Срђан Огњановић Живорад Ивановић

МАТЕМАТИКА
3

Збирка решених задатака
за III разред
гимназија и техничких школа

Девето допуњено издање

„К Р У Г“
БЕОГРАД, 2008.

Аутори: *мр Срђан Огњановић*, професор
Живорад Ивановић, професор

МАТЕМАТИКА 3

Збирка решених задатака за III разред гимназија и техничких школа

Девето допуњено издање

Издавач: *Издавачко предузеће „Круг“*, Београд, Устаничка 244г

За издавача: *Маријана Милошевић*

Рецензенти: *др Мирко Јанц*, доцент Математичког факултета у Београду
др Драгослав Љубић, доцент Математичког факултета у Београду
Јасна Филиповић, професор Девете београдске гимназије

Уредник: *Живорад Ивановић*

Текст је обрађен компјутерски применом програмског пакета
$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX Америчког математичког друштва

Цртежи: *Гордана Лазић*, дипл. инж. грађевине

ISBN: 978–86–7136–140–8

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.3)(076)

ОГЊАНОВИЋ, Срђан
Математика 3 : збирка решених задатака [и тестова] за III разред гимназија и техничких школа / Срђан Огњановић, Живорад Ивановић ; [цртежи Гордана Лазић]. – 9. допуњено изд. – Београд : Круг, 2008 (Лапово : Колор прес). 278 стр. : граф. прикази ; 24 cm

Тираж 3 000. – Библиографија: стр. [279].

ISBN 978–86–7136–140–8
1. Ивановић, Живорад [аутор]

COBISS.SR-ID 149312780

Тираж: 3000 примерака

Штампа: „Колор прес“ – Лапово

ПРЕДГОВОР

Ова збирка задатака писана је према измењеном наставном плану и програму за трећи разред *гимназија и техничких школа*, који се примењује од школске 1992/93. године. У њој су обрађени задаци из следећих тема:

1. Површина геометријских фигура у равни
2. Полиедри
3. Обртна тела
4. Детерминанте реда два и три. Системи линеарних једначина и неједначина
5. Вектори
6. Аналитичка геометрија у равни
7. Математичка индукција. Низови
8. Комплексни бројеви и полиноми.

Свака од наведених тема обрађена је у посебној глави, а свака глава подељена је на већи број поглавља. На почетку сваког поглавља дате су дефиниције и тврђења чије је познавање неопходно за решавање задатака из тог поглавља. У сваком поглављу задаци су поређани, почев од најједноставнијих, ради репродукције научених садржаја, ка тежим који су дати за утврђивање и продубљивање обрађене материје. На крају неких глава дат је *Додатак* у коме су задаци веће тежине и за чије је решавање потребно уложити одређен степен креативности.

Од ове школске године, по први пут, у програму средњошколске математике обрађиваће се неколико наслова из елементарне теорије бројева и полинома. Поменути наслови су вероватно преузети из одговарајућег програма за 2. разред Математичке гимназије. Но, док је тамо за њих предвиђено педесетак часова, овде је предвиђено само 8–10 часова за теорију бројева и 5–7 часова за полиноме. Поред Математичке гимназије једино место где се овој проблематици поклањало више пажње су летње и зимске школе младих математичара — за ученике који су се припремали за такмичења. Аутори збирке, који су дугогодишњи професори у поменутим школама, потрудили су се да за број часова који је предвиђен програмом одаберу и задатке који нису тако тешки, па се могу обрађивати у редовној настави III разреда средње школе. Подразумева се да је дат и одређен број задатака за продубљивање градива.

Доцент др Драгослав Љубић прочитао је, у својству рецензента, првобитну верзију рукописа. На основу његових примедби извршена су побољшања у методском редоследу задатака.

Посебну захвалност дугујемо доценту др Мирку Јанцу: 1. што је прихватио да обради на рачунару компликован математички слог ове књиге тако да текст буде прегледан и лако читљив; 2. што је у току обраде рукописа на рачунару пажљиво читао текст и преформулисао кратак теоријски увод на почетку сваке главе, као и дао образложења решења, нарочито неких тежих задатака.

На крају напоменимо да смо приликом састављања ове збирке користили ауторске прилоге из књига Математископ 4 и Математископ 5.

У Београду, августа 1992. *Аутори*

Предговор осмом издању

У циљу уједначавања захтева који се постављају пред ученике, у најновијем издању направљена је једна оријентациона подела задатака из збирке у три групе – лакши (ниво оцена 2 и 3 – обојени зеленом бојом), тежи (ниво оцена 4 и 5 – жутом) и најтежи задаци (из додатака уз главу – обојени црвеном бојом). При овоме жеља нам је била да помогнемо ученицима и њиховим наставницима у савлађивању планираног градива, а при томе смо свесни да је оваква подела на три групе задатака груба и непрецизна, па ће се, можда, у неким наредним издањима појавити нека побољшања и корекције.

У Београду, јуна 2004. *Аутори*

ГРЧКИ АЛФАБЕТ

А	α	алфа	Н	ν	ни
Б	β	бета	Ξ	ξ	кси
Г	γ	гама	О	o	омикрон
Δ	δ	делта	П	π	пи
Е	ε	епсилон	П	ρ	ро
З	ζ	зета	Σ	σ	сигма
Х	η	ета	Т	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
И	ι	јота	Φ	φ	фи
К	$\varkappa$	капа	Ш	χ	хи
А	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
М	μ	ми	Ω	ω	омега

САДРЖАЈ

ТЕКСТОВИ ЗАДАТАКА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I
ПОВРШИНА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФИГУРА У РАВНИ

1.1. Површина многоугла

Правоугаоник: $P = ab$ (a и b – странице правоугаоника)

Квадрат: $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$ (a – страница, d – дијагонала квадрата)

Паралелограм (ромбоид): $P = ah_a = bh_b$ (a и b – странице, h_a и h_b – одговарајуће висине паралелограма)

Ромб: $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ (a – страница, h – висина, d_1 и d_2 – дијагонале ромба)

Троугао:

1° $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ (a, b, c – странице, h_a, h_b, h_c – одговарајуће висине троугла)

2° $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Херонова формула; s – полуобим троугла)

3° $P = (s-a)\sqrt{s(s-c)}$ и $P = \frac{a}{4}\sqrt{4c^2 - a^2}$ (s – полуобим, a – основица, c – крак једнакокраког троугла)

4° $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a – страница једнакостраничног троугла)

5° $P = \frac{abc}{4R}$ (R – полупречник описаног круга око троугла)

6° $P = rs$ (r – полупречник уписаног круга у троуглу)

7° $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\gamma$ (a, b, c – странице, α, β, γ – углови троугла)

Трапез: $P = \frac{a+b}{2}h$ (a, b – основице, h – висина трапеза)

Делтоид: $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1, d_2 – дијагонале делтоида)

Правилни многоугао: $P = \frac{1}{2}Sr$ (S – обим, r – полупречник уписаног круга)

1. Колике су странице правоугаоника чији је обим 7,4 m, а површина 3 m^2?

2. Наћи странице правоугаоника чији је обим $S = 20\,\mathrm{cm}$, а површина му је једнака површини квадрата странице $c = 4\,\mathrm{cm}$.

3. Дијагонале правоугаоника секу се под углом од $60°$. Израчунати површину и обим правоугаоника ако је његова дужа страница $a = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

4. Странице правоугаоника разликују се за 6. Ако већу умањимо за 2, а мању увећамо за 5, површина правоугаоника ће бити већа за 32. Одредити те странице.

5. Игралиште има облик правоугаоника дужине 60 m и ширине 50 m. Око њега је стаза ширине 120 cm. Израчунати површину стазе.

6. Странице правоугаоника су $a = 6\,\mathrm{cm}$ и $b = 3\,\mathrm{cm}$. Наћи странице правоугаоника који има исту површину као дати и чије странице x и y задовољавају релацију $x^2 + 2xy = 117$.

7. Израчунати обим и површину квадрата ако је збир дијагонале и странице $a + d = 9{,}64\,\mathrm{cm}$ (узети: $\sqrt{2} = 1{,}41$).

8. Страница квадрата повећана је за 10%. За колико је процената повећан обим, а за колико површина тог квадрата?

9. Правоугаоник и квадрат имају једнаке површине $100\,\mathrm{cm}^2$. Ако је једна страница правоугаоника за 2 cm краћа од странице квадрата, израчунати обиме квадрата и правоугаоника.

10. Дати су ромб и квадрат једнаких обима. Одредити оштар угао ромба ако се зна да је његова површина два пута мања од површине квадрата.

11. Одредити странице ромба површине $16\,\mathrm{cm}^2$ чији је однос дијагонала $d_1 : d_2 = 1 : 2$.

12. У ромб површине $18\,\mathrm{cm}^2$ уписан је круг површине $\frac{9}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$. Одредити страницу и оштар угао ромба.

13. Страница ромба је 12 cm а угао између страница је $60°$. Одредити висину, дијагонале и површину ромба.

14. Страница ромба је $a = 5$, а збир дијагонала $d_1 + d_2 = 14$. Одредити површину ромба.

15. Израчунати површину и углове ромба ако је висина два пута мања од основице и износи 4,2 cm.

16. Једна од дијагонала ромба дужа је од друге $1\frac{1}{3}$ пута. Ако је површина ромба $150\,\mathrm{cm}^2$, израчунати његову висину.

17. Израчунати површину паралелограма чије су странице дужине 35 cm и 42 cm, а једна од дијагонала дужине 35 cm.

18. Странице паралелограма су 12 cm и 16 cm. Растојање између већих страница је 8 cm. Наћи растојање између мањих страница.

19. Израчунати површину паралелограма чији је обим 20 cm, оштар угао $30°$, а висине се односе као $2 : 3$.

20. Странице паралелограма су $a = 8\,\mathrm{cm}$ и $b = 6\,\mathrm{cm}$ и један унутрашњи угао је $\alpha = 60°$. Израчунати висине и површину паралелограма.

21. Висина паралелограма $ABCD$ образује са страницом AB угао од $20°$. Одредити углове тог паралелограма.

22. У паралелограму $ABCD$ симетрала угла α пресеца продужетак странице BC у тачки E. Ако је обим паралелограма $38\,\mathrm{cm}$ и $CE = 3\,\mathrm{cm}$, израчунати странице паралелограма.

23. Обим једнакокраког троугла има дужину $18\,\mathrm{cm}$, а крак му је за $3\,\mathrm{cm}$ краћи од основице. Израчунати површину троугла.

24. Катете правоуглог троугла односе се као $3 : 4$, а његова површина је $54\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати обим троугла.

25. Дужине тежишних дужи у правоуглом троуглу су $t_a = 7$ и $t_b = 4$. Наћи дужину хипотенузе c.

26. Решење једначине $(x-1)^2 - x^2 = -7$ је мерни број висине једнакостраничног троугла изражене у cm. Израчунати површину тог троугла.

27. Обим троугла је $80\,\mathrm{mm}$, а дужине његових страница односе се као $5 : 6 : 5$. Израчунати дужине страница тог троугла и његову површину.

28. У једнакостранични троугао ABC, странице дужине a, уписан је други једнакостранични троугао LMN, чија су темена на страницама троугла ABC и деле сваку од њих у односу $1 : 2$. Израчунати површину троугла LMN.

29. Израчунати површину троугла ако су познате његове странице:

а) 17, 65, 80; б) $\frac{25}{12}$, $\frac{269}{75}$, $\frac{183}{100}$; в) $a = x - y$, $b = x$, $c = x + y$.

30. Израчунати дужине страница троугла, ако му је површина 63, а странице сличног троугла 45, 40 и 13.

31. Израчунати површину троугла ако су дате две странице $a = 39$ и $b = 25$ и тежишна дуж која одговара трећој страници $t_c = 28$.

32. Дужине страница троугла су 10, 17 и 21. Израчунати дужине висина.

33. Катете правоуглог троугла дате су једначинама $2a + b = 22$ и $a - b = 2$. Израчунати: обим, површину троугла и полупречнике уписаног и описаног круга.

34. Катете правоуглог троугла дате су једначинама: $(a-5)^2 - (a+9)(a-11) = 4$ и $3(2b-1) - 2(b+4) = 21$. Израчунати полупречник описаног круга око тог троугла.

35. Странице троугла ABC су: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 9$. Одредити полупречник описаног круга тог троугла.

36. Основица једнакокраког троугла ABC је $AB = 16$, а краци су дужине 10. Одредити полупречнике уписаног и описаног круга тог троугла, као и одстојање њихових средишта O и S.

37. У правоуглом троуглу катете су $a = 6\,\mathrm{cm}$ и $b = 8\,\mathrm{cm}$. Одредити односе обима и површина кругова уписаног и описаног око троугла.

38. Квадрат и једнакостранични троугао имају једнаке обиме. Површина троугла је $9\sqrt{3}$. Одредити дијагоналу квадрата.

39. У једнакокраки правоугли троугао уписан је квадрат тако да му два темена припадају хипотенузи, а по једно катетама. Ако је дужина катете троугла 10 cm, одредити површину квадрата.

40. У трапезу, чија површина је $594\,\mathrm{m}^2$, висина је $22\,\mathrm{m}$, а разлика основица је $6\,\mathrm{m}$. Колике су основице?

41. Паралелне странице трапеза су $AB = 20$ и $CD = 5$, а краци $BC = 13$ и $AD = 14$. Израчунати површину трапеза.

42. Око круга полупречника $r = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ описан је једнакокраки трапез површине $P = 15\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати дужину дијагонале овог трапеза.

43. Основице трапеза су $a = 25\,\mathrm{cm}$ и $b = 15\,\mathrm{cm}$, а један крак је $c = 8\,\mathrm{cm}$. Одредити други крак и површину тог трапеза ако је збир углова на већој основици трапеза прав угао.

44. Делтоид се састоји из два једнакокрака троугла чија заједничка основица износи 40 cm, а краци су 25 cm, односно 52 cm. Израчунати површину делтоида.

45. Неједнаке странице делтоида су 2,7 cm и 3,6 cm и образују прав угао. Израчунати површину делтоида.

46. Основице трапеза су 6,4 cm и 3,6 cm, а површина трапеза је једнака површини делтоида чије су дијагонале $d_1 = 8\,\mathrm{cm}$ и $d_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Израчунати висину трапеза.

47. Основица AB трапеза $ABCD$ је два пута дужа од основице CD и два пута дужа од крака AD. Дужина дијагонале AC је x, а дужина крака BC је y. Наћи површину трапеза.

48. Израчунати површину трапеза ако су му основице $a = 8$, $b = 4$, а углови на већој основици $45°$ и $30°$.

