које спајају тачке B_i са теменима петоугла). Сваку од тачака A_i садржи тачно 7 правих, а сваку од тачака B_i садржи тачно 8 од тих правих. Број свих тачака у којима се секу тачно две од конструисаних правих једнак је $\binom{35}{2}-5\left[\binom{7}{2}-1\right]-5\left[\binom{8}{2}-1\right]=360$.

600. За свако $x \in \mathbf{R}$ важи $(1+x)^p(1+x)^p = (1+x)^{2p}$. Ако развијемо ове изразе по биномној формули и изједначимо кофицијенте уз x^p добијамо $1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\binom{p}{1}+1 = \binom{2p}{p}$, односно $N = \frac{(2p)!}{(p!)^2} - 2 = \binom{2p}{p} - 2 = \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2$. Како је p прост број, то је сваки од бројева $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$ дељив са p, па је број N дељив са p^2.

601. *Упутство*: применити математичку индукцију.

602. Пошто је $(1+i)^{4k+2} = \left[(1+i)^2\right]^{2k+1} = (2i)^{2k+1}$, а i на непаран степен има вредност i или $-i$, закључујемо да је у посматраном развоју збир реалних чланова једнак нули. Како су на непарним местима у развоју бинома $(1+i)^{4k+2}$ само реални чланови, то је њихов збир једнак нули.

603. Број чланова у развоју једнак је броју комбинација са понављањем десете класе од 4 елемента и он је једнак $\binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$.

604. а) *Упутство*: применити математичку индукцију по m.
б) 1. Пошто је:

$$(1+x^5+x^7)^{20} = \sum_{\substack{k_1+k2+\cdots+k_m=20\\ k_1,\,k_2,\ldots k_m\geq 0}} \frac{20!}{k_1!k_2!k_3!}x^{5k_2+7k_3},$$

а једначина $5k_2 + 7k_3 = 17$ има само једно решење за $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0$, $k_1 = 17, k_2 = 2, k_3 = 1$, то је коефицијент уз x^{17} једнак $\frac{20!}{17!2!1!} = 3\binom{20}{3} = 3420$. Једначина $5k_2 + 7k_3 = 18$ нема решења за $k_2 \geq 0, k_3 \geq 0, k_2 \in \mathbf{Z}, k_3 \in \mathbf{Z}$, па је коефицијент уз x^{18} једнак 0.
2. Коефицијент уз x^{10} је $\frac{20!}{15!5!0!} + \frac{20!}{16!2!2!} = \binom{20}{5} + \binom{20}{4}\binom{4}{2}$, а уз x^{15} је $\frac{20!}{13!6!1!} - \frac{20!}{14!3!3!} + \frac{20!}{15!0!5!} = \binom{20}{7}\binom{7}{7} + \binom{20}{6}\binom{6}{3} + \binom{20}{5}$.

605. Нека за $n, k \in \mathbf{N}$, $0 < k < n$ важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1} = \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k} + \frac{n-k}{n+1}\binom{n}{k}$. Према овоме, биће $2 = \frac{k}{n-k+1} + \frac{n-k}{k+1}$, односно $(n-2k)^2 = n+2$. Дакле, број n може бити облика $m^2 - 2$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 2$. За $m = 2$ добија се $n = 2$, што није решење задатка, јер не важи $2\binom{2}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$. За $m > 2$ и $n = m^2 - 2$ добија се $k = \frac{m(m-1)}{2} - 1$. Тај број је природан и, што се лако проверава, мањи од n, а и задовољава услов $(n-2k)^2 = n+2$. Дакле, тражени бројеви су $n = m^2 - 2$, $m = 3, 4\ldots$

606. Ако у идентичности $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots\binom{n}{n}x^n$ заменимо $x = 1$, $x = \varepsilon$, $x = \varepsilon^2$ где је $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ и због тога $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, добијамо

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots\binom{n}{n},$$

$$(1+\varepsilon)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots\binom{n}{n}\varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^2 + \binom{n}{2}\varepsilon^4 + \cdots\binom{n}{n}\varepsilon^{2n}.$$

Имајући у виду да је $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$, ако k није дељиво са 3 и $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 3$, ако је k дељиво са 3, имамо

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots)$$

Пошто је $1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$, $1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ то је $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + \cos\frac{n\pi}{3}$, одакле следи да је $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})$. Друге две једнакости аналогно се добијају посматрањем збирова $2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n$, односно $2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n$. Последња једнакост добија се слично, посматрањем развоја $(1+i)^n$.

607. Нека је $A_k^n = \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}$. Тада је:

$$A_{k+1}^n - A_k^n = \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{n}{k+1}} - \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} = \frac{(-1)^{k+1}}{n!}(k+1)!(n-k-1)! - \frac{(-1)^k}{n!}k!(n-k)!$$
$$= \frac{(-1)^k}{n!}k!(n-k-1)! \cdot [-(k+1)-(n-k)] = -\frac{n+1}{n}A_k^{n-1},$$

па је $-\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A_k^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{n+1}{n}A_k^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(A_{k+1}^n - A_k^n) = A_n^0 - A_0^n = (-1)^n - 1$. Дакле, $S_n = [1+(-1)^n]\cdot\frac{n+1}{n+2}$.

Глава VI – Вероватноћа и статистика

608. а) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; б) $\Omega = \{11, 12, 13, \dots, 65, 66\}$; в) $\Omega = \{П, Г\}$;
г) $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$; д) $\Omega = \{П1, П2, \dots, П6, Г1, Г2, \dots, Г6\}$;
ђ) $\Omega = \{bbc, bcb, cbb, bcc, cbc, ccb, ccc\}$.

609. а) $\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}$;
б) $\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 221, 223, 241, 243, 421, 423, 441, \dots\}$

610. $\Omega = \{6, 16, 26, \dots, 56, 116, 126, \dots, 556, 1116, 1126, \dots\}$.

611. а) Потпун; б) непотпун.

612. а) Искључују се; б) не искључују се.

613. Нису једнако вероватни.

614. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4\}$, $A \cup B = \{2, 4, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$, $\overline{A} \setminus \overline{B} = \emptyset$.

615. а) Догађај на левој страни једнакости, означимо га са D, представља унију догађаја D_1 и D_2 ($D_1 = A \cap B$, $D_2 = A \cap \overline{B}$). Доказаћемо да је $D \subset A$, а затим да је $A \subset D$, што ће значити да је $D = A$. Ако неки елементарни исход e припада догађају D, онда он припада бар једном од догађаја D_1 или D_2, а пошто важи $D_1 \subset A$ и $D_2 \subset A$, следи да елементарни исход e припада A. Дакле, $D \subset A$. Ако, с друге стране, елементарни исход e припада догађају A, онда он припада или догађају D_1 или догађају D_2, па према томе припада и њиховој унији, чиме је доказно да је $A \subset D$, те је заиста $D = A$.
На сличан начин доказују се и остале релације.

616. Укупан број исхода је $n = 6$, а повољни су појављивање две, четири или шест тачака, дакле, $m = 3$. Према томе, тражена вероватноћа је $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

617. $P = \frac{7}{10}$.

618. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{3}$.

619. Укупан број догађаја је 6·6 ı 36, а повољних има у првом случају 5 ($6+2$, $5+3$, $4+4$, $3+5$, $2+6$), у другом 2 (2·4, 4·2) и у трећем 11 (1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 2,1; 3,1; 4,1; 5,1; 6,1), па су тражене вероватноће: а) $\frac{5}{36}$ б) $\frac{2}{36}$; в) $\frac{11}{36}$.

620. Нека су A_1 и A_2 догађаји да се у првом, односно другом бацању појави шестица. Како су A_1 и A_2 независни догађаји, биће $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

621. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$, јер је $P(AB) \geq 0$.

622. а) $P(A) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$; б) $P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} + \frac{4}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{162}$; в) $P(C) = \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{5}{432}$.

623. а) $P(A) = \frac{18}{48} \cdot \frac{17}{47} \cdot \frac{16}{46} + \frac{18}{48} \cdot \frac{16}{47} \cdot \frac{17}{46} + \frac{16}{48} \cdot \frac{18}{47} \cdot \frac{17}{46} = \frac{153}{1081}$; б) $P(B) = \frac{14}{48} \cdot \frac{16}{47} \cdot \frac{15}{46} = \frac{35}{1081}$.

624. $P = \frac{1}{\binom{22}{2}} = \frac{1}{231}$.

625. Нека је A догађај да је број на првој куглици већи, а B догађај да је број на првој куглици мањи од броја на другој. Тада је $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$.

626. $P=\frac{a}{a+b}$. **627.** а) $\frac{\binom{a}{2}}{\binom{a+b}{2}}=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$; б) $\frac{\binom{a}{1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{2}}=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$; в) $\frac{\binom{a}{2}\binom{b}{3}}{\binom{a+b}{5}}$.

628. а) $\frac{1}{n!}$; б) $\frac{1}{n^n}$.

629. Четрдесет динара се извлачи само у случају да се извуче два новчића од по 5 динара и по један од 10 и 20 динара. Тражена вероватноћа је $P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{12}{4}}=\frac{4}{55}$.

630. $P_1=\frac{\binom{8}{6}\binom{4}{2}}{\binom{12}{8}}=0.339$, $P_2=\frac{\binom{8}{5}\binom{4}{3}}{\binom{12}{8}}=0.453$. Дакле, вероватнији је други догађај.

631. $P(A)=\dfrac{\frac{1}{\binom{m+n}{k}\binom{n}{k}}}{\frac{1}{\binom{m+n}{k}}\left[\binom{n}{k}+\binom{m}{k}\right]}=\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}+\binom{m}{k}}$.

632. а) $P(A)=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$; б) $P(B)=\frac{\binom{11}{1}+2\binom{11}{2}+\binom{11}{3}}{6^{11}}$.

633. а) $P(A)=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}}$. б) $P(B)=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}+\binom{13}{2}\binom{39}{2}+\binom{13}{3}\binom{39}{1}+\binom{13}{4}\binom{39}{0}}{\binom{52}{4}}=1-\frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$;
в) $P(C)=\frac{\binom{13}{4}\binom{39}{0}}{\binom{52}{4}}=\frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$; г) $P(D)=\frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}$.

634. а) $P(A)=\frac{\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}}$; б) $P(B)=\frac{\binom{15}{3}}{\binom{100}{3}}$; в) $P(C)=\frac{\binom{85}{2}\binom{15}{1}+\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}}$.

635. а) $P(A)=\frac{1}{\overline{V}_5^3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; б) $P(B)=\frac{5}{\overline{V}_5^3}=\frac{1}{25}$; в) $P(C)=\frac{V_5^3}{\overline{V}_5^3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{5^3}=\frac{12}{25}$.

636. а) $P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{4}}{\binom{52}{26}}$; б) $P(B)=\frac{2\cdot\binom{4}{3}\binom{48}{23}}{\binom{52}{26}}$; в) $P(C)=\frac{\binom{4}{0}\binom{48}{26}}{\binom{52}{26}}$.

637. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. **638.** а) $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$.

639. а) $P(A+B+C+D)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; б) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{6}{36}=\frac{2}{3}$.

640. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7+0,6-0,7\cdot 0,6=0,88$.

641. Постоје две повољне могућности - сва три сабирка су парни, или су два непарна, а трећи паран, па је $P(A)=\frac{\binom{17}{3}+\binom{17}{2}\cdot\binom{17}{1}}{\binom{34}{3}}=0,5$.

642. Означимо са D догађај - збир поена је 10. Једнако вероватни исходи за реализацију овог догађаја су (4,6), (6,4) и (5,5). Према томе $P(A|D)=\frac{1}{3}$, $P(B|D)=\frac{2}{3}$.

643. Означимо са A догађај да је прва извучена куглица бела и са B да је друга извучена куглица црна.
а) За догађај B повољни су исходи да су обе извучене куглице црне, или прва бела и друга црна и има их $3\cdot2+7\cdot3=27$, па је $P(B)=\frac{27}{9\cdot10}=\frac{3}{10}$.
б) $P(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

644. а) $P(A|D) = \dfrac{12}{30}$. б) $P(B|D) = \dfrac{18}{30}$.

645. Како је $A = \{44, 45, 46, 54, 55, 56, 64, 65, 66\}$, то је $P(B|A) = \dfrac{4}{9}$.

646. $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}}{1 - \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}} = \dfrac{5}{29}$.

647. $P(A) = \dfrac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} + \dfrac{\binom{13}{4}\binom{39}{1}}{\binom{52}{5}} + \dfrac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$, $P(B) = \dfrac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)}$.

648. а) $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{1}{6^3}}{1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^3} = \dfrac{1}{91}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{6^3}}{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{1}{36}$;

649. б) $P(\overline{A} \cup C|B) = \dfrac{P((\overline{A} \cup C)B)}{P(B)} = \dfrac{P(\overline{A}B \cup CB)}{P(B)} = \dfrac{P(\overline{A}B) + P(CB) - P(\overline{A}BC)}{P(B)} =$
$\dfrac{P(\overline{A})P(B) + P(C)P(B) - P(\overline{A})P(B)P(C)}{P(B)} = P(\overline{A}) + P(C) - P(\overline{A})P(C) = P(\overline{A} \cup C)$.

650. а) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)} > \dfrac{P(B)P(B|A)}{P(B)} = P(B|A)$;
б) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \geq \dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

651. Како је $P(A) = 1-(1-P(A))(1-P(B))$, тј. $0.4 = 1-0.96\cdot(1-P(B))$, то је $P(B) = 0.375$, па је тражена вероватноћа једнака $P(A)(1 - P(B) + (1 - P(A)) \cdot P(B) = 0.385$.

652. Означимо: D -промашај циља A и H - погодак циља B. Тада је $P(H|D) = \dfrac{P(HD)}{P(D)} =$
$\dfrac{P(H)}{P(D)} = \dfrac{p_2}{1 - p_1}$.

653. Означимо са D догађај - машина ће отказати и са A_1 и A_2 догађаје да машина ради у нормалном, односно ненормалном режиму. Тада је $P(A_1) = 0.8$ и $P(A_2) = 0.2$, па је $P(D) = P(A_1) \cdot P(D|A_1) + P(A_2) \cdot P(D|A_2) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.22$.

654. Означимо хипотезе: A_1 - избор прве кутије, A_2 - избор друге, A_3 - избор треће кутије. Тада је $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$ и $P(D|A_1) = \dfrac{a}{a+b}$, па је $P(D|A_2) = \dfrac{c}{c+d}$ и $P(D|A_3) = 1$, па је $P(D) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d} + 1\right)$.

655. Нека је A_1 догађај - пребацивања беле куглице, а A_2 - црне. Тада је $P(A_1) = \dfrac{a}{a+b}$ и $P(A_2) = \dfrac{b}{a+b}$, а $P(D|A_1) = \dfrac{c+1}{c+d+1}$ и $P(D|A_2) = \dfrac{c}{c+d+1}$, па је $P(D) = \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{c+1}{c+d+1} +$
$\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{c}{c+d+1}$.

656. $P(D) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \dfrac{6}{10} + \dfrac{1}{\binom{5}{2}} \cdot \dfrac{4}{10} + \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} \cdot \dfrac{5}{10} = 0.52$.

657. Означимо: H_1-прозван је један просечан и један слаб ученик, H_2 - прозвана су два слаба ученика; D - један прозван ученик добио је добру, а други задовољавајућу оцену. Тада је $P(H_1) = \dfrac{\binom{15}{1}\binom{6}{1}}{\binom{33}{2}} = \dfrac{180}{1056}$, $P(H_2) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{33}{2}} = \dfrac{30}{1056}$, $P(D|H_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$,
$P(D|H_2) = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$ и $P(D) = P(H_1)P(D|H_1) + P(H_2)P)D|H_2) = \dfrac{180}{1056} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{30}{1056} \cdot \dfrac{2}{9} \approx 0.035$.

658. Нека су хипотезе: A_1 - пребачене су три беле, A_2 - две беле и једна црна и A_3 - једна бела и две црне куглице. Тада је $P(A_1) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$, $P(A_2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$ и $P(A_3) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}$, па је $P(A) = P(A_1)\cdot P(A|A_1) + P(A_2)\cdot P(A|A_2) + P(A_3)\cdot P(A|A_3) = \frac{7}{15}\cdot\frac{7}{12} + \frac{7}{15}\cdot\frac{6}{12} + \frac{1}{15}\cdot\frac{5}{12} = \frac{8}{15}$.