49. Дијагонала једнакокраког трапеза дели туп угао тог трапеза на два једнака дела. Мања основица трапеза је 1 cm, а обим трапеза је 14 cm. Израчунати површину трапеза.

50. Наћи површину једнакокраког трапеза ако је његова висина h, а крак се види из центра описаног круга под углом од $60°$.

51. Дијагонале једнакокраког трапеза су међусобно нормалне, а површина му је a^2. Израчунати висину трапеза.

52. Дијагонале једнакокраког трапеза су узајамно нормалне. Наћи површину трапеза ако је крак једнак $2\sqrt{5}$ и ако се дужине основица односе као $3 : 1$.

53. Дат је једнакокраки трапез чије су дијагонале узајамно нормалне. Доказати да је тада површина трапеза једнака квадрату његове висине.

54. Збир висине и средње дужи једнакокраког трапеза је 6 cm, а површина трапеза је $6\,\mathrm{cm}^2$. Наћи угао између дијагонала тог трапеза.

55. Ако се број страница правилног многоугла повећа за два, његов се угао повећа за $9°$. Одредити број страница многоугла.

56. Одредити хипотенузу правоуглог троугла преко њене висине h_c и збира катета $s = a + b$

57. Кроз тачку у троуглу ABC повучене су праве паралелне страницама троугла. На тај начин формирана су три мања троугла чије су површине 1, 4 и 9. Одредити површину троугла ABC.

58. Две странице троугла ABC су $BC = a$ и $AC = b$, а збир висина $h_a + h_b$ једнак је трећој висини h_c. Одредити трећу страницу c.

59. У троуглу површине $P = 6\sqrt{3}$, странице $a = 3$ и $b = 7$ затварају туп угао. Одредити трећу страницу троугла.

60. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ се секу у тачки O и деле четвороугао на троуглове $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ и $\triangle ODA$. Доказати да је производ површина троуглова $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ једнак производу површина троуглова $\triangle OBC$ и $\triangle ODA$.

61. Израчунати површину трапеза чије су дијагонале 7 cm и 8 cm, а основице 3 cm и 6 cm.

62. У трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) тачка O је пресек дијагонала. Израчунати површину трапеза ако су површине троуглова AOB и DOC редом једнаке p^2 и q^2.

1.2. Површина круга и његових делова

Обим круга: $S = 2\pi r$ (r – полупречник круга)

Кружни лук: $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ (α – централни угао)

Површина круга: $P = r^2\pi$ (P површина, r полупречник круга).

Површина кружног исечка: $P = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$ (P површина, r полупречник, α централни угао исечка у степенима); или $P = \dfrac{1}{2}r^2\alpha$ (α централни угао исечка у радијанима).

Површина кружног одсечка: $P = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360^\circ} - \dfrac{1}{2}r^2\sin\alpha$ (α – централни угао мерен у степенима)

63. Ако је l део кружне линије, α централни угао, β одговарајући периферијски угао, одредити:

а) β и α за $l \in \left\{\dfrac{1}{6}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{7}{9}\right\}$; б) l и α за $\beta \in \{60^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$.

64. Око правилног многоугла са 20 дијагонала описан је круг полупречника 4 cm. Израчунати:

а) централни угао тог многоугла;

б) површину исечка који одговара страници тог многоугла.

65. Кружном одсечку одговара централни угао од 120°, а тетива тог одсечка је удаљена од центра 3 cm. Израчунати површину одсечка.

66. Одредити централни угао који одговара кружном исечку површине $8{,}1\pi\,\mathrm{cm}^2$ ако је полупречник круга $9\,\mathrm{cm}$.

67. Одредити периферијски угао који одговара исечку површине $9{,}6\pi\,\mathrm{cm}^2$ ако је полупречник круга $r = 12\,\mathrm{cm}$.

68. а) Израчунати дужину кружног лука ако је централни угао $\alpha = 22°30'$ и полупречник круга $r = 1{,}8$ m.

б) Израчунати дужину полупречника круга ако централном углу од $\alpha = 36°$ одговара кружни лук дужине $l = 45\,\mathrm{cm}$.

в) Одредити величину централног угла, код кога је полупречник круга једнак одговарајућем кружном луку.

69. Израчунати површину кружног прстена између два концентрична круга, ако је познато да је дужина тетиве спољашњег круга, која додирује унутрашњи $a = 4\,\mathrm{cm}$.

70. Странице правоуглог троугла су $6\,\mathrm{cm}$, $8\,\mathrm{cm}$ и $10\,\mathrm{cm}$. Одредити разлику површине описаног и уписаног круга тог троугла.

71. Обим правилног многоугла, дужине странице $4\,\mathrm{cm}$, једнак је $24\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину описаног и уписаног круга тог многоугла.

72. Колико пута је површина круга описаног око квадрата већа од површине круга уписаног у тај квадрат?

73. Око круга пречника $15\,\mathrm{cm}$ описан је једнакокраки трапез чија је дужина крака $17\,\mathrm{cm}$. Одредити површину трапеза.

74. Странице троугла су $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 6\,\mathrm{cm}$, $c = 7\,\mathrm{cm}$. Круг додирује странице a и b, а центар му се налази на страници c. Израчунати површину тог круга.

75. Око једнакокраког трапеза чије су основице $12\,\mathrm{cm}$ и $6\,\mathrm{cm}$, а краци $6\,\mathrm{cm}$ описан је круг. Одредити полупречник круга.

76. Израчунати оштар угао ромба ако је његова површина Q и површина круга уписаног у тај ромб једнака S.

77. У једнакостранични троугао странице a уписан је круг k_1. Једно теме троугла је центар круга k_2 полупречника $a/2$. Израчунати површину пресека та два круга.

78. Кругови k_1 и k_2 секу се под правим углом. Израчунати површину њиховог пресека ако су полупречници тих кругова $r_1 = 1\,\mathrm{cm}$ и $r_2 = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

79. У круг полупречника $r = 5\,\mathrm{cm}$ уписан је правилан осмоугао $A_1A_2\ldots A_8$. Израчунати дужину његове дијагонале A_1A_3.

80. Нека су $R = 5$ и $r = 2$ полупречници описаног и уписаног круга датог правоуглог троугла. Наћи површину овог троугла.

81. Ако је у једнакокраком троуглу основица a једнака висини h_a, одредити полупречник описаног круга тог троугла.

82. Дат је једнакокраки троугао чија је основица дужине $30\,\mathrm{cm}$ и полупречник уписаног круга $7{,}5\,\mathrm{cm}$. Одредити површину овог троугла.

83. Два пречника круга секу се под углом од 30°. Ако се споје крајње тачке пречника, разлика добијених тетива је $2\sqrt{2}$. Израчунати површину круга.

84. Око круга описан је трапез $ABCD$ чији краци граде са већом од паралелних страница, AB, оштре углове α и β. Ако је површина трапеза Q, израчунати полупречник круга.

85. Додирне тачке круга уписаног у дати троугао образују на страницама одсечке m, n и p. Доказати да је површина датог троугла $P = \sqrt{mnp(m+n+p)}$.

1.3. Додатак уз главу I

86. У правоуглом троуглу ABC чија је хипотенуза $AB = 2$, средишта катета M и N и тачке A и B припадају једном кругу. Израчунати површину тог круга.

87. У једнакокраком троуглу угао на основици једнак је α. Одредити однос површина троугла и круга описаног око тог троугла.

88. У једнакокраком троуглу угао при врху је α, а полупречник уписаног круга r. Наћи површину троугла.

89. У круг полупречника R смештена су три подударна круга који се међусобно додирују и који додирују дати круг. Израчунати површину фигуре ограничене са та три круга.

90. Око круга полупречника R описан је ромб. Површина четвороугла с врховима у тачкама додира круга и ромба је једнака S. Наћи дужину странице ромба.

91. Један угао троугла је два пута већи од другог, а разлика дужина њима наспрамних страница је $2\,\mathrm{cm}$; трећа страница троугла је $5\,\mathrm{cm}$. Наћи површину троугла.

92. Подножја висина оштроуглог троугла ABC су темена другог троугла чији је обим $2s$. Наћи површину троугла ABC ако је полупречник круга описаног око тругла ABC једнак R.

93. На страници AB паралелограма $ABCD$ површине 1 дата је тачка M тако да је $AB = 3 \cdot AM$. Ако је N тачка пресека правих AC и DM одредити површину троугла AMN.

94. Троугао ABC уписан је у круг, из темена A је конструисана тангента круга до пресека са продужетком странице BC у тачки D; из темена B и C су конструисане нормале на тангенту, од којих краћа износи $6\,\mathrm{cm}$. Ако је $BC = 5\,\mathrm{cm}$ и $AD = 5\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, одредити површину трапеза који образују те нормале, страница BC и део тангенте.

95. Кругови $k(O,r)$ и $k_1(O_1,3r)$ се додирују споља у тачки A, а имају заједничку тангенту BC (B и C додирне тачке, $B \neq C$). Израчунати:

а) површину трапеза BOO_1C;

б) површину троугла ABC;

в) површину фигуре ограничене заједничком тангентом BC и круговима.

96. Око правилног многоугла странице a описан је и у њему је уписан круг. Показати да површина кружног прстена између ова два круга не зависи од броја страница многоугла.

97. Дата је дуж AB и на њој тачка C. Са исте стране праве AB конструисани су полукругови над пречницима AB, AC и CB. Показати да је површина фигуре ограничене овим полукруговима (*Архимедов срп*) једнака површини круга над пречником CD, где је D тачка на кругу пречника AB таква да је $CD \perp AB$.

98. Ако се над катетама правоуглог троугла уписаног у полукруг опишу полукругови, добијају се две фигуре у облику полумесеца (*Хипократове лунеле*). Доказати да је збир површина тих фигура једнак површини датог троугла.

99. Доказати следеће формуле за полупречник описаног (R) и уписаног (r) круга троугла:

$$R = \frac{abc}{4P}, \qquad r = \frac{2P}{a+b+c},$$

где су a, b и c странице троугла, а P његова површина.

100. Површина троугла је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (*Херонова формула*), где су a, b и c странице троугла, а s његов полуобим. Доказати.

101. Доказати да је површина четвороугла $P = \frac{1}{2} ef \sin\varphi$ ако су e и f дијагонале, а φ угао између њих.

102. Доказати да је површина тангентног четвороугла $P = rs$, где је r полупречник уписаног круга, а s полуобим четвороугла.

103. Извести формулу за површину троугла $P = s^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, где су α, β и γ углови троугла, а s његов полуобим.

104. Извести формуле за површину правилног n-тоугла:

а) $P = \dfrac{nr^2}{2} \sin\dfrac{360^\circ}{n}$, где је r полупречник његовог описаног круга;

б) $P = n\rho_n^2 \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, где је ρ_n полупречник његовог уписаног круга;

в) $P = \dfrac{ns_n^2}{4} \operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$, где је s_n његова страница.

105. У једнакокраки троугао са основицом a и висином h, која одговара основици, уписан је правоугаоник највеће површине чија страница припада основици троугла. Одредити дужине страница правоугаоника.

Глава II

ПОЛИЕДРИ

2.1. Узајамни положај тачака, правих и равни. Диедар. Рогаљ

Нормалност праве и равни. *Дефиниција*: Права која сече раван нормална је на ту раван ако је нормална на сваку праву те равни са којом се сече.

Теорема: Права је нормална на раван ако сече раван и нормална је на две различите праве те равни са којима се сече.

Теорема о три нормале. Нека је p права која сече раван α у тачки C и нека је B подножје нормале из тачке $A \in p$ на раван α. Права c равни α кроз тачку C нормална је на BC ако и само ако је нормална на AC.

Угао између праве и равни. *Дефиниција*: Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на ту раван.

Угао диедра. *Дефиниција*: Угао диедра је угао између полуправих нормалних на ивицу диедра, од којих свака припада по једној страни диедра.

106. Катета једнакокраког правоуглог троугла заклапа угао од 45° са равни у којој је друга катета. Колики угао заклапа хипотенуза тог троугла са том равни?

107. Једнакостранични троугао ABC, чија је страница a, има страницу AB паралелну равни α, а равни ABC и α граде диедар од 30°. Наћи обим пројекције троугла ABC у равни α.

108. У равни π дат је једнакостранични троугао ABC странице a. Ван те равни дата је тачка M која је од темена троугла ABC удаљена за $\frac{5}{3}a$. Израчунати растојање тачке M од равни π.

109. Дат је ромб $ABCD$ и раван α. Наћи одстојање темена D од равни α која садржи теме A ако су одстојања тачака B и C од равни α, редом, b и c.

110. Странице троугла су a, b и c, а тачка M је на истој удаљености d од темена троугла. На којој удаљености од равни троугла је тачка M?

111. Из тачака A и B, које припадају странама диедра, конструисане су нормале AA_1 и BB_1 на ивицу диедра.

а) Израчунати дужину дужи AB ако је $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$, а угао диедра је α.

б) Израчунати угао диедра ако је $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.

112. Тачка M је на удаљености a од равни π, а тачке A и B се налазе у равни π. Ако дужи MA и MB образују са равни π угао од $30°$, а међусобно угао од $60°$, одредити одстојање између тачака A и B.

113. Катета AC правоуглог троугла ABC ($\measuredangle C = 90°$) налази зе у равни α, а равни α и ABC образују диедар од $45°$. Ако је $AC = 2\,\mathrm{m}$, $AB : BC = 3 : 1$, наћи одстојање тачке B од равни α.

114. Дате су праве a, b и c. Наћи праву p која је компланарна са сваком од њих.

115. Дате су некомпланарне тачке A, B, C и D. Тачке M, N, P и Q деле, редом, дужи AB, BC, CD и DA у односу

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{DP}{PC} = \frac{AQ}{QD} = k.$$

Доказати да се дужи MP и NQ секу у некој тачки O и да је при томе $MO : OP = QO : ON = k$.

116. Разлика углова које гради раван са две дате праве је мања од угла који граде те две праве. Доказати.

117. У триедру $SABC$ су сви ивични углови прави. Доказати:

а) Ортоцентар H троугла ABC је подножје нормале из тачке S на раван ABC.

б) Површина троугла SAB је геометријска средина површина троуглова HAB и CAB.

в) Збир квадрата површина троуглова SAB, SBC и SCA једнак је квадрату површине троугла ABC.

118. У триедру је једна страна угао γ ($\gamma < 180°$), а на њу налегли диедри су једнаки φ ($\varphi < 90°$). Одредити угао α двеју других страна триедра као и угао β који образује раван угла γ са наспрамном ивицом триедра.