659. $P(D) = P(D)\cdot P(D|A_1) + P(D)\cdot P(D|A_2) = 0.75\cdot 0.05 + 0.25\cdot 0.03 = 0.045$.

660. $P(D) = \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)}\cdot 1 + \frac{2k(2n-k)}{2n(2n-1)}\cdot\frac{k-1}{2n-2}$.

661. Нека је A_1 - избор прве, A_2 - друге и A_3 треће кутије, а D догађај да је извучене беле куглице. Тада је $P(D) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)$, па је $P(A_1|D) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{a+b}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}$, $P(A_2|D) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}$ и $P(A_3|D) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}$.

662. Нека су хипотезе: A_0 - оба дела исправна, A_1 - први део отказао, други није, A_2 - први део није отказао, други јесте и A_3 - оба дела машине су отказала и нека је D догађај да је машина отказала након времена t. Тада је $P(A_0) = p_1p_2$, $P(A_1) = (1-p_1)p_2$, $P(A_2) = p_1(1-p_2)$, $P(A_3) = (1-p_1)(1-p_2)$, $P(D|A_0) = 0$, $P(D|A_1) = P(D|A_2) = P(D|A_3) = 1$, па је $P(D) = (1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2) = 1 - p_1p_2$, а $P(A_1|D) = \frac{(1-p_1)p_2}{P(D)} = \frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$.

663. Хипотезе су A_1 - изгубљена плава и A_2-изгубљена црвена лоптица, а догађај D је извлачење две плаве лоптице. Тада је $P(A_1) = \frac{4}{7}$, $P(A_2) = \frac{3}{7}$, $P(D|A_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}$ и $P(D|A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$, па је $P(D) = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{7}$. На крају, $P(A_1|D) = \frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{2}{5}$.

664. $P(D) = P(E)P(D|E) + P(T)P(D|T) + P(P)P(D|P) = \frac{8}{20}\cdot 0.3 + \frac{7}{20}\cdot 0.2 + \frac{5}{20}\cdot 0.1 = \frac{43}{200}$. $P(T|D) = \frac{P(T)P(D|T)}{P(D)} = \frac{14}{43}$.

665. $\frac{3}{248} \approx 0.012$.

666. $\frac{20}{41}$.

667. а) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$; б) $6\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$; в) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^6$.

668. а) $P(S_{10} = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

б) $P(3 < S_{10} < 7) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6}}{2^{10}}$

669. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$; б) $\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{20} + 20\left(\frac{1}{5}\right)^{19}\left(\frac{4}{5}\right) + \binom{20}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{18}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \binom{20}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{17}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \binom{20}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{16}\left(\frac{4}{5}\right)^4$

$+\binom{20}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$;

670. а) 0,64; б) 0,384; в) 0,512.

671. Вероватноћа да ће Иван одговарати на једном часу је $\frac{\binom{1}{1}\binom{31}{2}}{\binom{32}{3}} = \frac{3}{32} = p$, а вероватноћа да ће за 6 часова одговарати бар једном је $1-\binom{6}{0}p^0(1-p)^6 \approx 0,611$.

672. $P(S_m \geq 1) = 1-P(S_m = 0) = 1-\binom{m}{0}\binom{x}{n}^0(1-\frac{x}{n})^m$. Дакле треба да буде $1-(1-\frac{x}{n})^m > \frac{1}{2}$, одакле је $x = \left[n(1-\frac{1}{\sqrt[m]{2}}\right] + 1$.

673. Како је $P\{S_{10} = 6\} = 0,22760$, $P\{S_{10} = 7\} = 0,27012$, $P\{S_{10} = 8\} = 0,19509$, највероватнији број погодака је 7.

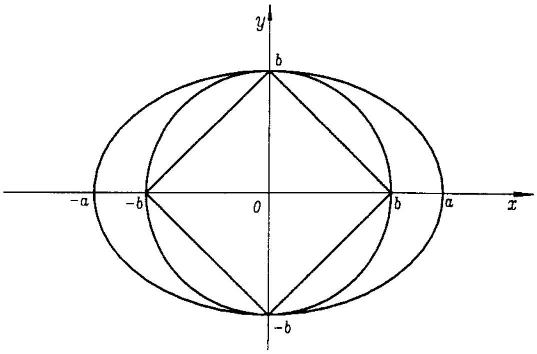
674. Вероватније је да ће у пет гађања имати тачно три поготка.

675. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

676. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 0.

677. а) $P(A) = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2^2\pi - 1^2\pi}{2^2\pi} = \frac{3}{4}$; б) $P(B) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$; в) $P(C) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^6 \approx 0.016$.

678. а) Како је површина дате елипсе $P = ab\pi$, то је (видети слику) тражена вероватноћа $P(A) = \frac{b^2\pi}{ab\pi} = \frac{b}{a}$; б) $P(B) = \frac{2b^2}{ab\pi} = \frac{2b}{a\pi}$.



Сл. уз зад. 678

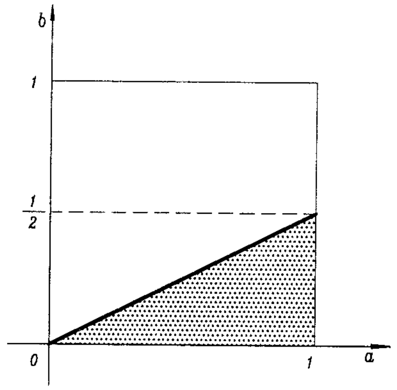
679. а) Случајно бирање бројева a и b је случајан избор тачке (a, b) у квадрату на слици. Решења једначине су реална ако и само ако је дискриминанта $a^2 - 4b^2$ ненегативна, тј. због $0 \leq a, 0 \leq b$ ако и само ако је $a \geq 2b$, тј. ако тачка (a, b) падне у шрафирану област. Тражена вероватноћа је однос површина троугла и квадрата и једнака је $\frac{1}{4}$. б) 0; в) $\frac{3}{4}$.

680. $\frac{3}{4}$.

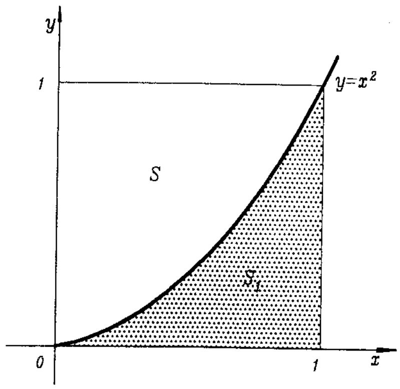
681. а) $P(A) = \frac{P(S_1)}{P(S_2)} = \frac{1}{3}$, јер је $P(S_1) = \int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ (видети слику).

б) $P(B) = \int\limits_{1/3}^{2/3}(1-x)dx - \int\limits_{1/3}^{2/3}\frac{2}{9x}dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2$;

в) $P(C) = \int\limits_0^{\pi/4}\sin x dx + \int\limits_{\pi/4}^{1}\cos x dx = \sin 1$;



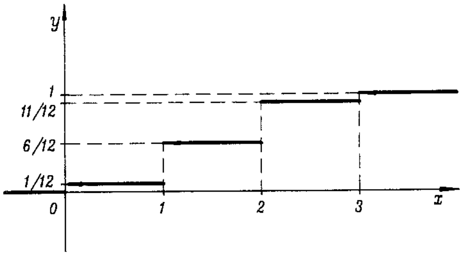
Сл. уз зад. 679



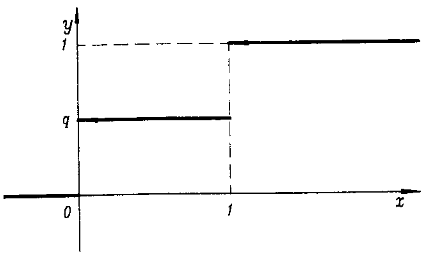
Сл. уз зад. 681

г) $P(D)=\int\limits_0^{\pi/4}(\operatorname{tg}x-x)dx+\int\limits_{\pi/4}^{1}(1-x)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.$

682. а) $P(A)=\frac{V_1}{V}=\frac{\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x dx}{\frac{4}{3}\cdot 4^3\pi}=\frac{3\pi}{512}$ (видети слику); б) $\frac{1}{16}$.



Сл. уз зад. 682



Сл. уз зад. 684а

683.

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0,3 & 0,25 & 0,25 & 0,2\end{pmatrix},\qquad F(X)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0,3, & 1<x\le 2\\ 0,55, & 2<x\le 3\\ 0,8, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

684. а) $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ p & q\end{pmatrix}$, где је $q=1-p$. Функција расподеле $F(x)$ приказана је на слици.

б) $E(X)=0\cdot q+1\cdot p=p$; $D(X)+0^2\cdot q+1^2\cdot p-E(X)^2=p-p^2=pq$.

685. Случајна променљива X може узети три вредности - 1, 0 и 1. Како је

$$P(X=-1)=P(X_1=0)\,P(X_2=1)=0,4\cdot 0,7,$$

$$P(X=0)=P(X_1=0)\,P(X_2=0)+P(X_1=1)\,P(X_2=1)=0,4\cdot 0,3+0,6\cdot 0,7,$$

$P(X=1)=P(X_1=1)\,P(X_2=0)=0,6\cdot 0,3$, то је $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,28 & 0,54 & 0,18 \end{pmatrix}$.

686. $P(X=2)=0,25; P(X=3)=P(X=4)=0,125; P(X=5)=0,5.$

687. $X:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}$.

688. а) $Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$; б) $Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

689. а) $E(X_1)=0\cdot 0,1+1\cdot 0,2+2\cdot 0,1+3\cdot 0,3+4\cdot 0,2+5\cdot 0,1=2,6$; б) $E(X_2)=2,1$; в) $E(X_3)=23$; г) $E(X_4)=37,5$.

690. $X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$, $E(X)=7$.

691. $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$.

692. а) $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$;
в) $E(X)=\frac{161}{36}$, $\qquad E(Y)=\frac{91}{36}$.

693. а) $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \end{pmatrix}$; б) $E(X)=1,2$, $D(X)=0,72$.

694. Означимо са X број гађања. Како је $P\{X=k\}=pq^{k-1}$, $q=1-p$, $k=1,2,3$ и $P\{X=4\}=pq^3+q^4=q^3$, то је расподела случајне променљиве X : $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & pq & pq^2 & q^3 \end{pmatrix}$,
а математичко очекивање $E(X)=p+2pq+3pq^2+4q^3=\frac{1-(1-p)^4}{p}$.

695. а) $E(X_1)=0,3\cdot 0+0,3\cdot 1+0,4\cdot 2=1,1$; $D(X_1)=(0-1,1)^2\cdot 0,3+(1-1,1)^2\cdot 0,3+(2-1,1)^2\cdot 0,4=0,69$
б) $E(X_2)=1981,25$; $D(X_2)=429,7$;

696. $E(X)=\frac{21}{2}$, $D(X)=\frac{105}{12}$.

697. $E(X)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,6+2\cdot 0,1=\frac{4}{5}$, $D(X)=\frac{9}{25}$, $\sigma(X)=\frac{3}{5}$.

698. $E(Y)=2^{-1}\cdot 0,2+2^0\cdot 0,1+2^1\cdot 0,3+2^2\cdot 0,4=2,4$, $D(Y)=1,99$.

699. На основу дефиниције математичког очекивања и дисперзије имамо да је $0,6x_1+0,4x_2=1,4$, $0,6x_1^2+0,4x_2^2-1,4^2=0,24$. Имајући у виду да је $x_1<x_2$, налазимо $x_1=1$, $x_2=2$.

700. а)

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{4}{49}$	$\frac{8}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{16}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{12}{49}$	0	$\frac{24}{49}$
2	$\frac{9}{49}$	0	0	$\frac{9}{49}$
	$\frac{25}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{4}{49}$	

$E(X)=\frac{6}{7}$, $E(Y)=\frac{4}{7}$, $E(XY)=\frac{12}{49}$, $D(X)=\frac{24}{49}$, $D(Y)=\frac{20}{49}$, $\rho_{XY}=-\sqrt{\frac{3}{10}}$.

б) $\rho_{XY}=-\sqrt{\frac{3}{10}}$. Напомена. Уочимо да су у случају а) и у случају б) коефицијенти корелације међу собом једнаки.

701. Ишоди овог опита могу се написати у облику (p, b, v), где је p-број куглица у плавој, b-у белој и c-у црној кутији. Ишода има укупно 10 и то су: (3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 2, 1), (0, 1, 2). Одавде налазимо $E(X) = 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1$, $TE(Y) = 0,6 + 0,6 = 1,2$,

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	0	0,2	0,2	0,4
1	0,1	0,2	0	0,3
2	0	0,2	0	0,2
3	0	0	0,1	0,1
	0,1	0,6	0,3	

$E(XY) = 0,2 + 0,4 + 0 + 0,6 = 1,2$, па пошто је $E(X)E(Y) = E(XY)$, X и Y су некореалне случајне променљиве и $\rho_{XY} = 0$, мада је очигледно да су X и Y зависне!

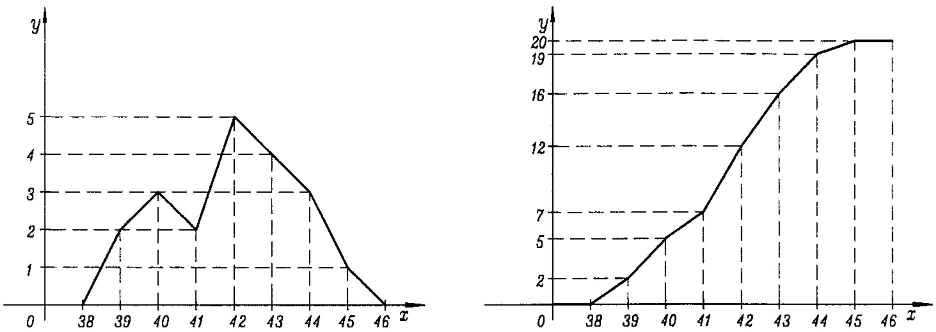
702. Тачна вредност вероватноће је $P\{S_{200} \leq 10\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{200}{k} 0,03^k \cdot 0,97^{200-k}$, а по Пуасоновој апроксимацији се добија из таблица да је $P\{S_{200} \leq 10\} \approx \sum_{k=0}^{10} \mathrm{e}^{-6} \dfrac{6^k}{k!} = 0,95738$.

703. a) $P\{S_{100} \leq 9\} = \sum_{k=0}^{9} \binom{100}{k} 0,05^k \cdot 0,95^{100-k}$. б) $P\{S_{100} \leq 9\} \approx \sum_{k=0}^{9} \mathrm{e}^{-5} \dfrac{5^k}{k!} = 0,968$ (видети таблице).

704. a)

x_k	39	40	41	42	43	44	45
f_k	2	3	2	5	4	3	1
$\sum_{j=1}^{k} f_j$	2	5	7	12	16	19	20

б) Видети слике.

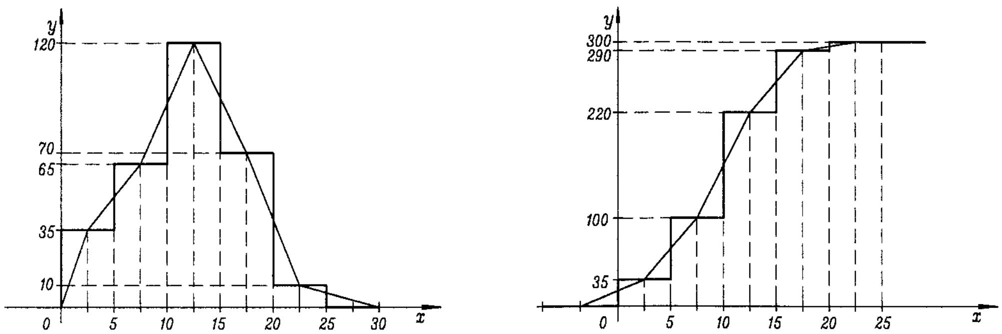


Сл. уз зад. 704б

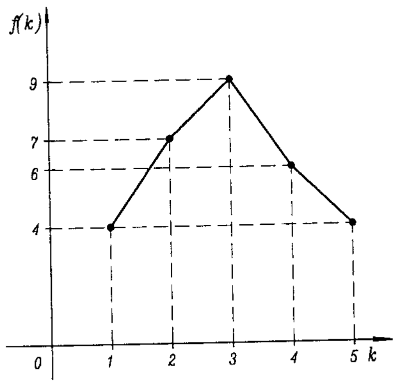
705. На сликама су приказани: хистограм и полигон учесталости – лева слика (полигон је дат испрекидано, а хистограм пуном линијом) и емпиријска функција расподеле и кумулативна крива – десна слика.