119. Дате су тачке A и B, раван α и дуж l. Одредити геометријско место тачака M равни α за које важи $MA^2 - MB^2 = l^2$.

2.2. Призма, пирамида и њихови равни пресеци

120. Колико ивица, темена, страна и просторних дијагонала има n-тострана призма?

121. Дијагонале три стране квадра су a, b и c. Наћи ивице квадра.

122. Бочна ивица правог паралелепипеда је $10\,\mathrm{cm}$, ивице основе су $11\,\mathrm{cm}$ и $23\,\mathrm{cm}$, а однос дијагонала основе је $2:3$. Наћи површине дијагоналних пресека паралелепипеда.

123. Ивице основе правог паралелепипеда су $3\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$, а једна од дијагонала основе је $4\,\mathrm{cm}$. Израчунати већу дијагоналу паралелепипеда ако се зна да мања дијагонала образује са равни основе угао од $60°$.

124. Колико је растојање темена B од дијагонале AC' коцке $ABCDA'B'C'D'$ ивице 1?

125. Раван садржи ивицу једне основе и њој наспрамну ивицу друге основе правилне шестостране призме чије су све ивице исте дужине a. Израчунати површину насталог пресека.

126. Основа призме је правилни шестоугао странице a, а бочне стране су квадрати. Израчунати дужине дијагонала призме и површине њених дијагоналних пресека (тј. пресека који садрже две несуседне бочне ивице).

127. Основа пирамиде је правоугаоник страница $6\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$, а све бочне ивице пирамиде су $13\,\mathrm{cm}$. Наћи висину пирамиде.

128. Основне ивице a и b правог паралелепипеда образују угао од $60°$, а бочна ивица је (а) аритметичка; (б) геометријска средина основних ивица. Израчунати дужине дијагонала паралелепипеда.

129. Основа пирамиде је једнакокраки троугао чија основица је $12\,\mathrm{cm}$, а крак $10\,\mathrm{cm}$. Раван основе и свака од бочних страна граде диедар са углом од $45°$. Наћи висину пирамиде.

130. Висина пирамиде је подељена на четири једнака дела и кроз деоне тачке су постављене равни паралелне основи. Збир површина три добијена пресека је S. Колика је површина основе пирамиде?

131. Основа четворостране пирамиде $ABCDE$ је правоугаоник $ABCD$ коме су дужине ивица $AB = 3$, $AD = 2$. Ако је ивица AE нормална на основу $ABCD$, а њена дужина $AE = 4$, колика је површина бочне стране DCE?

132. Израчунати нагибни угао бочне ивице правилног тетраедра.

133. Дата је правилна четворострана пирамида основне ивице $a = 5\sqrt{2}$ и бочне ивице $s = 13$. Израчунати ивицу коцке која је уписана у ту пирамиду тако да се њена четири горња темена налазе на ивицама пирамиде.

134. Бочна ивица зарубљене пирамиде је a, а одговарајућа бочна ивица целе пирамиде је b $(b > a)$. Разлика површина основа зарубљене пирамиде је c^2. Израчунати површине основа зарубљене пирамиде.

135. Пирамида је пресечена равни паралелном основи. У ком односу раван дели висину пирамиде ако је познато да се површина пресека односи према површини основе исто као и висина зарубљене пирамиде према висини целе пирамиде?

136. Две пирамиде једнаких основа B, а висина H и $4H$, пресечене су са равни на истом растојању од основе. Наћи односе површина P_1 и P_2 $(P_1 < P_2)$ пресека тих пирамида, ако је растојање пресека од основе једнако 3/4 мање висине.

137. Дат је квадар чије су ивице a, b, c $(c^2 > a^2 + b^2)$. Нека је π симетријска раван једне од његових дијагонала. Показати да раван π сече само ивице дужине c и наћи удаљеност пресечних тачака од доње основе квадра (правоугаоника са страницама a и b).

138. Основа пирамиде је једнакостранични троугао, једна од бочних страна је нормална на раван основе, а друге две су нагнуте на основу под углом α. Наћи углове које са основом граде бочне ивице.

139. Угао између бочне ивице и равни основе правилне четворостране пирамиде је 60°, а дужина бочне ивице је a. Симетријска раван једне од бочних ивица сече пирамиду. Наћи површину пресека.

140. Правилна тространа пирамида пресечена је равни нормалном на равни основе која дели две ивице основе на једнаке делове. Наћи површину пресека ако је висина пирамиде H, а ивица основе a.

141. Основа пирамиде је квадрат странице a, а њена висина, чија дужина је H, има подножје у центру основе. Пирамида је пресечена равни паралелном основи на растојању x од ње. Израчунати површину пресека као функцију од x.

142. Основе зарубљене пирамиде имају површине B и B_1. Кроз средиште висине конструисана је раван паралелна основама. Колика је површина насталог пресека?

143. Правилна осмострана пирамида основне ивице a пресечена је равни паралелном основи која дели висину у размери $m : n$, рачунајући од врха. Израчунати површину нресека.

2.3. Површина и запремина полиедара

2.3.1. Призма

Површина и запремина призме:

$$P = 2B + M, \qquad V = BH$$

(B – површина основе, M – површина омотача, H – висина призме)

Правилни хексаедар (коцка):

$$P = 6a^2, \qquad V = a^3$$

(a – ивица коцке)

Квадар (правоугли паралелепипед):

$$P = 2(ab + bc + ca), \qquad V = abc$$

(a, b, c – ивице квадра)

Правилна тространа призма:

$$P = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 3aH, \quad V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,H$$

(a – ивица основе, H – висина призме)

Правилна шестострана призма:

$$P = 3a(a\sqrt{3} + 2H), \quad V = \frac{3}{2}a^2H\sqrt{3}$$

144. Израчунати површину квадра чија је дужина дијагонале 20 cm, а дужине основних ивица 4 cm и 6 cm.

145. Три стране паралелепипеда имају површине $1\,\mathrm{m}^2$, $2\,\mathrm{m}^2$, $3\,\mathrm{m}^2$. Колика је укупна површина паралелепипеда?

146. Основне ивице правог паралелепипеда су 10 и 17, дужа дијагонала основе 21, а дужа дијагонала паралелепипеда је 29. Израчунати површину паралелепипеда.

147. Ивице квадра односе се као $1:2:5$, а његова дијагонала дуга је $5\sqrt{6}$ cm. Колика је површина квадра?

148. Површина правилне тростране призме је $P = 20\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, а основна ивица 4 cm. Наћи висину призме.

149. Израчунати површину праве призме чија је основа ромб странице a, са оштрим углом од $60°$, ако је висина призме једнака већој дијагонали основе.

150. Основне ивице праве тростране призме односе се као $17:10:9$, бочна ивица је 16, а површина призме 1440. Израчунати основне ивице.

151. Основа праве призме је правоугли троугао чије су катете 12 cm и 5 cm, а висина призме је 4 cm. Израчунати површину призме.

152. Ако се свака ивица коцке увећа за $2\,\mathrm{cm}$, запремина коцке се увећава за $98\,\mathrm{cm}^3$. Колика је ивица коцке?

153. Основа правог паралелепипеда је паралелограм страница a и b и оштрог угла од $30°$. Наћи запремину паралелепипеда ако је површина његовог омотача M.

154. Основа правог паралелепипеда је паралелограм страница $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$ и оштрог угла од $45°$, а краћа дијагонала паралелепипеда је $7\,\mathrm{cm}$. Наћи његову запремину.

155. Површине бочних страна праве тростране призме су $64\,\mathrm{cm}^2$, $80\,\mathrm{cm}^2$ и $48\,\mathrm{cm}^2$. Ако је висина призме $16\,\mathrm{cm}$, израчунати њену запремину.

156. Основа праве призме је правоугли троугао са површином $9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ и углом од $30°$. Површина највеће бочне стране једнака је $8\,\mathrm{cm}^2$. Наћи запремину призме.

157. Површине три стране квадра су P_1, P_2 и P_3. Наћи његову запремину.

158. Одредити висину H правилне тростране призме којој је основна ивица дужине a, а запремина $V = a^3\sqrt{3}$.

159. Одредити запремину правилне шестостране призме којој је основна ивица a, а висина $4a$.

160. Највећа дијагонала правилне шестостране призме има дужину d и са бочном ивицом призме гради угао од $30°$. Колика је запремина призме?

161. Ивице двеју коцки су у односу $3 : 2$. Израчунати њихове површине и запремине ако се површине разликују за $120\,\mathrm{cm}^2$.

162. Израчунати површину и запремину праве четворостране призме чија је основа ромб са дијагоналама $d_1 = 16$ и $d_2 = 12$, а висина једнака основној ивици.

163. Израчунати површину и запремину праве призме чија је основа ромб са дијагоналама $d_1 = 72\,\mathrm{cm}$ и $d_2 = 96\,\mathrm{cm}$, а површина омотача призме $7800\,\mathrm{cm}^2$.

164. Израчунати површину призме, чија је запремина $720\,\mathrm{cm}^3$, а основа је троугао са страницама дужине $25\,\mathrm{cm}$, $17\,\mathrm{cm}$ и $12\,\mathrm{cm}$.

165. Израчунати површину и запремину праве призме чија је основа трапез са основицама $a = 105\,\mathrm{cm}$ и $b = 25\,\mathrm{cm}$ и крацима $c = 64\,\mathrm{cm}$ и $d = 48\,\mathrm{cm}$, а површина омотача једнака је површини основе.

166. Израчунати површину и запремину правилне шестостране призме, основне ивице $a = 4\,\mathrm{cm}$, ако је површина њеног највећег дијагоналног пресека $120\,\mathrm{cm}^2$.

167. Основа праве призме је једнакокраки трапез $ABCD$ са ивицама $AB = CD = 13\,\mathrm{cm}$, $BC = 4\,\mathrm{cm}$ и $AD = 14\,\mathrm{cm}$; површина пресека ACC_1A_1 је $150\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати површину призме и површину пресека AB_1C_1D.

168. Основа косе призме је једнакостранични троугао странице a. Дужина бочне ивице је b, а једна од бочних ивица образује са суседним ивицама основе углове од по $45°$. Колика је површина омотача те призме?

169. Права тространа призма чија је основа једнакостранични троугао странице a пресечена је равни која није паралелна основи. Бочне ивице тако добијене зарубљене призме имају мерне бројеве m, n и p. Одредити површину њеног омотача.

170. Коса призма пресечена је равни нормалном на бочне ивице. Ако је обим пресека p, а бочне ивице призме l, колика је површина омотача призме?

171. Ивица коцке је $a = 2\,\mathrm{cm}$. Сваку дијагоналу коцке продужимо са обе стране за по $1\,\mathrm{cm}$. Тако добијених осам тачака су темена нове коцке. Колика је њена запремина?

172. Израчунати запремину правог паралелепипеда, чија је основа паралелограм са страницама дужине $4a$ и a, и оштрим углом од 60°, а већа дијагонала паралелепипеда је дужине $5a$.

173. Основа праве призме је ромб, њен омотач је $360\,\mathrm{dm}^2$. Дијагонала бочне стране је $20{,}5\,\mathrm{dm}$, а растојање наспрамних бочних страна једнако је висини призме. Израчунати запремину призме.

174. Основа косе призме је паралелограм са страницама $3\,\mathrm{dm}$ и $6\,\mathrm{dm}$ и оштрим углом од 45°. Бочна ивица призме је $4\,\mathrm{dm}$ и са равни основе гради угао од 30°. Израчунати запремину призме.

175. Основа правог паралелепипеда је паралелограм са страницама $4\,\mathrm{cm}$ и $1\,\mathrm{cm}$ и оштрим углом 60°. Дужа дијагонала паралелепипеда је $5\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину тог паралелепипеда.

176. Четворострана призма има за основу квадрат. Један врх горње основе је једнако удаљен од свих врхова доње основе. Ако све ивице призме имају дужину $2\,\mathrm{cm}$, израчунати запремину те призме.

177. Површина основе праве тростране призме једнака је $4\,\mathrm{cm}^2$; површине бочних страна су $9\,\mathrm{cm}^2$, $10\,\mathrm{cm}^2$ и $17\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати запремину призме.

178. Основа праве призме је трапез. Површине паралелних бочних страна су S_1 и S_2, а њихово одстојање је d. Колика је запремина призме?

179. Основа правог паралелепипеда је ромб површине B. Површине дијагоналних пресека су S_1 и S_2. Израчунати запремину паралелепипеда.

180. Дијагонала правилне четворостране призме има дужину D, а са бочном страном призме заклапа угао α. Израчунати запремину те призме.

181. Дијагонале правог паралелепипеда су $9\,\mathrm{cm}$ и $\sqrt{33}\,\mathrm{cm}$. Обим основе је $18\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица $4\,\mathrm{cm}$. Одредити површину и запремину паралелепипеда.

182. Површине трију страна правоуглог паралелепипеда, које се састају у истом темену, односе се као $4 : 3 : 1$. Израчунати површину и запремину паралелепипеда ако је његова дијагонала $D = 78\,\mathrm{cm}$.

183. Дијагонала правоуглог паралелепипеда има дужину l и нагнута је према равни основе под углом α. Наћи површину омотача паралелепипеда ако је површина његове основе S.

184. Дата је коса четворострана призма чије су основе квадрати странице a, а једно теме горње основе налази се изнад центра доње основе на одстојању b од доње основе. Израчунати површину призме.

185. Стране паралелепипеда су подударни ромбови странице a и оштрог угла 60°. Наћи запремину паралелепипеда.

186. Основа косог паралелепипеда је ромб са оштрим углом од 60°, а једна бочна ивица гради са суседним ивицама основе углове од 45°. Израчунати запремину паралелепипеда ако су дужине свих његових ивица једнаке a.

187. Основа праве призме је једнакокраки троугао чија основица има дужину a, а угао при основици је α. Наћи запремину призме ако је површина њеног омотача једнака збиру површина њених основа.

188. Основа праве призме је правоугли троугао обима $2s$ са оштрим углом α. Израчунати површину омотача призме ако је познато да се у њу може уписати лопта.

189. Основа правог паралелепипеда је паралелограм са страницама a и b и оштрим углом α. Мања дијагонала паралелепипеда једнака је већој дијагонали основе. Израчунати запремину паралелепипеда.

190. Основа косог паралелепипеда је ромб $ABCD$ странице a и оштрог угла $\pi/3$. Ивица AA_1 такође је једнака a и са ивицама AB и AD чини угао од $\pi/4$. Одредити запремину паралелепипеда.

191. Основа квадра висине $5\,\text{cm}$ је правоугаоник обима $4\,\text{cm}$. Колике треба да буду основне ивице да би квадар имао максималну запремину?