707. $\overline{x} = \dfrac{1}{30}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4) = 2,97$, $\overline{S}^2 = \dfrac{1}{30}(4(1 - 2,97)^2 + 7(2 - 2,97)^2 + 9(3 - 2,97)^2 + 6(4 - 2,97)^2 + 4(5 - 2,97)^2) = 1,49$, $\overline{S} = 1,22$, Полигон расподеле приказан је на слици.

708. $\overline{x} = \dfrac{1}{12}(3 \cdot \dfrac{190 + 180}{2} + 3 \cdot \dfrac{200 + 190}{2} + 2 \cdot \dfrac{210 + 200}{2} + 4 \cdot \dfrac{220 + 210}{2}) \approx 200,83$,
$\overline{S}^2 = \dfrac{1}{12}(3 \cdot 185^2 + 3 \cdot 195^2 + 2 \cdot 205^2 + 4 \cdot 215^2) - 200,83^2 \approx 141$, $\overline{S} \approx 11,8$.



Сл. уз зад. 705



Сл. уз зад. 707

709. $\overline{x} = 1,64$, $\overline{S}^2 = 0,00489$, $\overline{S} \approx 0,07$. **710.** $\overline{x} = 50,59$, $\overline{S}^2 = 7,46$, $\overline{S} = 2,73$.

711. Користећи податке из табеле налазимо: $\bar{x} = 3,1$, $\bar{y} = 3,4$, $K_{xy} = 1,53$, $S_x^2 = 1,62$, $\hat{a} = 0,94$, $\hat{b} = 0,47$, па је једначина линеарне регресије: $y = 0,94x + 0,47$.

ТЕСТОВИ

У овом делу Збирке дато је девет тестова који садржином одговарају одређеним поглављима из градива четврог разреда. Сваки тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**. Предвиђено је да се за сваки тачно урађени задатак добија 10 поена, тако да један тест максимално доноси 100 поена. Погрешно урађен задатак доноси −1 (минус један) поен. Време за израду једног теста је 90 минута. Одличним се могу сматратим резултати 80 – 100 поена, врло добрим 65 – 80, добрим 50 – 65 и довољним 35 – 50 поена.
Када се професори одлуче за састављање другачије варијанте тестова, у којима би задаци били различите тежине, могуће је број бодова по задатку одредити по некој другој шеми – на пример као што је то рађено за неке тестове у Математичкој гимназији: 1. и 2. задатак по 6 поена, 3–5. задатак по 8 поена, 6–8. задатак по 12 поена и 9. и 10. задатак по 14 поена (збир је 100 поена), с тим што је овде за погрешно решење одузимано по 25% поена по задатку.

Тест 1. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. График функције $y = kx + n$, за $k < 0$ и $n > 0$ припада:

A) првом, другом и трећем квадранту;

B) првом, трећем и четвртом квадранту;

C) првом, другом и четвртом квадранту;

D) другом, трећем и четвртом квадранту;

E) само другом и четвртом квадранту;

N).

2. График функције $y = \ln x$ има:

A) само једну хоризонталну асимптоту;

B) само једну косу асимптоту;

C) само једну вертикалну асимптоту;

D) једну вертикалну и једну хоризонталну асимптоту;

E) једну вертикалну и једну косу асимптоту;

N).

3. Скуп реалних бројева x за које је функција $f(x) = 1 - x^2$ позитивна је:
A) $(1, +\infty)$; **B)** $(-1, 1)$; **C)** $(-\infty, 1)$; **D)** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; **E)** $(0, +\infty)$; **N)**.

4. Ако је T_1 основни период функције $f_1(x) = \sin x$, а T_2 основни период функције $f_2(x) = \operatorname{tg} x$, тада је $T_1 + T_2$ једнако:

A) π; **B)** 2π; **C)** 4π; **D)** $\frac{3\pi}{2}$; **E)** 3π; **N)**.

5. Дате су функције $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \arcsin x$, $f_4(x) = \arccos x$. Тачан је исказ:

A) Функције f_1 и f_3 су непарне, а функције f_2 и f_4 су парне.

B) Функција f_1 је непарна, f_2 је парна, а функције f_3 и f_4 нису ни парне ни непарне.

C) Функције f_1 и f_3 су парне, а функције f_2 и f_4 су непарне.

D) Функције f_1 и f_3 су непарне, функција f_2 парна, а функција f_4 ни парна ни непарна.

E) Функције f_1 и f_3 су парне, функција f_2 непарна, а функција f_4 ни парна ни непарна.

N).

6. Ако је $f(x) = e^x$, тада је $f(f(x)$ једнако:

A) e^{2x}; **B)** e^{e^x}; **C)** $2e^x$; **D)** e^x; **E)** $e^{x/2}$; **N)**.

7. Дате су функције $f(x) = x^2$, $f_2(x) = x|x|$, $f_3(x) = |x|^2$, $f_4(x) = \frac{x^3}{|x|}$. Тачан је исказ:

A) $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$; **B)** $f_1 = f_3 = f_4 \neq f_2$;

C) $f_1 = f_3 \neq f_2 = f_4$; **D)** $f_2 \neq f_1 = f_3 \neq f_4 \neq f_2$;

E) Све функције f_1, f_2, f_3, f_4 су међу собом различите; **N)**.

8. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$ и $D = b^2 - 4ac$. Неопходоан и довољан услов да функција $f(x)$ има минимум је:

A) $a > 0$; **B)** $a < 0$; **C)** $D < 0$; **D)** $D > 0$; **E)** $D = 0$; **N)**.

9. Ако је $f\left(\frac{2x+3}{x}\right) = (x+3)^2$, тада је $f\left(\frac{1}{2}\right)$ једнако:

A) 25; **B)** $\frac{49}{4}$; **C)** -2; **D)** 4; **E)** 1; **N)**.

10. Област дефинисаности функције $y = \sqrt{x}$ је скуп:

A) $[0, +\infty)$; **B)** $(0, +\infty)$; **C)** $\mathbf{R}$; **D)** $[1, +\infty)$; **E)** $(-\infty, 0])$; **N)**.

Тест 2. РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ (ОСНОВНА СВОЈСТВА)

1. Област дефинисаности функције $f(x) = \dfrac{\log(x^2-8)}{\sqrt{x+3}}$ је скуп:

A) $(-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$; **B)** $[-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, +\infty)$;
C) $(-3, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$; **D)** $[-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$;
E) $(-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$; **N)**.

2. Дате су функције $f_1(x) = \log_2 x$ и $f_2(x) = \log_2 |x|$. Тачан је исказ:

A) Обе функције f_1 и f_3 су непарне.
B) Обе функције f_1 и f_2 су парне.
C) f_1 је непарна, а f_2 парна функција.
D) Ни f_1, ни f_2 нису ни парне ни непарне функције.
E) f_1 није ни парна ни непарна, а f_2 је парна функција.
N).

3. Ако је $f(2x-1) = x$, тада је $f(f(x))$ једнако:

A) $(2x-1)^2$; **B)** x^2; **C)** $\dfrac{(x+1)^2}{4}$; **D)** $2x-1$; **E)** $\dfrac{x+3}{4}$; **N)**.

4. Дате су функције $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $f_3(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ и $f_4(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$. Тачан је исказ:

A) Међу датим функцијама нема међусобно једнаких.
B) $f_1 = f_2 = f + 3 = f_4$; **C)** $f_1 \neq f_2 = f_3$;
D) $f_2 = f_4 \neq f_3$; **E)** $f_2 = f_3 = f_4 \neq f_1$;
N).