192. Основа косе четворостране призме је квадрат $ABCD$ странице a. Бочна ивица AA_1 има дужину a. Управна пројекција тачке A_1 на основу је центар квадрата $ABCD$. Израчунати површину и запремину призме и наћи нагибни угао бочних ивица према равни основе.

193. Израчунати P и V праве призме висине $H = 4$, чија је основа троугао са елементима:

а) $a + c = 21$, $b = 15$ и $\alpha = 60^\circ$; б) $a = \sqrt{19}$, $b + c = 7$ и $\alpha = 60^\circ$.

2.3.2. Пирамида

Површина и запремина пирамиде:

$$P = B + M, \qquad V = \frac{1}{3}BH$$

(B – површина основе, M – површина омотача, H – висина пирамиде)

Правилна четворострана пирамида:

$$P = a(a + 2h_a), \qquad V = \frac{1}{3}a^2H$$

(a – ивица основе, h_a – висина бочне стране (апотема), H – висина пирамиде)

Правилна тространа пирамида (тетраедар):

$$P = \frac{a}{4}(a\sqrt{3} + 6h_a), \qquad V = \frac{1}{12}\,a^2H\sqrt{3}$$

Правилни тетраедар:

$$P = a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{1}{12}\,a^2\sqrt{3}, \quad H = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

(код правилног тетраедра све ивице су међусобно једнаке)

Правилна шестострана пирамида:

$$P = \frac{3}{2}a(a\sqrt{3} + 2h_a), \qquad V = \frac{1}{2}a^2H\sqrt{3}$$

194. Основа пирамиде је квадрат странице $a = 20\,\text{cm}$, а висина пирамиде ($h = 21\,\text{cm}$) има подножје у једном темену основе. Колика је површина пирамиде?

195. Основа пирамиде је квадрат око кога је описан круг полупречника $2\,\text{cm}$, а бочне стране су једнакостранични троуглови. Израчунати површину те пирамиде.

196. Израчунати површину правилне четворостране пирамиде чија је висина бочних страна $17\,\text{cm}$, а површина омотача је $544\,\text{cm}^2$.

197. Основа четворостране пирамиде је правоугаоник страница $18\,\text{cm}$ и $10\,\text{cm}$. Висина пирамиде је $12\,\text{cm}$, а подножје висине је пресек дијагонала основе. Израчунати површину пирамиде.

198. Колика је површина правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица $a = 6\,\text{cm}$, а висина $1\,\text{cm}$ краћа од висине бочне стране?

199. Површина омотача правилне четворостране пирамиде је $369\,\text{cm}^2$, а укупна површина пирамиде је $450\,\text{cm}^2$. Израчунати основну ивицу и висину пирамиде.

200. Израчунати површину правилне тростране пирамиде ако је ивица основе a, а угао диедра при основи једнак 60°.

201. Основа правилне тростране пирамиде има страницу $6\,\text{cm}$, а бочне стране са равни основе граде угао од 45°. Колика је запремина пирамиде?

202. Одредити запремину правилне тростране пирамиде, чија је основна ивица $a = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица $s = 5\,\mathrm{cm}$.

203. Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина $H = 15\,\mathrm{m}$ а површина дијагоналног пресека $P = 120\,\mathrm{m}^2$.

204. Основа пирамиде је квадрат. Једна бочна ивица је нормална на равни основе, а најдужа бочна ивица има дужину $8\,\mathrm{cm}$ и гради са равни основе угао од $45°$. Израчунати запремину пирамиде.

205. Одредити запремину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица дужине $a = 4$, а површина $P = 60\sqrt{3}$.

206. Одредити запремину правилне четворостране пирамиде којој је основна ивица a, а бочна ивица b.

207. Квадрат странице a представља мрежу тростране пирамиде. Колика је запремина те пирамиде?

208. Дата је ивица основе a и бочна ивица b правилне: а) тростране; б) шестостране пирамиде. Наћи њену запремину.

209. Бочна страна правилне четворостране пирамиде нагнута је према равни основе под углом од $60°$. Ако је основна ивица пирамиде a, наћи површину и запремину.

210. Основа пирамиде је правоугаоник чије су странице $a = 10\,\mathrm{cm}$ и $b = 18\,\mathrm{cm}$ а површина дијагоналног пресека $P_D = 12\sqrt{106}\,\mathrm{cm}^2$. Одредити површину и запремину пирамиде.

211. Основа пирамиде је правоугаоник обима $26\,\mathrm{m}$. Разлика основних ивица $a - b$ је $5\,\mathrm{m}$, а нагибни угао апотеме h_b према основи је $60°$. Одредити површину и запремину пирамиде ако је подножје висине пресек дијагонала основе.

212. Израчунати површину и запремину правилне тростране пирамиде чија је бочна ивица $s = 10\,\mathrm{cm}$, а површина омотача $M = 144\,\mathrm{cm}^2$.

213. Израчунати површину и запремину правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 6\,\mathrm{cm}$, а бочне ивице $b = 5\,\mathrm{cm}$.

214. Израчунати површину и запремину правилне шестостране пирамиде ако је основна ивица $a = 10\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица $b = 13\,\mathrm{cm}$.

215. Површина омотача правилне шестостране пирамиде је $M = 30\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, а површина читаве пирамиде је $P = 48\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Одредити запремину пирамиде.

216. Дијагонала квадрата, који је основа правилне четворостране пирамиде, једнака је њеној бочној ивици и дужина јој је $a\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину пирамиде.

217. Основа пирамиде је правоугли троугао са катетама $35\,\mathrm{cm}$ и $12\,\mathrm{cm}$, а све бочне стране нагнуте су према равни основе под углом од $60°$. Израчунати површину пирамиде.

218. Основа пирамиде је троугао са страницама $a = 13\,\mathrm{cm}$, $b = 14\,\mathrm{cm}$, $c = 15\,\mathrm{cm}$. Свака бочна страна пирамиде нагнута је под углом од $60°$ према равни основе. Израчунати површину пирамиде.

219. Површина омотача правилне тростране пирамиде и површина њене основе се односе као $\sqrt{3} : 1$. Одредити косинус угла под којим је страна пирамиде нагнута према основи.

220. Површина бочне стране правилне тростране пирамиде је пет пута већа од површине основе. Наћи угао који бочна ивица заклапа са равни основе.

221. Центар горње основе коцке и средишта ивица њене доње основе су темена пирамиде. Колика је површина омотача пирамиде ако је ивица коцке a?

222. Однос висина две правилне једнакоивичне тростране пирамиде је $1 : 2$, а ивица мање пирамиде је $a = \sqrt{6}$. Одредити површину веће пирамиде.

223. Правоугли троугао ABC са катетама $AC = 9\,\text{cm}$ и $BC = 12\,\text{cm}$ је основа пирамиде $SABC$ једнаких бочних ивица $SA = SB = SC = 19{,}5\,\text{cm}$. Израчунати запремину пирамиде $SABC$.

224. Основа пирамиде је једнакокраки троугао ABC чија је основица $BC = 8\,\text{cm}$ и крак $5\,\text{cm}$. Бочне ивице пирамиде су по $9\,\text{cm}$. Израчунати запремину пирамиде.

225. Површине две правилне четворостране пирамиде разликују се за $96\,\text{cm}^2$. Апотема једне је $15\,\text{cm}$, а друге $13\,\text{cm}$. За колико се разликују запремине, ако су им основе једнаке?

226. Наћи запремину четворостране пирамиде чија је основа правоугаоник, дијагонала основе d, угао између дијагонала основе α, чије бочне ивице заклапају угао β са основом и чије подножје висине се поклапа са центром основе.

227. Бочна ивица правилне тростране пирамиде има дужину l и гради са равни основе угао α. Наћи запремину пирамиде.

228. Основа пирамиде је правоугаоник чија је површина S и угао између дијагонала $60°$. Одредити запремину пирамиде ако су бочне ивице нагнуте према равни основе под углом од $45°$.

229. Основа пирамиде је једнакокраки трапез са паралелним страницама $a = 5\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$ и краком $c = 7\,\text{cm}$. Подножје висине пирамиде је у пресеку дијагонала основе, а дужа бочна ивица износи $10\,\text{cm}$. Наћи запремину пирамиде.

230. Свака од бочних ивица четворостране пирамиде образује са висином угао α. Основа пирамиде је правоугаоник са углом β између дијагонала. Ако је висина пирамиде H, наћи њену запремину.

231. Запремина правилне четворостране пирамиде је V, а нагибни угао бочне ивице α. Наћи основну ивицу и бочну ивицу.

232. Наћи углове диедра при основи правилне пирамиде ако је површина основе B, а површина омотача M.

233. Израчунати површину омотача пирамиде ако је површина њене основе Q, а углови диедара при основи су φ.

234. Основа и једна бочна страна тростране пирамиде су једнакостранични троуглови странице a и граде прав диедар. Израчунати површину омотача пирамиде.

235. Права тространа призма и тространа пирамида имају једнакостраничан троугао странице a за заједничку основу, с тим да се врх пирамиде поклапа са центром друге основе призме. Ако призма и пирамида имају једнаке површине омотача и једнаке висине H, израчунати H.

236. Израчунати површину омотача правилне десетостране пирамиде ако је полупречник круга описаног око основе R, а висина пирамиде је већа од полупречника за половину ивице основе.

237. Основа четворостране пирамиде је ромб чији је оштар угао α, а краћа дијагонала d. Наћи површину пирамиде ако све бочне стране те пирамиде заклапају исти угао β са основом.

238. У правилну тространу пирамиду уписана је правилна тространа призма чија горња основа је паралелни пресек пирамиде, а доња основа припада равни основе пирамиде. Основна ивица пирамиде је $a = 8\,\mathrm{cm}$ и висина $H = 10\,\mathrm{cm}$. Површина омотача призме је $M = 45\,\mathrm{cm}^2$. Одредити однос запремина призме и пирамиде.

239. Основа пирамиде је паралелограм чије су дужине страница $8\,\mathrm{cm}$ и $15\,\mathrm{cm}$, а угао између њих је $60°$. Висина пирамиде пролази кроз пресек дијагонала основе. Површина дијагоналног пресека који садржи мању дијагоналу основе једнака је $26\,\mathrm{cm}^2$. Наћи запремину пирамиде.

240. Угао између висине правилне тростране пирамиде и висине њене бочне стране је α, а дужина бочне ивице је l. Наћи запремину пирамиде.

241. Основа пирамиде је једнакокраки троугао чији је крак a, а угао при врху α. Све бочне ивице пирамиде су нагнуте на раван основе под углом β. Израчунати запремину пирамиде.

242. Бочне ивице тростране пирамиде имају исту дужину a, а међусобно граде два угла од по $45°$ и један од $60°$. Израчунати запремину пирамиде.

243. Наћи запремину правилне тростране пирамиде висине h ако су сви бочни углови при врху прави.

244. Основа праве призме је правоугли троугао са хипотенузом c и оштрим углом од $30°$. Кроз хипотенузу доње основе и теме правог угла горње основе постављена је раван која са равни основе гради угао од $45°$. Израчунати запремину тростране пирамиде коју раван одсеца од призме.

245. Ивица основе правилне тростране пирамиде је a, а висина спуштена из темена основе на наспрамну бочну страну једнака је b. Колика је запремина пирамиде?

246. Дат је квадрат $ABCD$ странице a, са центром у тачки O. Кроз наспрамна темена A и C квадрата повучене су полуправе AX и CY које стоје нормално на равни квадрата и то са исте стране равни. На AX узета је тачка M тако да је $OM = a$, а на CY тачка N тако да је $MN = 2a$.

а) Доказати да је MN нормално на равни DMB.

б) Израчунати запремине тетраедара $MABD$, $NCBD$ и $NMBD$.

247. Израчунати запремину правилне једнакоивичне петостране пирамиде ако је позната дужина ивице a.

2.3.3. Зарубљена пирамида

Површина и запремина зарубљене пирамиде:

$$P = B_1 + B_2 + M, \qquad V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2),$$

(B_1 и B_2 – површине основа, M – површина омотача, H – висина пирамиде)

248. Одредити просторну дијагоналу зарубљене правилне четворостране пирамиде ако су површине њених основа $B_1 = 8$, $B_2 = 2$ и запремина $V = 28$.

249. Површина правилне четворостране зарубљене пирамиде је $2048\,\mathrm{cm}^2$, а њене основне ивице су $22\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину пирамиде.

250. Површина омотача правилне четворостране зарубљене пирамиде је $1872\,\mathrm{cm}^2$, висине бочних страна $26\,\mathrm{cm}$, а ивица веће основе $28\,\mathrm{cm}$. Наћи површину и запремину пирамиде.

251. Израчунати површину и запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде ако су јој основне ивице $32\,\mathrm{cm}$ и $20\,\mathrm{cm}$, а висина $8\,\mathrm{cm}$.

252. Израчунати висину правилне четворостране зарубљене пирамиде чије су основне ивице a и b, а површина омотача једнака збиру површина основа.

253. Наћи површину и запремину правилне тростране зарубљене пирамиде чије су основне ивице $9\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица $5\,\mathrm{cm}$.

254. Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су $a = 18\,\mathrm{cm}$ и $b = 6\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица заклапа са равни веће основе угао од $60°$. Одредити запремину те пирамиде.

255. Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су a и b $(a > b)$, а бочне ивице заклапају са основом угао α. Наћи запремину те пирамиде.

256. Одредити запремину зарубљене правилне тростране пирамиде којој су основне ивице a и b, а бочна ивица c.

257. Нагиб бочне стране правилне тростране зарубљене пирамиде према основи је $60°$; страница те основе је a, а површина пирамиде је P. Израчунати страницу друге основе.

258. Запремина зарубљене пирамиде је $V = 1720\,\mathrm{m}^3$, а висина $H = 20\,\mathrm{m}$; коефицијент сличности ивица основа је $k = 5/8$. Наћи површине основа.

259. Одредити запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде ако је већа основна ивица a, мања основна ивица b, нагибни угао бочне стране према већој основи једнак $60°$.

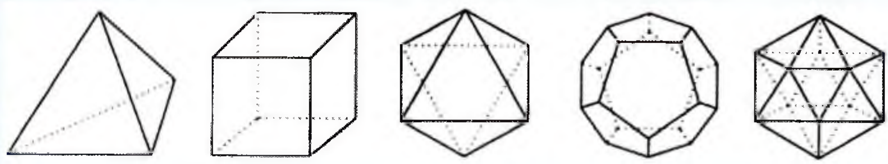
260. Шта је веће: запремина правилне четворостране зарубљене пирамиде основних ивица a и b и висине H или запремина правилне призме исте висине којој је основа средњи паралелни пресек пирамиде?