5. Инверзна функција функције $y = -x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ је:

A) $y = -x^2$; **B)** $y = -\sqrt{-x}$; **C)** $y = -\sqrt{x}$; **D)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$; **E)** $y = \sqrt{-x}$; **N)**.

6. Основни период функције $f(x) = \sin x + \sin 2x$ је:

A) $\dfrac{\pi}{2}$; **B)** π; **C)** $\dfrac{3\pi}{2}$; **D)** 2π; **E)** 4π; **N)**.

7. Број нула функције $f(x) = \dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{x+1+|x+1|}$ је:

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4; **N)**.

8. Функција $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$ је негативна за оне и само оне x који припадају скупу:

A) $(1,3)$; **B)** $(-\infty,2)\cup(\frac{5}{2},4)$; **C)** $(1,2)\cup(3,4)$;
D) $(0,2)\cup(3,4)$; **E)** $(1,2)\cup(3,5)$; **N)**.

9. Дате су функције $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f_2x) = \operatorname{tg} x$ и $f_3(x) = \sin x \cdot \cos x$. Међу њима су ограничене функције (на скупу $\mathbf{R}$):

A) само f_1; **B)** само f_2 и f_3; **C)** све; **D)** само f_3; **E)** само f_1 и f_2; **N)**.

10. Функција $f(x) = x^2 - 2x + 1$ је:

A) растућа за све $x \in \mathbf{R}$; **B)** опадајућа за све $x \in \mathbf{R}$;
C) растућа за $x < 1$, опадајућа за $x > 1$;
D) опадајућа за $x < 1$, растућа за $x > 1$;
E) опадајућа за $x < 0$, растућа за $x > 0$; **N)**.

Тест 3. НЕПРЕКИДНОСТ И ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈА

1. Вредност израза $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2-7x+2}$ је:

A) $-\frac{4}{5}$; **B)** $\frac{5}{4}$; **C)** 1; **D)** $-\frac{1}{2}$; **E)** 0; **N)**.

2. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} - \dfrac{x^3}{2x^2+1}\right)$ једнака је:

A) -1; **B)** $\frac{1}{4}$; **C)** 0; **D)** $-\frac{1}{2}$; **E)** $-\frac{1}{4}$; **N)**.

3. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ једнака је:

A) 0; **B)** $-\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{1}{2}$; **D)** 1; **E)** -1; **N)**.

4. Ако је $a = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ и $c = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, тада важи:

A) $a=b=c$; **B)** $a=b\neq c$; **C)** $a=c\neq b$; **D)** $a\neq b=c$; **E)** $a\neq b\neq c\neq a$; **N)**.

5. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ једнака је:

A) 2; **B)** -1; **C)** 1; **D)** $\frac{1}{2}$; **E)** 0; **N)**.

6. Вредност параметра a тако да функција $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x + a, & x \geq 1; \end{cases}$ буде свуда непрекидна је:

A) 0; **B)** 1; **C)** -1; **D)** -2; **E)** такав број a не постоји; **N)**.

7. Вредност израза $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$ је:

A) $\frac{1}{2}$; **B)** $-\frac{1}{2}$; **C)** 2; **D)** -2; **E)** 0; **N)**.

8. Ако је функција $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1; \end{cases}$ непрекидна за све x, онда је A једнако:

A) $\frac{1}{3}$; **B)** 3; **C)** 1; **D)** $-\frac{1}{3}$; **E)** 0; **N)**.

9. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^x$ једнака је:

A) e^4; **B)** e^{-4}; **C)** e **D)** e^{-1}; **E)** e^2; **N)**.

10. Ако је $a = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$ и $b = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x}}}$, онда је $a + b$ једнако:

A) $+\infty$; **B)** 0; **C)** 1; **D)** $\frac{1}{2}$; **E)** 2; **N)**.

Тест 4. ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ И ПРИМЕНЕ

1. Ако је $f(x) = x \cdot 2^{-x}$, тада је $f'(1)$ једнако:

A) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$; **B)** $1 - \ln 2$; **C)** $\ln 2$; **D)** 0; **E)** $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$; **N)**.

2. Други извод функције $y = \cos x + \sin x$ је:

A) $\cos x - \sin x$; **B)** $-\cos x - \sin x$; **C)** $\cos 2x$; **D)** $(\cos x + \sin x)^2$; **E)** $\cos x + \sin x$; **N)**.

3. Колико постоји тангенти графика функције $y = x^3 + 3x$ паралелних правој $y = 15x + 2$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4; **N)**.

4. Вредност другог извода функције $y = e^x \sin 2x$ у тачки $x_0 = 0$ је:

A) 0; **B)** 2; **C)** -2; **D)** -4; **E)** 4; **N)**.

5. Висина ваљка максималне запремине уписаног у сферу полупречника R је:

A) $\frac{4}{3}R$; **B)** $R\sqrt{2}$; **C)** $R\sqrt{3}$; **D)** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$; **E)** $\dfrac{3R}{\sqrt{2}}$; **N)**.

6. Једначина тангенте криве $y = x^3 + 3$ у тачки $(1, 1)$ је:

A) $y = x$; **B)** $y = 3x - 2$; **C)** $y = 2x - 1$; **D)** $y = 1$; **E)** $y = -x + 2$; **N)**.

7. Извод функције $y = \sqrt{\cos x}$ $(\cos x > 0)$ је:

A) $\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; **B)** $\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}$; **C)** $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; **D)** $\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; **E)** $\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; **N)**.

8. n-ти извод функције $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ је:

A) n; **B)** 0; **C)** $n!$; **D)** x; **E)** $n!x^{n!}$; **N)**.

9. Угао под којим крива $y = \cos x$ сече x-осу је:

A) $90°$; **B)** $60°$; **C)** $45°$; **D)** $30°$; **E)** $22,5°$; **N)**.

10. Коефицијент правца тангенте графика функције $y = \operatorname{tg} x$ у тачки $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ је:

A) 1; **B)** 2; **C)** $\sqrt{2}$; **D)** 3; **E)** $2\sqrt{2}$; **N)**.

Тест 5. ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈЕ

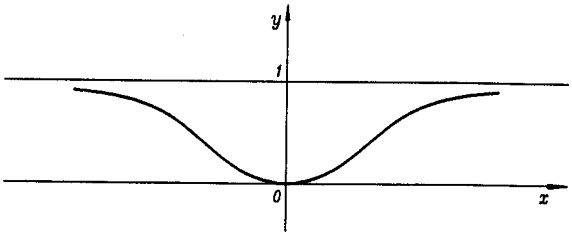
1. График функције $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ има:

- **A)** само једну косу асимптоту;
- **B)** само једну хоризонталну асимптоту;
- **C)** једну косу и једну хоризонталну асимптоту;
- **D)** две различите хоризонталне асимптоте;
- **E)** нема ни хоризонталних, ни косих асимптота;
- **N)**.

2. Функција $f(x) = \ln \dfrac{2x-1}{x+2}$:

- **A)** има само један минимум и нема максимум;
- **B)** има само један максимум и нема минимум;
- **C)** има само један максимум и само један минимум;
- **D)** има два минимума;
- **E)** нема екстемних тачака;
- **N)**.

3. Којој функцији одговара график нацртан на слици?



Сл. уз зад. 3, Тест 5.

A) $\dfrac{x^3}{1+x^2}$; B) $e^{-|x|}$; C) xe^{-x^2}; D) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$; E) $\dfrac{x}{1+x^2}$; N).

4. Функција $f(x) = ax^4 - 8x + 3$ има свој минимум у тачки $x_0 = \dfrac{1}{2}$ ако и само ако је a једнако:

A) 4; B) 16; C) -4; D) -16; E) $\dfrac{1}{2}$; N).

5. Број превојних тачака криве $y = \ln(x^2 + 1)$ једнак је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4; N).

6. Крива $ax^3 - 6x^2$ има превојну тачку $x_0 = 1$. Тада је вредност параметра a једнака:

A) -1; B) 4; C) 6; D) 1; E) 2; N).

7. Разлика између највеће и најмање вредности функције $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$ износи:

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 8; N).

8. Ако функција $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ има екстремне вредности у тачкама $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, тада је разлика $b - a$ једнака:

A) $\dfrac{5}{6}$; B) $-\dfrac{5}{2}$; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $-\dfrac{1}{2}$; E) $-\dfrac{1}{6}$; N).