261. Основе зарубљене пирамиде су два правилна осмоугла, један ивице 0,4 m и други ивице 0,3 m; висина зарубљене пирамиде је 0,5 m. Колика је запремина одговарајуће потпуне пирамиде?

262. Из пирамиде дате основе B и висине H исече се један део двема равнима паралелним основи. Висина исеченог дела је h, а запремина v. На ком одстојању од основе је доњи пресек? ($B = 625\,\mathrm{m}^2$, $H = 50\,\mathrm{m}$, $v = 336\,\mathrm{m}^3$, $h = 12\,\mathrm{m}$).

263. Одредити запремину правилне дванаестостране зарубљене пирамиде ако су полупречници кругова описаних око основа R и r и ако су бочне ивице нагнуте под углом од 60° према равни основе.

2.4. Правилни полиедри



(а) (б) (в) (г) (д)

Назив	Темена	Ивица	Страна	Слика
Тетраедар	4	6	4	а
Коцка	8	12	6	б
Октаедар	6	12	8	в
Додекаедар	20	30	12	г
Икосаедар	12	30	20	д

264. Висина правилног тетраедра је $h = 2\sqrt{3}$. Колика је ивица тог тетраедра?

265. Правилан тетраедар $ABCD$ има ивице дужине 2 cm. Колика је удаљеност ивица AB и CD?

266. Одредити запремину правилног тетраедра чије ивице имају дужину a.

267. Ако је дата запремина V правилног тетраедра, наћи дужину ивице и његову површину.

268. Дијагонала коцке је d. Колика је ивица? Колики је угао између дијагонале и ивице?

269. Може ли се коцка пресећи равни тако да у пресеку буде: а) разнострани; б) једнакокраки; в) једнакостранични; г) правоугли троугао?

270. Одредити површину и запремину правилног октаедра ивице a.

271. Центри страна тетраедра су темена новог тетраедра. Наћи однос површина и однос запремина ових тетраедара.

272. Израчунати углове диедара правилног тетраедра.

273. У коцку је уписан тетраедар тако да су му ивице дијагонале страна коцке. Израчунати однос запремине коцке и запремине тетраедра.

274. Четири темена коцке од којих ниједан пар не припада истој ивици одређују правилни тетраедар. Колика је површина тог тетраедра ако је дужина ивице коцке једнака 2?

275. Шест средишта ивица коцке су темена правилног шестоугла. Ако је дужина ивице коцке a, колика је површина тог шестоугла?

276. Дата је коцка ивице a. Израчунати одстојање једног темена од дијагонале која не пролази кроз то теме.

277. Израчунати запремину правилног октаедра који има површину једнаку са правилним тетраедром чија запремина износи $9\,\mathrm{cm}^3$.

278. Израчунати углове диедра правилног октаедра.

279. Центри шест страна коцке темена су правилног октаедра. Ако је ивица коцке $3\,\mathrm{cm}$, одредити запремину октаедра.

280. Наћи однос ивица правилног тетраедра и правилног октаедра ако имају једнаке површине.

281. Израчунати запремину правилног тетраедра уписаног у сферу полупречника r.

282. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Израчунати однос запремина тетраедра ACB_1D_1 и квадра.

283. Ивица правилног тетраедра има дужину a. Израчунати површину пресека тетраедра са равни која садржи ивицу тетраедра и која наспрамну ивицу дели у односу $2:1$.

284. Ивица правилног октаедра је a. Колико је одстојање његових наспрамних страна?

285. У правилан октаедар уписана је коцка тако да се њена темена налазе у тежиштима страна октаедра. Наћи однос запремина коцке и октаедра.

286. Површина правилног додекаедра је $P = 1{,}2\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати његову ивицу.

287. Доказати да:

а) центри страна правилног додекаедра представљају темена неког правилног икосаедра;

б) центри страна правилног икосаедра представљају темена неког правилног додекаедра.

2.5. Додатак уз главу II

288. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нека је M средиште ивице A_1B_1, а N центар квадрата ABB_1A_1. Израчунати угао између (мимоилазних) правих MD и NC.

289. У тетраедру $SABC$ ивице SA, SB и SC су узајамно нормалне, $SA = 3$, $SB = SC = \sqrt{3}$. Тачка M се налази у равни SAB и једнако је удаљена од правих AB, SB и SC. Тачка N се налази у равни SBC и једнако је удаљена од истих правих. Израчунати MN.

290. Доказати да се дужи које спајају темена са тежиштем супротне стране тетраедра секу у једној тачки која их дели у односу $3 : 1$.

291. Кроз ивицу AC правилног тетраедра $SABC$ постављена је раван која сече ивицу SB у тачки D, тако да је однос запремина тетраедара $ABCD$ и $SADC$ једнак $1 : 3$. Израчунати угао који та раван гради са равни ABC.

292. Дат је једнакостранични троугао ABC странице a. Над његовим страницама, као хипотенузама, конструисани су једнакокраки правоугли троуглови APB, BQC, CRA тако да су равни ових троуглова нормалне на равни троугла ABC.

а) Израчунати површину и запремину полиедра $ABCPQR$.

б) Посматрани полиедар пресечен је једном равни која је паралелна са равни троугла ABC, а на одстојању d од ње. Који се полигон добија у том пресеку и колика је површина тог полигона?

293. Из средишта O висине SE четворостране пирамиде којој је S врх, основа квадрат и E подножје висине које се поклапа са центром основе, спуштене су нормале OM на бочну ивицу и OK на бочну страну пирамиде. Ако су дужине тих нормала $OM = p$ и $OK = q$, израчунати запремину те пирамиде.

294. Раван сече бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама A, B, C, D које се налазе, редом, на удаљености a, b, c, d од врха пирамиде. Доказати да важи $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$.

295. Растојање између сваке две бочне ивице косе тростране призме је a, а бочна ивица, чија дужина је l, нагнута је према равни основе под углом од 60°. Израчунати површину призме.

296. Дијагонале правог паралелепипеда су $D_1 = 10\,\mathrm{cm}$ и $D_2 = 2\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$, обим његове основе је $2s = 18\,\mathrm{cm}$, а бочна ивица је $l = 5\,\mathrm{cm}$. Наћи површину и запремину паралелепипеда.

297. Висина правилне четворостране зарубљене пирамиде је H, а бочна ивица и дијагонала бочне стране су нагнуте на раван основе под углом од, редом, 60° и 30°. Колика је површина омотача те зарубљене пирамиде?

298. Основа пирамиде је квадрат. Нагибни углови бочних страна пирамиде према основи односе се редом као $1 : 2 : 4 : 2$. Одредити те углове.

299. Основа пирамиде је правоугаоник површине S, две бочне стране су нагнуте према основи под угловима α и β, а друге две бочне стране су нормалне на основу. Изразити запремину пирамиде помоћу S, α и β.

300. Основа пирамиде је правоугаоник, две бочне стране нормалне су на раван основе, а друге две образују са њом углове α и β. Израчунати запремину пирамиде ако је њена висина H.

301. Бочне ивице пирамиде су једнаке. Доказати да је основа пирамиде тетивни многоугао (тј. да се око основе може описати круг.)

302. Основа пирамиде је тангентни многоугао описан око круга полупречника r. Обим многоугла је $2s$, а бочне стране пирамиде нагнуте су према равни основе под углом α. Може ли се израчунати површина те пирамиде? А запремина?

303. Бочне стране тростране пирамиде су узајамно нормалне. Две од њих имају површине S_1 и S_2, а њихова заједничка ивица дужину a. Колика је запремина пирамиде?

304. Од праве тростране призме висине H $(H > 2)$ чије су основе једнакостранични троуглови странице a одсечен је један део са равни која пролази кроз једно теме доње основе тако да од једне од преосталих двеју бочних ивица одсеца дуж дужине 1, а од друге 2 (мерено од те основе). Израчунати површину омотача и запремину оног дела те призме који садржи њену горњу основу.

305. Дата је правилна тространа пирамида и правилна тространа призма. Темена основе призме су средишта ивица основе пирамиде, а висина пирамиде је три пута мања од висине призме. Који део запремине призме се налази ван пирамиде?

306. Ивица основе правилне тростране призме је мања од бочне ивице и има дужину a. Кроз ивицу горње основе постављена је раван под углом од 45° према равни основе. Наћи површину и запремину дела призме изнад равни.

307. У тетраедру $DABC$ страна BDC је нормална на страну ABC, $DB = DC = a$, а ивични углови у темену D су сви једнаки 60°. Одредити запремину тетраедра.

308. Одредити запремину тростране пирамиде чије стране имају површине S_0, S_1, S_2, S_3, а диедри уз страну са површином S_0 су једнаки.

309. Унутар произвољног тетраедра $ABCD$ дата је произвољна тачка O. Доказати да је збир углова под којима се из O виде поједине ивице тог таетраедра већи од 3π.

310. У дати тетраедар уписан је други тетраедар чија су темена тежишта страна датог тетраедра. Наћи однос запремина тих тетраедара.

311. Ортогонална пројекција врха тростране пирамиде на раван основе је тежиште основе. Кроз средиште висине конструисане су четири равни паралелне основи и бочним странама пирамиде. Површине пресека ових равни са пирамидом су S_1, S_2, S_3, S_4. Израчунати површину пирамиде.

312. Око сваке стране тетраедра $ABCD$ описан је круг. Доказати: ако сва четири круга имају подударне полупречнике, онда су све четири стране подударни троуглови.

313. Дат је правилни тетраедар $ABCD$. Тачке M, N, P и Q припадају редом ивицама AD, AC, BD и BC, тако да је $AM : AD = AN : AC = BP : BD = BQ : BC = k$. Одредити однос запремина V_{ABMNPQ} и V_{ABCD}.

314. Дат је тетраедар $ABCD$. Нека бисекторна раван диедра код ивице AB сече ивицу CD у тачки M. Доказати да је $MC : MD = P_{ABC} : P_{ABD}$.

315. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са бочним ивицама AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Нека је P средиште ивице BC, а Q центар квадрата CC_1D_1D. У ком односу раван APQ дели запремину коцке?

316. Пирамида чија је основа правоугаоник са страницама a и b, једнаких бочних ивица l, пресечена је једном равни паралелно основи на два дела једнаких запремина. Одредити растојање врха пирамиде од равни пресека.

Глава III

ОБРТНА ТЕЛА

3.1. Ваљак, купа и зарубљена купа

Ваљак:

$$M = 2\pi RH, \quad P = 2\pi R(R + H), \quad V = \pi R^2 H$$

(M површина омотача, P површина ваљка, V запремина, R полупречник основе, H висина).

Купа:

$$M = \pi Rs, \quad P = \pi R(R + s), \quad V = \frac{\pi}{3} R^2 H$$

(M површина омотача, P површина купе, V запремина, R полупречник основе, H висина, $s = \sqrt{H^2 + R^2}$ изводница).

Зарубљена купа:

$$M = \pi(R + r)s, \quad P = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)), \quad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

(M површина омотача, P површина зарубљене купе, V запремина, R и r полупречници основа, H висина, $s = \sqrt{H^2 + (R - r)^2}$ изводница зарубљене купе).

3.1.1. Ваљак

317. Одредити висину правог кружног ваљка полупречника основе $10\,\mathrm{cm}$ ако је површина осног пресека једнака површини основе.

318. За колико се мора повећати висина правог кружног ваљка, тако да површина омотача новог ваљка буде једнака површини датог ваљка.

319. Пречник основе ваљка је двоструко увећан, а његова висина је смањена за половину. Како се мења површина омотача, а како запремина ваљка?

320. Обим основе ваљка је $12\pi\,\mathrm{cm}$, а висина $H = 1.6\,\mathrm{dm}$. Израчунати површину и запремину овог ваљка.

321. Краћа страница правоугаоника је $5\,\mathrm{cm}$, а дијагонала $13\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину тела које настаје обртањем правоугаоника око његове дуже странице.

322. Наћи запремину ваљка површине $180\pi\,\mathrm{cm}^2$ ако је разлика висине и полупречника основе $3\,\mathrm{cm}$.

323. У правилну четворострану призму уписан је кружни ваљак. Одредити запремину ваљка ако је запремина призме $128\,\mathrm{cm}^3$.

324. Наћи површину и запремину ваљка ако је збир дужина пречника и висине ваљка $27\,\mathrm{cm}$, а површина осног пресека $180\,\mathrm{cm}^2$.

325. Одредити полупречник r основе и висину H правог кружног ваљка коме је осни пресек квадрат, а запремина $V = 54\pi$.

326. Осни пресек ваљка је квадрат површине Q. Наћи површину ваљка.

327. Осни пресек косог ваљка је ромб странице $8\,\mathrm{cm}$ и чији је оштар угао $\alpha = 60^\circ$. Израчунати запремину ваљка.

328. Нека је површина правог ваљка $P = 112\pi$ и однос полупречника према висини $r : H = 2 : 5$. Израчунати површину омотача и запремину ваљка.

329. У тространу призму чије су основне ивице $a = 13\,\mathrm{cm}$, $b = 14\,\mathrm{cm}$ и $c = 15\,\mathrm{cm}$, уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина та два ваљка.

330. У ваљак је уписана правилна тространа призма, а у призму је уписан ваљак. Наћи однос запремина тих ваљака.

331. Правилна тространа призма уписана је у ваљак. Полупречник основе ваљка је $r = 6\,\mathrm{cm}$, а дијагонала осног пресека ваљка је $d = 13\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину призме.

332. У праву призму која за основу има једнакокраки трапез површине $50\,\mathrm{cm}^2$, са оштрим углом од 30°, уписан је ваљак. Наћи површину и запремину ваљка чија је висина једнака краку трапеза.

333. Дата су два ваљка. Полупречник основе првог ваљка једнак је висини другог, а полупречник основе другог ваљка једнак је висини првог. Наћи површину и запремину тих ваљака ако је збир њихових површина $S = 50\pi\,\mathrm{cm}^2$, а збир њихових запремина $V = 30\pi\,\mathrm{cm}^3$.

334. Прав ваљак чија је висина $H = 20\,\mathrm{cm}$ пресечен је равни која је паралелна његовој оси на растојању $4\,\mathrm{cm}$ од осе. Та раван одсеца од основа кружне одсечке чији су лукови 60°. Наћи површину пресека.

335. Чаша у облику правог ваљка полупречника основе $1\,\mathrm{cm}$ и висине $10\,\mathrm{cm}$ напуњена је водом. Ако се чаша нагне за 45°, колико воде се пролије из ње?