9. Број вертикалних асимптота графика функције $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x - 4}$ је

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4; N).

10. Дате су реченице:

(I) Ако је за функцију f, која има извод у свакој тачки интервала (a, b), за свако $x \in (a, b)$ испуњено $f'(x) > 0$, тада је функција f у том интервалу растућа.

(II) Ако је за функцију f у тачки x_0 испуњено $f'(x_0) = 0$, тада функција f у тачки x_0 има екстремну вредност (минимум или максимум).

(III) Ако је x_0 тачка локалног екстремума функције f, тада је извод функције у тачки x_0 или једнак нули, или не постоји.

Тачне су реченице:

A) само I; **B)** све; **C)** само I и II; **D)** само I и III; **E)** само II; **N)**.

Тест 6. ИНТЕГРАЛИ

1. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ $(x > 0)$ једнак је:

A) $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + c$; **B)** $-\frac{3}{x^3} + c$; **C)** $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + c$; **D)** $\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$; **E)** $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$; **N)**.

2. Интеграл $\int \frac{(x+3)dx}{(x-2)(x+4)}$ једнак је:

A) $\frac{5}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{6}\ln|x+4| + c$; **B)** $\frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+4| + c$;
C) $3\ln|x-2| + 2\ln|x+4| + c$; **D)** $6\ln|x-2| + 5\ln|x+4| + c$;
E) $\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+4| + c$; **N)**.

3. Вредност интеграла $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$ је:

A) $\frac{1}{9}$; **B)** $\sqrt{2}$; **C)** $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$; **D)** $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$; **E)** $\frac{2}{9}(\sqrt{3}-2)$; **N)**.

4. Вредност интеграла $\int_1^2 x^3 \ln x dx$ је:

A) $\ln 4 - \frac{3}{9}$; **B)** $\ln 8 - 1$; **C)** $2\ln 2 - \frac{1}{16}$; **D)** $\ln 16 - \frac{1}{8}$; **E)** $\ln 16 - \frac{15}{16}$; **N)**.

5. Ако је $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln A$, тада је A једнако:

A) 9; **B)** 8; **C)** 3; **D)** 81; **E)** 24; **N)**.

6. Вредност интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ припада интервалу:

A) $(-\infty, 0)$; **B)** $[0,1)$; **C)** $[1,2)$; **D)** $[2,3)$; **E)** $[3,+\infty)$; **N)**.

7. Ако је $\int_0^3 (3x^2 + mx + 5)dx = 60$, тада је m једнако:

A) 4; **B)** -4; **C)** 2; **D)** -2; **E)** 0; **N)**.

8. Вредност интеграла $\int_0^a \frac{x^2dx}{a^3+x^3}$ $(a > 0)$ је:

A) $\frac{1}{3}\ln 2a$; **B)** $\frac{1}{3}\ln 2$; **C)** $\frac{1}{2}\ln 3$; **D)** $\ln 2a$; **E)** $\frac{1}{3}\ln a$; **N)**.

9. Вредност интеграла $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ је:

A) 8; **B)** $\frac{28}{3}$; **C)** $\frac{22}{3}$; **D)** 6; **E)** $\frac{32}{3}$; **N)**.

10. Интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ једнак је:

A) $\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin x + \cos x} + c$; **B)** $\sin x - \cos x + c$;

C) $\sin x + \cos x + c$; **D)** $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x + c$;

E) $-\sin x + \cos x + c$; **N)**.

Тест 7. ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛА

1. Површина ограничена луком криве $y = x(x-1)(x-2)$ и x-осом једнака је:

A) 1; **B)** 0; **C)** $\frac{1}{2}$; **D)** 2; **E)** $\frac{1}{4}$; **N)**.

2. Површина ограничена позитивним делом x-осе, негативним делом y-осе и луком криве $y = x^2 - 1$ једнака је:

A) $\frac{2}{3}$; **B)** $\frac{1}{3}$; **C)** 1; **D)** $\frac{1}{2}$; **E)** $\frac{3}{4}$; **N)**.

3. Запремина тела које настаје ротацијом фигуре ограничене линијама $y = x^2$, $x = 1$ и $y = 0$ око x-осе је:

A) $\frac{\pi}{4}$; **B)** $\frac{1}{5}$; **C)** $\frac{\pi}{5}$; **D)** $\frac{\pi}{3}$; **E)** $\frac{2\pi}{3}$; **N)**.

4. Запремина тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене параболом $y = x^2$ и правом $y = x + 2$ је:

A) $\frac{226\pi}{15}$; **B)** $\frac{232\pi}{15}$; **C)** $\frac{138\pi}{5}$; **D)** $21\pi - \frac{33}{15}$; **E)** $\frac{72\pi}{5}$; **N)**.

5. Дужина лука криве $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ од координатног почетка до тачке $(3, 2\sqrt{3})$ је:

A) $\frac{52}{3}$; **B)** $\frac{7}{3}$; **C)** $\frac{14}{3}$; **D)** $\frac{16}{3}$; **E)** 4; **N)**.

6. Опште решење диференцијалне једначине $xy' = 3y$ је:

A) $y = cx^{3/2}$; **B)** $y = cx^3$; **C)** $\ln|y| = cx^3$; **D)** $y = c\ln^3|x|$; **E)** $y = \frac{c}{x^3}$; **N)**.

7. Запремина тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = -1$, $x = 1$ и $y = 0$ је:

A) $\frac{\pi^2}{4}$; B) $\frac{\pi^2}{2}$; C) π^2; D) $\frac{\pi}{2}$; E) $\frac{\pi^2}{3}$; N).

8. Решење диференцијалне једначине $xy' - y = 0$ које садржи тачку $(1, 2)$ је:

A) $y = 2x$; B) $y = x + 1$; C) $y = \frac{2}{x}$; D) $x^2 + y^2 = 5$; E) $y = 2e^{x-1}$; N).

9. Површина фигуре ограничене линијама $y = (x-1)^2$ и $y = 3x + 1$ је:

A) $\frac{185}{6}$; B) $\frac{125}{6}$; C) $\frac{43}{2}$; D) 21; E) $\frac{45}{2}$; N).

10. Запремина тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \cos x$ и x-осом за $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ је:

A) $\frac{\pi^2}{4}$; B) $\frac{\pi^2}{3}$; C) $\frac{\pi^2}{2}$; D) $\frac{2\pi^2}{3}$; E) π^2; N).

Тест 8. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМНА ФОРМУЛА

1. Дато је n кутија нумерисаних бројевима 1 до n ($n \geq 2$). Број начина на који се n различитих артикала може распоредити по кутијама (по један у свакој кутији) ако је артикал A у кутији број 2 је:

A) $n!$; B) $n \cdot n!$; C) $\frac{1}{2}(n-1)!$; D) $\frac{1}{2}n!$; E) $(n-1)!$; N).

2. Колико има различитих троцифрених природних бројева већих од 600 формираних од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

A) 324; B) 405; C) 120; D) 400; E) 288; N).

3. На колико начина се од десет ученика могу формирати две групе од по пет ученика?

A) $\binom{10}{2}$; B) $\binom{10}{5}\binom{10}{5}$; C) $\binom{10}{5}$; D) $\binom{10}{5} \cdot 5$; E) $\binom{5}{2}$ N).

4. На полици се налази 18 књига од којих 12 из области математике и 6 из физике. На колико начина се могу издвојити 4 књиге тако да међу њима буде бар једна из физике?

A) мање од 1000; B) између 1000 и 1500; C) између 1500 и 2000; D) између 2000 и 2500; E) преко 2500; N).

5. На кошаркашком турниру учествује 12 репрезентација. На колико начина се могу поделити златна, сребрна и бронзана медаља?

A) $\frac{12!}{3}$; B) $3 \cdot 9!$; C) 1320; D) 440; E) 220; N).

6. Коефицијент уз x^3 у развоју бинома $(2-x)^8$ је:

A) 1792; B) 56; C) -1792; D) -2000; E) -448; N).

7. Коефицијент уз x^{11} у развоју бинома $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$ је:

A) 10; **B)** 120; **C)** 45; **D)** 210; **E)** такав члан не постоји; **N)**.

8. На колико начина у одељењу од 20 ученика могу да се изаберу један председник и два секретара?