336. Од правог ваљка (r, H) исечена је највећа правилна тространа призма. Колика је запремина одбаченог дела?

337. Раван садржи центар једне основе ваљка, а другу основу сече по тетиви дужине b којој одговара централни угао β. Израчунати запремину ваљка ако је та раван нагнута према равни основе под углом α.

338. У правилни тетраедар ивице a уписан је једнакостранични ваљак ($2r = H$) тако да се оса ваљка поклапа са висином тетраедра, једна основа ваљка је у равни основе тетраедра, а друга додирује све три његове стране. Наћи површину и запремину ваљка.

339. У правилну четворострану призму запремине $128\,\mathrm{cm}^3$ и дијагонале дужине $4\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ уписан је кружни ваљак. Наћи висину и полупречник основе ваљка.

340. Наћи површину правог ваљка ако је однос висине и пречника основе $m : n$, а запремина V.

341. Кроз тангенту једне основе ваљка постављена је раван која заклапа са равни основе угао од 60° и дели омотач ваљка на два једнака дела. Површина ваљка је $2\pi(1 + 2\sqrt{3})$. Израчунати запремину ваљка.

342. У ваљак је уписана правилна шестострана призма. Наћи угао између дијагонале бочне стране призме и осе ваљка ако је полупречник основе једнак висини ваљка.

3.1.2. Купа

343. Однос полупречника основе и висине купе је $3 : 4$. Ако је површина омотача купе $M = 60\pi\,\mathrm{cm}^2$, израчунати запремину купе.

344. Омотач купе је четвртина круга полупречника $4\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину купе.

345. Обим основе праве кружне купе износи $18\pi\,\mathrm{cm}$. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом од 45°. Израчунати површину и запремину купе.

346. Правоугли троугао чије су катете дужине 15 и 20 ротира око своје хипотенузе. Наћи запремину добијеног тела.

347. Одредити запремину праве кружне купе којој је осни пресек једнакостранични троугао, а полупречник основе r.

348. Запремина купе је $\dfrac{8}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$. Израчунати висину купе ако је површина омотача три пута већа од површине њене основе.

349. Површина праве купе је $P = 24\pi$, а површина њеног омотача $M = 15\pi$. Наћи запремину купе.

350. Израчунати површину и запремину купе ако је њена изводница дужине $20\,\mathrm{cm}$, а угао који она заклапа са основом 30°.

351. Ромб странице a и оштрог угла од 60° обрће се, редом, око краће и око дуже дијагонале. Наћи разлику запремина тако насталих двају тела.

352. Купа је пресечена равни, паралелно основи, на одстојању d од врха. Наћи површину пресека ако је полупречник основе R, а висина H.

353. Изводница купе је l. Наћи површину пресека купе и равни одређене двема изводницама које граде угао α.

354. Површина омотача праве кружне купе је S. Када се тај омотач развије, централни угао одговарајућег кружног исечка износи 36°. Одредити полупречник R основе те купе.

355. Права кружна купа је описана око правилне четворостране пирамиде. Висина пирамиде је $7\,\mathrm{cm}$, а запремина $70\,\mathrm{cm}^3$. Израчунати изводницу купе.

356. Када се омотач купе развије у равни, добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину те купе.

357. Површина правилне једнакоивичне шестостране призме је $6+3\sqrt{3}$. Израчунати запремину купе чија је основа уписана у основи призме, а врх је у средишту висине призме.

358. Ромб површине S ротира око једне своје странице. Колика је површина тако насталог тела?

359. Висина купе једнака је пречнику њене основе. Наћи однос површина њене основе и омотача.

360. У праву купу уписане су правилна тространа и правилна шестострана пирамида. Израчунати однос њихових запремина.

361. Одредити површину тела које настаје обртањем правоуглог троугла око хипотенузе ако његове катете имају дужине a и b.

362. Трапез основица a и b и висине h обрће се око странице a. Наћи запремину обртног тела.

363. Полупречник основе праве купе је $6\,\mathrm{cm}$, а висина $18\,\mathrm{cm}$. У купу је наточена вода до половине њене висине. До које висине би досезала вода ако се купа окрене наопако?

364. Основа пирамиде је ромб са дијагоналама дужине $10\,\mathrm{cm}$ и $24\,\mathrm{cm}$, а висина пирамиде је дужине $15\,\mathrm{cm}$. У ову пирамиду уписана је купа. Одредити разлику запремина пирамиде и купе.

365. Највећи угао између две изводнице купе је 120°. Показати да је површина омотача купе једнака површини омотача ваљка који има исту основу и висину као и купа.

366. Површина омотача купе је два пута већа од површине њене основе. Израчунати централни угао кружног исечка омотача купе у развијеном облику.

367. Површина омотача купе је два пута већа од површине основе. Наћи запремину купе ако је површина њеног осног пресека једнака Q.

368. Одредити запремину праве купе ако њен омотач развијен у равни чини кружни исечак са централним углом од 120° и полупречником s.

369. Колики је однос површина равностране купе и равностраног ваљка ако су им запремине једнаке?

370. Како се међу собом односе запремине равностране купе и равностраног ваљка ако су им површине једнаке?

371. Осни пресек купе је правоугли троугао. У купу је уписан ваљак коме је пречник основе једнак његовој висини. Колики је однос запремина ваљка и купе?

372. Укупна површина праве купе је πS, а омотач, када се развије у равни, представља кружни исечак са углом од 60°. Израчунати запремину купе.

373. Кружни исечак са централним углом φ савије се у омотач праве купе. Колики је угао на врху осног пресека купе?

374. Једнакостранични троугао странице a подељен је правом l која садржи тежиште троугла на један троугао и један трапез. Израчунати површине и запремине тела која настају ротацијом троугла, односно трапеза, око праве l.

375. Правоугли троугао одређен катетом $a = 5$ и углом $\beta = 60^\circ$ ротира око хипотенузе. Колике су површина и запремина ротационог тела?

376. У купу је уписана правилна тространа пирамида чија је бочна ивица нагнута под углом α ка равни основе. Колика је запремина купе ако је основна ивица пирамиде a?

377. Правоугли троугао са катетама a и b ротира око праве која садржи теме правог угла и паралелна је хипотенузи. Израчунати површину и запремину тако насталог тела.

378. У купу којој је полупречник основе r, а угао између изводнице и висине 60° уписан је ваљак, тако да је површина његовог омотача четири пута мања од површине омотача купе. Колико пута је запремина ваљка мања од запремине купе?

379. Ако троугао чије су странице a, b и c ротира око сваке странице, тада су запремине добијених тела обрнуто пропорционалне одговарајућим страницама. Доказати.

380. Ако су V_a, V_b и V_c запремине тела која се добијају ротацијом правоуглог троугла око катета a и b и хипотенузе c, доказати да је $1/V_c^2 = 1/V_a^2 + 1/V_b^2$.

381. Осовински пресек праве купе полупречника основе r је једнакостранични троугао. На ком одстојању од врха треба поставити раван паралелну основи купе која полови њену запремину?

382. Висина купе је 20, полупречник основе је 25. Раван садржи врх купе, а налази се на одстојању 12 од центра основе купе. Наћи површину пресека равни и купе.

383. Омотач праве купе равијен у равни је кружни исечак полупречника a са централним углом φ радијана. Израчунати полупречник основе, висину, површину и запремину купе.

384. У дату праву купу полупречника основе r и висине $H = r\sqrt{2}$ уписана је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тако да основа $ABCD$ припада основи, а темена A_1, B_1, C_1 и D_1 припадају омотачу купе. Израчунати однос запремина купе и коцке.

385. а) У дату праву купу чији је полупречник основе r и висина h уписати коцку и израчунати њену ивицу.

б) Како се односи запремина равностране купе према запремини у њој уписане коцке?

386. Полупречник основе праве купе је R, а површина омотача једнака је збиру површина основе и осног пресека. Наћи запремину купе.

387. Висина купе је h, а две узајамно нормалне изводнице деле омотач купе у односу $1 : 2$. Израчунати запремину купе.

388. Трапез ротира око веће основице a, а затим око мање основице b. Однос запремина тако насталих обртних тела је $m : n$. Израчунати $a : b$.

389. Једнакокраки троугао чији је крак b, а угао између кракова α ротира око тангенте круга описаног око троугла која је паралелна висини основице. Наћи запремину ротационог тела.

3.1.3. Зарубљена купа

390. Права кружна купа висине h пресечена је равни паралелном основи тако да је површина пресека једнака половини површине основе. Колика је удаљеност врха купе од пресечне равни?

391. Одредити површину праве кружне зарубљене купе ако су полупречници њених основа $r_1 = 8$ и $r_2 = 3$, а висина $H = 12$.

392. Одредити запремину зарубљене праве кружне купе којој су полупречници основа $r_1 = 7$ и $r_2 = 4$, а изводница $s = 5$.

393. Израчунати запремину праве зарубљене купе ако су површине њених основа $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ и $4\pi\,\mathrm{cm}^2$ и површина омотача $35\pi\,\mathrm{cm}^2$.

394. Површина праве кружне зарубљене купе једнака је $616\pi\,\mathrm{cm}^2$, полупречници основа разликују се за $6\,\mathrm{cm}$, а изводница је $10\,\mathrm{cm}$. Наћи запремину купе.

395. Израчунати запремину праве зарубљене купе ако је површина омотача једнака збиру површина основа, чији су полупречници $R = 6\,\mathrm{cm}$, $r = 3\,\mathrm{cm}$.

396. Изводница праве зарубљене купе је $s = 5\,\mathrm{cm}$, а полупречници основа су $r = 5\,\mathrm{cm}$ и $r_1 = 2\,\mathrm{cm}$. У купу је уписана правилна зарубљена четворострана пирамида. Наћи запремину пирамиде.

397. Правоугли трапез основица $a = 10\,\mathrm{cm}$ и $b = 2\,\mathrm{cm}$ ротира око мањег крака. Израчунати површину и запремину насталог тела ако је висина трапеза $h = 15\,\mathrm{cm}$.

398. Израчунати површину омотача праве зарубљене купе ако њена изводница гради угао од 60° са равни основе, а осни пресек има површину Q.

399. Израчунати запремину косе зарубљене купе код које је најдужа изводница $80\,\mathrm{cm}$, најкраћа $60\,\mathrm{cm}$, а полупречници основа су $20\,\mathrm{cm}$ и $6\,\mathrm{cm}$.

400. Квадрат странице $a = 18\,\mathrm{cm}$ обрће се око праве која се налази у равни квадрата, пролази кроз једно његово теме и паралелна је са дијагоналом која не пролази кроз то теме. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

401. Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом правоуглог троугла чије су катете a и b око праве која садржи теме правог угла, а са катетама гради углове од по 45° (тј. око симетрале спољашњег угла правог угла троугла).

402. Једнакостранични троугао ротира око праве која садржи једно теме троугла и паралелна је

а) наспрамној страници;
б) висини из другог темена троугла.

Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела ако је позната страница троугла a.

403. Висина купе подељена је на три једнака дела равнима паралелним са равни основе. Наћи запремину средњег дела купе ако је запремина целе купе V.

404. Полупречник основе купе је $6\,\mathrm{dm}$, а висина је $18\,\mathrm{dm}$. У купу је насута вода која досеже до половине висине купе. Докле ће досезати ако се купа окрене врхом наниже?

405. Дијагонале трапеза су нормалне на његове краке. Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом трапеза око једног крака ако су основице трапеза $3\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$.

406. Ромб чије су дијагонале $7\,\mathrm{cm}$ и $24\,\mathrm{cm}$ ротира око висине која пролази кроз центар ромба. Израчунати површину и запремину тако насталог тела.

407. Права кружна купа пресечена је, паралелно основи, равни која је дели на два дела која имају уједно једнаке површине и запремине. Колики је угао при врху осног пресека?

408. Израчунати површину једнакокраког трапеза ако су му дијагонале узајамно ортогоналне, крак једнак s и угао између веће основице и крака једнак α. Израчунати запремину зарубљене купе која настаје обртањем тог трапеза око његове осе симетрије.

409. Над кругом полупречника R постављени су на истој страни усправни ваљак и усправна купа. Ова два тела имају једнаке површине и једнаке запремине. Израчунати запремину оног дела купе који лежи унутар ваљка.

410. Једнакокраки трапез има један угао од 60°, дијагонале су му нормалне, а висина једнака h. Наћи површину и запремину тела које настаје ротацијом трапеза око праве која садржи једно теме на већој основици и паралелна је дијагонали трапеза која не садржи то теме.

411. Полупречници основа зарубљене купе су R и r. Изводница је нагнута према равни основе под углом α. Израчунати површину омотача и запремину купе.

412. Полупречник једне основе зарубљене купе два пута је већи од полупречника друге основе, површина омотача једнака је збиру површина основа, а површина осног пресека је Q. Израчунати запремину зарубљене купе.

413. Једнакостранична купа пресечена је равни паралелно основи. Површина омотача одсечене купе је четири пута мања од површине омотача целе купе. Наћи однос површине омотача настале зарубљене купе и збира површина њених основа.

3.2. Лопта

Површина лопте:

$$P = 4\pi R^2$$

(R полупречник лопте).

Површина калоте и појаса:

$$P = 2\pi Rh$$

(R полупречник лопте, h висина калоте, односно појаса).

Запремина лопте:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(R полупречник лопте).

3.2.1. Лопта, лопта и раван

414. Две једнаке лопте полупречника R су постављене тако да центар једне припада површини друге. Наћи дужину линије по којој се лопте секу.

415. Раван садржи крајњу тачку полупречника лопте (дужине R) и гради са њим угао од 60°. Наћи површину пресека лопте и равни.

416. Раван садржи средиште полупречника лопте и нормална је на тај полупречник. У ком односу су површина тако добијеног пресека и површина великог круга лопте?

417. Лопта полупречника R додирује све странице једнакостраничног троугла странице a. Наћи одстојање центра лопте од равни троугла.

418. Лопта са центром у врху купе која додирује основу купе дели омотач купе на два дела једнаких површина. Колики је угао између висине и изводнице купе?

419. У сферу полупречника R уписан је ваљак максималне запремине. Доказати да је $r : R = \sqrt{2} : \sqrt{3}$, где је r полупречник основе ваљка.

420. Странице троугла ABC су a, b, c. Наћи полупречнике сфера које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и које се додирују међусобно.

421. Дате су сфера S и раван α који немају заједничких тачака. За сваку тачку P равни α конструисана је сфера са центром P и полупречником једнаким тапгенти из P на S. Доказати да све конструисане сфере имају заједничку тачку.

422. Центар основе праве купе чији је полупречник основе r и висина h је врх друге праве купе чије изводнице су нормалне на одговарајућим изводницама прве купе. Израчунати полупречник лопте која изнутра додирује оба омотача.

423. Свака од четири кугле које леже на равном столу (и додирују сто) додирује остале три кугле. Три кугле имају полупречник R. Колики је полупречник четврте кугле?

424. На дну коцкасте кутије ивице a смештене су четири сфере пречника $a/2$. Колики је пречник пете сфере која додирује прве четири сфере и поклопац?

425. На раван P положене су четири лопте истог полупречника r тако да се додирују, при чему центри ових лопти образују квадрат. На ове лопте спуштена је пета лопта истог полупречника која додирује све четири лопте. Одредити растојање од равни P оне тачке пете лопте која је највише удаљена од равни P.

426. Раван додирују четири лопте: две полупречника r и две полупречника x, тако да свака лопта додирује преостале три. Израчунати x.

3.2.2. Површина лопте, сферне калоте и појаса

427. Лопта је уписана у коцки ивице a. Колико је пута површина коцке већа од површине лопте?

428. Сфера је пресечена са две паралелне равни чије је међусобно одстојање $3\,\text{cm}$ и налазе се са исте стране центра сфере. Те равни секу сферу по круговима полупречника $9\,\text{cm}$ и $12\,\text{cm}$. Израчунати површину сфере.

429. Израчунати површину појаса лопте полупречника $R = 65\,\text{cm}$ ако су полупречници граничних кругова појаса $r_1 = 33\,\text{cm}$ и $r_2 = 25\,\text{cm}$.

430. Висина зоне је $7\,\text{cm}$, а полупречници основа $16\,\text{cm}$ и $33\,\text{cm}$. Израчунати површину зоне.

431. Полукруг је подељен на три једнака кружна лука. Обртањем полукруга око пречника настају три површи. Шта је веће, површина настала ротацијом средњег лука, или збир површина насталих ротацијом два крајња лука?

432. Тачкасти извор светлости удаљен је $4\,\text{m}$ од центра лопте полупречника $2\,\text{m}$. Колика је површина осветљеног дела лопте?

433. На којој удаљености од центра непрозирне лопте полупречника $4\,\text{cm}$ треба поставити сијалицу да би она осветлила $1/3$ површине лопте?

434. Дата је сфера полупречника r. Удаљеност тачке M од центра O те сфере износи $OM = c$, где је $c > r$. Израчунати површину оног дела сфере који се види из тачке M.

435. Доказати да је површина лопте полупречника a мања од површине омотача зарубљене праве кружне купе описане око те лопте.

3.2.3. Запремина лопте

436. Металну шупљу лопту чији је спољашњи пречник $2r = 18\,\text{cm}$, а дебљина $d = 2\,\text{cm}$, треба претопити у масивну лопту. Наћи њен пречник.

437. У праву купу полупречника основе $r = 5\,\text{cm}$ и висине $h = 12\,\text{cm}$ уписана је лопта. Наћи запремину лопте.

438. Ако се полупречник сфере повећа за $1\,\mathrm{cm}$, њена површина се повећа за $8\pi\,\mathrm{cm}^2$. За колико се при томе повећа запремина сфере?

439. Око круга су описани квадрат и једнакостранични троугао. Те три фигуре ротирају око праве која садржи центар круга, а нормална је на основицама квадрата и троугла; тако настају лопта, ваљак и купа.

а) У којој размери се налазе површине омотача купе, омотача ваљка и површина лопте?

б) У којој размери се налазе површине та три тела?

в) Како се односе запремине та три тела?

440. У круг је уписан квадрат и једнакостранични троугао тако да је једна страница троугла паралелна страници квадрата. Обртањем ове слике око њене осе симетрије настају лопта, ваљак и купа. Наћи однос површина и однос запремина ових тела.

441. У полулопти је уписана права кружна купа чији је полупречник основе једнак висини. Који је део запремина купе од запремине полулопте?

442. Нека је $ABCD$ правилни тетраедар ивице a. Ако је $k(O,R)$ описана, а $k(O,r)$ уписана сфера датог тетраедра, наћи однос $R:r$.

443. Права купа постављена је на врх; њена висина је $H = 16\,\mathrm{cm}$, а полупречник основе је $R = 6\,\mathrm{cm}$ и напуњена је водом до висине $h = 12\,\mathrm{cm}$. У њу се потопи лопта полупречника $r = 3\,\mathrm{cm}$. До које висине се дигне ниво воде?

444. Дата је лопта полупречника R. Одредити полупречник r $(r < R)$ лопте концентричне са датом лоптом, чија је запремина геометријска средина запремина дате лопте и оног дела дате лопте који се налази ван лопте полупречника r.

445. Дуж AB је пречник полукруга са центром O. Унутар тог полукруга конструисани су полукругови над пречницима AO и OB. Наћи површину и запремину тела које настаје обртањем површи између та три полукруга, око AB, ако је $AB = 20\,\mathrm{cm}$.

446. Посуда облика једнакостраничног ваљка који има пречник $10\,\mathrm{cm}$ испуњена је водом до $11/12$ висине. Колики је полупречник највеће лопте која се може потопити у воду, а да не дође до преливања?

3.2.4. Уписана и описана лопта полиедара и обртних тела

447. Бочна ивица правилне тростране призме је $b = 4\,\mathrm{m}$, а основна ивица је $a = 3\,\mathrm{m}$. Наћи полупречник лопте описане око те призме.

448. Висина правилне четворостране призме је $2\,\mathrm{cm}$, а основна ивица је $4\,\mathrm{cm}$. Одредити полупречник лопте описане око призме.

449. Правилна четворострана пирамида има све ивице дужине $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Иpачунати полупречник уписане сфере.

450. У правилну тространу призму уписана је лопта која додирује све стране призме. Колики је однос површине лопте и површине призме?

451. У правилној тространој призми основне ивице a уписана је лопта. Израчунати површину и запремину оба тела.

452. Основна ивица правилне четворостране пирамиде је a, бочна ивица је $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Израчунати запремину пирамиде и полупречник лопте која је око ње описана.

453. Висина правилне тростране зарубљене пирамиде је 22 cm, а полупречници кругова описаних око основа су 20 cm и 24 cm. Израчунати полупречник описане лопте.

454. Прав кружни ваљак описан је око лопте. Одредити однос површина и однос запремина тих тела.

455. У лопти површине $\pi\,\mathrm{m}^2$ уписан је ваљак чији осни пресек има површину $48\,\mathrm{dm}^2$. Одредити површину и запремину ваљка.

456. Омотач зарубљене купе једнак је површини круга чији је полупречник изводница купе. Доказати да се у зарубљеној купи може уписати лопта.

457. Око лопте полупречника r описана је права кружна купа висине $4r$. Наћи однос запремина лопте и купе.

458. Око праве купе којој је изводница једнака пречнику основе описана је лопта. Колики је однос површина купе и лопте?

459. Одредити површину праве кружне купе која је описана око лопте пречника $2r$ и чија је висина два пута већа од пречника лопте.

460. Око лопте је описан ваљак, а око тог ваљка је описана лопта. Колики је однос површина ваљка и њему описане лопте?

461. У лопти датог полупречника R уписана је права кружна купа; центар лопте налази се у унутрашњости купе и удаљен је за d од основе купе. Наћи површину купе.

462. Око лопте су описани једнакостранични ваљак и једнакостранична купа. Доказати да површине ова три тела стоје у истој размери као и њихове запремине.

463. Површина праве купе је два пута већа од површине лопте уписане у ту купу. Одредити однос запремина купе и лопте.

464. Лопта површине S уписана је у праву зарубљену кружну купу. Угао који изводница те купе образује са већом основом једнак је 60°. Израчунати површину омотача те зарубљене купе.

465. Раван основе праве кружне купе додирује сферу, а врх јој се налази у центру те сфере. Одредити угао између висине и изводнице купе ако је површина сфере једнака површини купе.

466. Основна ивица правилне тростране пирамиде је a, а бочна је b. Наћи (у функцији од a, b) полупречник сфере која додирује ивице пирамиде.

467. Око лопте је описана правилна четворострана зарубљена пирамида чије ивице основа стоје у размери $m : n$. У којој су размери запремине пирамиде и лопте?

468. Раван основе и бочна страна правилне четворостране пирамиде граде диедар са углом од $30°$. Површина лопте уписане у пирамиду је S. Колика је површина омотача пирамиде?

469. У лопту полупречника R уписана је правилна тространа пирамида са углом α између бочних ивица. Наћи висину пирамиде.

470. Лопта је уписана у купу са углом α при врху осног пресека. У ту лопту је уписана купа са истим углом при врху осног пресека. Наћи угао α ако је запремина прве купе 27 пута већа од запремине друге купе.

471. У лопти је уписана купа чија је запремина једнака $1/4$ запремине лопте. Одредити запремину лопте ако је висина купе H.

472. Центар лопте уписане у купу је на одстојању a од врха купе. Угао између изводнице купе и равни основе је α. Колика је запремина купе?

473. Око лопте полупречника R описана је купа код које је угао између изводнице и равни основе α. Наћи површину и запремину купе.

474. Ако се у зарубљену купу може уписати лопта, доказати да је тада: $H = 2\sqrt{Rr}$, $M = \pi s^2$ и $V = \frac{1}{6}SH$, где су R и r полупречници основа, H висина, s изводница, M омотач, S површина и V запремина зарубљене купе.

475. У лопти је уписана купа. Центар лопте дели висину купе тако да је већи одсечак геометријска средина висине и мањег одсечка. Одредити однос запремина лопте и купе.

476. Око сфере полупречника r описана је зарубљена купа чија једна основа има два пута већу површину од друге основе. Наћи запремину зарубљене купе.

477. У купу је уписана лопта. Одредити запремину лопте ако изводница купе има дужину s и нагнута је према равни основе под углом α.

478. Око лопте описана је права зарубљена купа. Може ли површина омотача купе бити једнака површини лопте?

3.2.5. Запремина делова лопте

Запремина одсечка лопте: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$

Запремина исечка лопте: $V = \frac{2}{3}R^2 h\pi$

479. Висина одсечка лопте је једнака трећини пречника лопте. У одсечак је уписана купа. Наћи однос површина одсечка и омотача купе и однос запремина одсечка и купе.

480. Лопта са центром у врху купе додирује раван основе купе. Однос запремине дела купе унутар лопте и запремине целе купе је k. Наћи угао између изводнице и висине купе.

481. У купу је уписана лопта полупречника R. Израчунати запремину дела купе изнад лопте ако је угао при врху осног пресека купе α.

482. Одсечак лопте полупречника r има запремину n пута већу од запремине највеће лопте која је у њему уписана. Израчунати запремину одсечка.

483. Над висином h купе, као над пречником, описана је лопта. Наћи запремину дела лопте изван купе ако је угао између висине и изводнице купе α.

484. Сфера полупречника r подељена је једном равни на два дела, тако да један одсечак има два пута већу површину од другог. У ком односу је подељена запремина лопте?

485. Раван садржи врх купе и сече њену основу по тетиви чија дужина је једнака полупречнику основе. Наћи однос запремина добијених делова купе.

486. *Торус* је тело настало обртањем круга око праве која не сече тај круг (аутомобилска гума је пример торуса). Доказати да је запремина торуса једнака производу површине круга који се обрће и дужине пута који при томе пређе центар круга.

3.3. Додатак уз главу III

487. Запремина правог ваљка једнака је производу четвртине његове површине и хармонијске средине његове висине и полупречника његове основе. Доказати.

488. Правоугаоник $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) ротира око праве $s \parallel AB$ која не сече правоугаоник, а најближа страница правоугаоника јој је AB на удаљености d. Поделити правоугаоник на два дела помоћу дужи $EF \parallel AB$, $E \in AD$, $F \in BC$ тако да запремине тела насталих ротацијом правоугаоника $ABFE$ и $EFCD$ буду једнаке.

489. Масивни прави ваљак хомогене масе плива у води, са осом у хоризонталном положају, потопљен до половине полупречника основе. Наћи густину материјала.

490. Одредити оштар угао ромба ако се зна да су запремине тела добијених ротацијом ромба око мање дијагонале и око његове странице једнаке.

491. Дат је троугао ABC. На страници AC одредити тачку X тако да запремина тела насталог ротацијом троугла AXB око странице AB буде једнака запремини тела које настаје ротацијом троугла BXC око странице BC.

492. Нека је ABC правоугли троугао за који је $AB = AC = a$ и p права у равни троугла ABC која садржи тачку A и са полуправом AB захвата угао α. Ако су $P(\alpha)$ и $V(\alpha)$ редом површина и запремина тела које настаје ротацијом троугла ABC око праве p, доказати да количник $P(\alpha)/V(\alpha)$ не зависи од α.

493. Странице правоугаоника су $3\,\mathrm{cm}$ и $4\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину тела које настаје обртањем правоугаоника око једне његове дијагонале.

494. Лопта додирује ивице AA', AB и $A'D'$ јединичне коцке $ABCDA'B'C'D'$ и садржи средиште M ивице CC', при чему је $CM = 1/3$. Израчунати полупречник лопте.

495. Израчунати полупречник сфере која додирује основу ABC правилног тетраедра $SABC$ и ивице SA, SB и SC ако је $SA = a$.

496. Лопта додирује ивице SA, SB и SC правилног тетраедра $SABC$ и садржи средиште ивице AB. Израчунати полупречник лопте ако је познато да се њен центар налази унутар тетраедра ($SA = 1$).

497. $SABC$ је правилни тетраедар са ивицом дужине 1, O је центар лопте полупречника $\sqrt{2}$ која додирује ивице SA, SB и SC (или њихове продужетке). Израчунати дужину дужи OK, где је K средиште ивице AB.

498. У правилни тетраедар уписана је лопта, а затим је у један од триедара тетраедра уписана друга лопта која додирује прву. Израчунати запремину друге лопте ако је ивица тетраедра a.

499. У правој кружној зарубљеној купи уписана је и око ње описана лопта. Однос њихових полупречника је $\sqrt{6}$. Наћи однос полупречника основа купе.

500. У правилну тространу зарубљену пирамиду „уписане" су две лопте: једна додирује све њене стране, а друга додирује све њене ивице. Израчунати величину диедра који граде основа и бочна страна пирамиде.

501. На полукругу пречника $AB = 2r$ налази се тачка D. Нека је M подножје нормале из D на пречник AB, а C заједничка тачка тангенти на полукруг у тачкама A и D. Одредити $AM = x$ тако да однос запремина тела насталих ротацијом око AB трапеза $AMDC$ и дела AMD полукруга буде једнак k. За које вредности k задатак има решења?