A) 2280; **B)** 3420; **C)** 1140; **D)** 6840; **E)** 8000; **N)**.

9. У развоју бинома $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{b}+\frac{1}{\sqrt[15]{a^{28}}}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}$, $a,b\neq 0$, збир биномних коефицијената прва три члана је 79. Члан који не садржи a у развоју овог бинома једнак је:

A) $\binom{12}{5}b^7$; **B)** $5005b^{-4}$; **C)** $\binom{12}{5}b^{-7}$; **D)** $\binom{12}{6}b^{-6}$; **E)** такав члан не постоји; **N)**.

10. Колико пермутација цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6 почиње цифрама 36 (у том редоследу)?

A) 48; **B)** 24; **C)** 120; **D)** 12; **E)** 72; **N)**.

Тест 9. ВЕРОВАТНОЋА

1. Колика је вероватноћа да се при бацању једне коцке три пута узастопно појави страна са шест тачака?

A) $\frac{1}{216}$; **B)** $\frac{1}{72}$; **C)** $\frac{1}{120}$; **D)** $\frac{1}{180}$; **E)** $\frac{1}{243}$; **N)**.

2. Ако је $P(A)=0,43$, $P(B)=0,62$ и $P(AB)=0,11$, тада је вероватноћа $P(A\cup B)$ једнака:

A) $1,05$; **B)** 1; **C)** $0,94$; **D)** $0,73$; **E)** $0,54$; **N)**.

3. Два студента, један за другим, на испиту бирају по једну од 20 понуђених цедуља, међу којима је 10 са лаким питањима. Вероватноћа догађаја да оба студента извуку цедуље са лаким питањима је:

A) $\frac{1}{2}$; **B)** $\frac{1}{4}$; **C)** $\frac{9}{38}$; **D)** $\frac{2}{9}$; **E)** $\frac{9}{40}$; **N)**.

4. На три струга обрађују се машински елементи и то: на првом 40%, на другом 50% и на трећем 10% свих елемената. При томе, први струг даје 80%, други 70%, а трећи 90% стандардних елемената. Вероватноћа да случајно изабрани елемент буде стандардан је:

A) $0,73$; **B)** $0,9$; **C)** $0,75$; **D)** $0,82$; **E)** ниједан од одговора A), B), C) , D) није тачан; **N)**.

5. У кутији се налазе 3 црвене и 5 плавих куглица. Вероватноћа да ће се истовременим извлачењем двеју куглица из кутије извући две црвене куглице је:

A) $\frac{9}{64}$; B) $\frac{3}{28}$; C) $\frac{9}{14}$; D) $\frac{3}{8}$; E) $\frac{15}{64}$; N).

6. На путу кретања аутомобила има више семафора. Сваки од њих са вероватноћом $0,4$ допушта, а са вероватноћом $0,6$ забрањује даље кретање, независно од осталих семафора. Вероватноћа да ће се аутомобил први пут зауставити на трећеме семафору је:

A) $0,48$; B) $0,6$; C) $0,24$; D) $0,144$; E) $0,096$; N).

7. Математичко очекивање случајне променљиве X са законом расподеле $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,04 & 0,4 & 0,32 & 0,24 \end{pmatrix}$ је:

A) $0,44$; B) $0,88$; C) 1; D) $1,76$; E) $1,8$; N).

8. У једној кутији се налази 11 црвених и једна плава куглица, а у другој 9 црвених и једна плава куглица. Случајно је изабрана једна куглица из прве кутије и пребачена у другу, а затим је из друге извучена једна куглица. Показало се да је она плава. Колика је сада вероватноћа да је пребачена куглица била плава?

A) $\frac{11}{13}$; B) $\frac{13}{132}$; C) $\frac{2}{13}$; D) $\frac{1}{10}$; E) $\frac{1}{6}$; N).

9. Коцка је нумерисана бројевима 1, 1, 1, 2, 2, и 3. Коцка се баца два пута. Вероватноћа да збир добијених бројева буде 3 је:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{5}{18}$; D) $\frac{1}{9}$; E) $\frac{1}{6}$; N).

10. Случајна променљива X задата је законом расподеле:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Вероватноћа $P(X^2 - 3 = -2)$ је

A) $0,4$; B) 1; C) 0; D) $0,6$; E) $0,09$; N).

РЕШЕЊА ТЕСТОВА

Тест 1

1. C. **2.** C. **3.** B. **4.** E. **5.** D. **6.** B. **7.** D. **8.** A. **9.** E. **10.** A.

Тест 2

1. A. **2.** E. **3.** E. **4.** A. **5.** B. **6.** D. **7.** B. **8.** C. **9.** D. **10.** D.

Тест 3

1. A. **2.** E. **3.** B. **4.** C. **5.** A. **6.** C. **7.** A. **8.** B. **9.** B. **10.** D.

Тест 4

1. A. **2.** B. **3.** C. **4.** E. **5.** D. **6.** B. **7.** E. **8.** C. **9.** C. **10.** B.

Тест 5

1. D. **2.** E. **3.** D. **4.** B. **5.** C. **6.** E. **7.** D. **8.** C. **9.** C. **10.** D.

Тест 6

1. E. **2.** A. **3.** C. **4.** E. **5.** C. **6.** B. **7.** A. **8.** B. **9.** A. **10.** B.

Тест 7

1. C. **2.** A. **3.** C. **4.** E. **5.** C. **6.** B. **7.** B. **8.** A. **9.** B. **10.** C.

Тест 8

1. E. **2.** A. **3.** C. **4.** E. **5.** C. **6.** C. **7.** B. **8.** B. **9.** C. **10.** B.

Тест 9

1. A. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** B. **6.** E. **7.** D. **8.** C. **9.** A. **10.** D.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арсеновић М., *Збирка решених задатака из комбинаторике*, Друштво математичара физичара и астронома Србије, Београд 1964.

[2] Берман Г. М., *Сборник задач по курсу математического анализа*, "Наука", Москва 1969.

[3] Виленкин Н. Ј., *Комбинаторика*, "Наука", Моска 1969.

[4] Вентцељ Е. С., Овчаров Л. А., *Теорија вероватноће*, "Наука", Москва 1973.

[5] Демидович Б.П. и др., *Задачи и упражненија по математическому анализу*, "Наука", Москва 1970.

[6] Демидович Б.П., *Сборник задач и упразненij по математическому анализу*, "Наука", Москва 1969.

[7] Ивковић З., *Увод у теорију вероватноће, случајне процесе и математичку статистику*, Грађевинска књига, Београд 1972.

[8] Ивковић З. Бањевић Д., *Вероватноћа и математичка статистика за* III *разред усмереног образовања*, Научна књига, Београд 1986.

[9] Лефорт Г., *Algébre et analyse*, Donod, Paris 1964.

[10] Милин Л., Ивановић Ж., Огњановић С., *Математископ 5*, Научна књига, Београд, 1989.

[11] Мићић В., Каделбург З., Младеновић П., *Математика за* IV *разред средње школе*, "Бакар", Бор 1991.

[12] Младеновић П., *Комбинаторика*, Друштво мат. Србије, Београд 1989.

[13] Младеновић П., *Елементаран увод у вероватноћу и статистику*, Друштво математичара Србије, Београд, 1990.

[14] Младеновић П., Огњановић С., *Математика 4*, Друштво математичара Србије, Београд 1990.

[15] Младеновић П., Огњановић С., *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа*, Друштво математичара Србије, Београд 1991.

[16] Огњановић С. и др., *Збирка решених задатака и тестова за припрему пријемних испита из математике за упис на факултете*, "КЛУБ НТ", Београд 1993.

[17] Огњановић С. и др., *Збирка задатака из математике (матем. логика-геометрија-тригонометрија- матем. анализа - вероватноћа)*, "Стручна Књига", Београд 1984.

[18] Огњановић С. и др., *Збирка задатака из математике (лин. алгебра и анал. геометрија, матем. анализа)*, "Стручна Књига", Београд 1984.

[19] Каделбург З., Мићић В., Огњановић С., *Анализа са алгебром 3*, уџбеник са збирком задатака за III разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1998.

[20] Каделбург З., Мићић В., Огњановић С., *Анализа са алгебром 4*, уџбеник са збирком задатака за IV разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1999.