502. Тачка O је заједнички врх двеју подударних купа које се налазе са исте стране равни α тако да само једна изводница сваке купе припада равни α. Угао између висина тих купа је β, а угао између висине и изводнице сваке купе је φ ($2\varphi < \beta$). Израчунати угао између равни основе једне купе и оне изводнице друге купе која се налази у равни α. ($\beta = 60°$, $\varphi = 30°$)

503. Две подударне купе имају заједнчики врх A, а налазе се са разних страна равни α тако да само једна изводница сваке купе припада равни α. Угао између тих изводница је β, а угао између висине и изводнице сваке купе је φ. Израчунати угао између равни α и пресечне праве равни основа тих купа. $(\beta = 60^\circ, \varphi = 30^\circ)$

504. Изводница s праве купе гради са основом угао φ. Раван која пролази кроз врх купе гради са основом угао ψ. Одредити површину пресека у функцији од s, φ и ψ.

505. У праву купу полупречника основе l и нагибног угла изводнице према основи 2α $(2\alpha < \pi/2)$ уписана је лопта L и конструисано је још n лопти од којих свака додирује основу и омотач купе, лопту L и по две од тих n лопти. Одредити везу између n и α.

506. Дата је права кружна купа са врхом V, средиштем основе S и углом при врху осног пресека β. Две тангенцијалне равни купе чине угао α и додирују купу по изводницама VA и VB, где су тачке A и B на обиму основе. Израчупати угао ASB.

507. Одредити максималну вредност односа запремина лопте и око ње описане купе.

508. Пречник сфере је висина правилног тетраедра ивице a. Нађи површину оног дела омотача тетраедра који је унутар сфере.

Глава IV

ДЕТЕРМИНАНТЕ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

4.1. Детерминанте реда два и три

1. Детерминанта другог реда са члановима $a, b, c, d \in \mathbf{C}$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc\,.$$

2. Детерминанта трећег реда са члановима $a_{ij} \in \mathbf{C}$ $(i, j = 1, 2, 3)$:

1° $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2° Сарусово правило: $$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

3. Вредност детерминанте

1° не мења се, ако: а) све врсте и одговарајуће колоне замене места; б) једној врсти (колони) додамо другу помножену са неким бројем;

2° мења знак ако две врсте (колоне) размене места;

3° увећава се k пута ако једну врсту (колону) помножимо са k;

4° једнака је нули: а) једна врста (колона) садржи само нуле; б) две врсте (колоне) су једнаке; в) две врсте (колоне) су пропорционалне.

Израчунати вредност детерминанте (задаци 509–510):

509. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0{,}02 & 1{,}5 \\ 0{,}03 & -0{,}4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -3\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2-\sqrt{3} & \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 0 & 2+\sqrt{3} \end{vmatrix}$; ђ) $\begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix}$ $(i^2=-1)$.

510. а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin^2\alpha-1 \\ 2\cos^2\alpha-1 & 2\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}$.

511. Израчунати вредност детерминанти: $(a,b,c,d\in\mathbf{R},\ i^2=-1)$

а) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a^3 & a^2+a+1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ $(a,b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$.

512. а) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

513. Написати у облику детерминанте другог реда следеће изразе:

а) $ac-bd$; б) $a-3b$; в) $x-y$; г) $3a+2b$.

514. Решити једначине:

а) $\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} x+22 & 3x \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$;

г) $\begin{vmatrix} x^2-4 & 1 \\ x-2 & 1 \end{vmatrix}=0$; д) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$; ђ) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix}=\dfrac{3}{2}$;

е) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$; ж) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$.

515. Решити неједначине:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix}>0$; б) $\begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}<0$; в) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix}\le 0$;

г) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix}>14$.

516. Израчунати миноре M_{31} и M_{22} детерминанте $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$.

517. Израчунати вредност детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; ђ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

518. Применом Сарусовог правила израчунати детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$.

519. Израчунати вредност детерминанти $(a, b, c, x \in \mathbf{R})$:

а) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2a & 1-a & -1 \\ a-2 & 3 & -a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$; ђ) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

$acb + bca + cab - (c^3 + a^3 + b^3)$

$3abc - c^3 - a^3 - b^3$

520. Израчунати вредност детерминанти $(i^2 = -1)$:

а) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -i & 1 & i \\ 0 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \end{vmatrix}$.

521. Решити једначине

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$.

$-5x(x+2)=0$

$x=-2$

522. Израчунати вредност детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \operatorname{ctg}\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\alpha \\ \operatorname{ctg}\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$.

4.2. Системи линеарних једначина

Систем од m једначина са n непознатих је конјункција једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\,. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Гаусов поступак. Ако је у систему (1) $a_{11} \neq 0$ треба елиминацијом непознате x_1 из друге, треће, ..., m-те једначине добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ &\vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}, \end{aligned}$$

где је $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} \cdot \dfrac{b_1}{a_{11}}$ $(i = 2, \ldots, m;\ j = 2, \ldots, n)$.

Настављајући овај поступак систем сводимо на еквивалентан систем „дијагоналног облика“.

2. Крамерова теорема. Нека је дат систем од n једначина са n непознатих

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Нека је D детерминанта овог система, а D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ детерминанте добијене заменом i-те колоне из D елементима $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тада:

1° Ако је $D \neq 0$, систем има *јединствено решење*:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

2° Ако је $D = 0$ и бар једна од детерминанти $D_1, D_2, \ldots, D_n$ различита од нуле, систем *нема решења*.

3° Ако је $D = D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$, Крамерова теорема не даје никакав одговор о решењима система (2). Систем може да има или *бесконачно много решења*, или да уопште *нема решења*. У овом случају најбоље је да се систем решава Гаусовим поступком (в. пример у задацима 532 и 533).

523. Методом узастопне елиминације непознатих — Гаусовим поступком — решити системе једначина над пољем **R**.

а) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$ в) $2x_1 - 3x_2 = 4$

г) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

ђ) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$ е) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 \quad + x_3 &= 4 \end{aligned}$

524. Гаусовим поступком решити хомогене системе једначина над пољем **R**:

а) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \, ; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \, ; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \, . \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$

Гаусовим поступком решити системе једначина над пољем **R** (задаци 525–526):

525. а) $\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0, \\ 3x + 5y - 7z &= 0, \\ 4x - 5y - 6z &= 0; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9, \\ 3x - 5y + z &= -4, \\ 4x - 7y + z &= 5; \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1, \\ x + 2y - z &= 1, \\ 4x + 3y + z &= 3; \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ 2x + 2y + 4z &= 2, \\ -3x - 3y - 6z &= -3; \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} -x + y - z &= -1, \\ -5x + 4y - 5z &= 2, \\ -3x + y - 3z &= 1; \end{aligned}$ ђ) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 1, \\ x + y - 2z &= -2, \\ -2x + y + z &= 1. \end{aligned}$

526. а) $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \qquad &= -24, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= -13; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x + y + 4z + 8t &= -1, \\ x + 3y - 6z + 2t &= 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t &= 8, \\ 2x - y + 2z \qquad &= 4; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} 4x - 3y + 2z - t &= 8, \\ 3x - 2y + z - 3t &= 7, \\ 2x - y \qquad - 5t &= 6, \\ 5x - 3y + z - 8t &= 1; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 5, \\ x + 3y + 5z - 2t &= 3, \\ x + 5y - 9z + 8t &= 1, \\ 5x + 18y + 4z + 5t &= 12. \end{aligned}$

Применом Крамеровог правила над пољем **R** решити системе једначина (задаци 527–528):

527. а) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -5 \\ 3x_1 - x_2 &= 13; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= -2; \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 &= -1. \end{aligned}$

528. а) $\begin{aligned} x + y \qquad &= 7 \\ y + z &= 8 \\ -x \qquad + 2z &= 7. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ 2x \qquad - z &= -17 \\ 6x \qquad - 5z &= 7. \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ x + y + 2z &= 7 \\ 2x - y + z &= 1. \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x+\ \ y+z&=\ 6\\ x-\ \ y-z&=\ 0\\ 2x+3y+z&=13.\end{aligned}$ д) $\begin{aligned} 14x-\ 3y+2z&=\ 92\\ 8x+12y+4z&=188\\ x-\ \ y\qquad &=-1.\end{aligned}$ ђ) $\begin{aligned} 2x_1-\ x_2-2x_3&=1\\ x_1\qquad -4x_3&=2\\ 3x_1-2x_2-3x_3&=0.\end{aligned}$

529. Систем једначина $\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3&=\ \ 5,\\ x_1-\ x_2-\ x_3&=\ \ 3,\\ 2x_1-4x_2-3x_3&=-12\end{aligned}$ решити применом Крамерове теореме и применом Гаусовог поступка.

530. Гаусовим поступком решити системе једначина, над пољем $\mathbf{R}$, за разне вредности реалног параметра:

а) $\begin{aligned} 2x_1+\ x_2&=1\\ \alpha x_1+2x_2&=2.\end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+\ x_2&=\ \ 0\\ 2x_1+3x_2&=-1\\ x_1+\alpha x_2&=\ \ 3.\end{aligned}$ в) $\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+x_3&=-1\\ x_1+2x_2-3x_3&=\ \ 8\\ \alpha x_1+\ x_2-2x_3&=\ \ 7.\end{aligned}$

г) $\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+\ x_3&=-1\\ x_1+2x_2-3x_3&=\ \ 8\\ 3x_1+\ x_2-2x_3&=\ \ \beta.\end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3&=-3\\ 2x_1-\ x_2+3x_3&=-6\\ 3x_1+\ x_2+7x_3&=-9\\ x_1-\ x_2+\alpha x_3&=\ \ \beta.\end{aligned}$

ђ) $\begin{aligned} x_1+\ x_2-\ x_3&=0\\ 2x_1+3x_2-2x_3&=1\\ 4x_1+5x_2-4x_3&=1\\ 3x_1+5x_2+\alpha x_3&=\beta.\end{aligned}$ е) $\begin{aligned} x_1+\ x_2-2x_3+\ x_4&=1\\ 2x_1-\ x_2+\ x_3-2x_4&=3\\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4&=2\\ 3x_1-3x_2+4x_3+\alpha x_4&=\beta.\end{aligned}$

531. Решити систем једначина $\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y+6z&=2\\ 3x+6y+9z&=5.\end{aligned}$

532. Применом Крамеровог правила решити системе једначина над пољем $\mathbf{R}$ за разне вредности реалних параметара:

а) $\begin{aligned} 2x+py&=-1\\ 4x+6y&=-q.\end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x+2y&=3a\\ ax+y&=5a.\end{aligned}$ в) $\begin{aligned} mx+y&=1\\ 2x+y&=2.\end{aligned}$

г) $\begin{aligned} mx+ny&=m^2+n^2\\ mx-ny&=m^2-n^2.\end{aligned}$ д) $\begin{aligned} bx-cy&=2b\\ b^2x-c^2y&=b^2+c^2.\end{aligned}$

533. Применом Крамеровог правила решити системе једначина, над пољем $\mathbf{R}$, за разне вредности реалних параметара:

а) $\begin{aligned} \alpha x_1+\ x_2+\ x_3&=1\\ x_1+\alpha x_2+\ x_3&=1\\ x_1+\ x_2+\alpha x_3&=1\,.\end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6\\ ax_1+4x_2+x_3&=5\\ 6x_1+(a+2)x_2+2x_3&=13\,.\end{aligned}$

в) $\begin{aligned} \alpha x_1+\ x_2-\ x_3&=1\\ 2x_1+2x_2-2x_3&=3\\ x_1-\ x_2+2x_3&=0\,.\end{aligned}$ г) $\begin{aligned} (a-1)x_1+\ x_2-\ x_3&=a\\ (a+2)x_1+ax_2+2x_3&=2a+1\\ (a+1)x_1+\ x_2+\ x_3&=a+1\,.\end{aligned}$

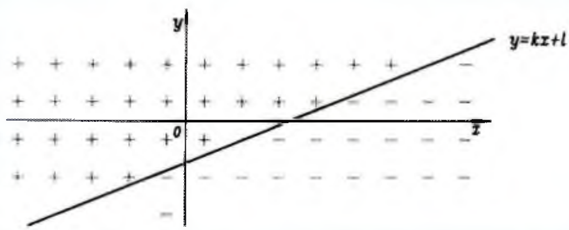
д) $\begin{aligned} ax_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1\,. \end{aligned}$ ђ) $\begin{aligned} (\alpha+1)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (\alpha+1)x_2 + x_3 &= \alpha \\ x_1 + x_2 + (\alpha+1)x_3 &= \alpha^2\,. \end{aligned}$

е) $\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - bx_3 &= -2\,. \end{aligned}$ ж) $\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + cx_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2cx_2 + x_3 &= 4\,. \end{aligned}$

з) $\begin{aligned} ax_1 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 &= 3\,. \end{aligned}$ и) $\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + cx_3 &= 1\,. \end{aligned}$

4.3. Системи линеарних неједначина са две непознате

Нека је у Декартовом координатном систему права линија задата општом једначином $ax + by + c = 0$. Тада за координате свих тачака $M(x, y)$ који се налазе са једне стране ове праве важи неједнакост $ax + by + c > 0$, а за координате свих тачака $M(x, y)$ које су са друге стране праве важи неједнакост $ax + by + c < 0$.



Ако је у Декартовом правоуглом систему права задата једначином $y = kx + l$, тада се све тачке $M(x, y)$ за које је $y > kx + l$ налазе у полуравни „изнад“ ове праве, а све тачке $M(x, y)$ за чије координате важи $y < kx + l$ налазе у полуравни „испод“ ове праве (видети слику).

534. Решити систем неједначина (и дати графичку интерпретацију):

а) $\begin{aligned} x + 3y + 2 &\geq 2, \\ -x - y + 1 &\geq 0; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x - y + 1 &\geq 0, \\ x + y - 2 &\geq 0; \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x - y + 7 &\geq 0, \\ x - 3y - 2 &\geq 0. \end{aligned}$

535. Троугао ABC је одређен једначинама својих страница: AB: $x - 3y - 1 = 0$, BC: $2x + 3y - 11 = 0$, CA: $4x - 3y + 5 = 0$. Одредити систем неједначина који описује унутрашњост троугла.

536. „Графички" решити следеће системе линеарних неједначина:

а) $x - 3 < 0$, $2x + 3y - 6 < 0$, $5x + 4y + 20 > 0$, $2x - 3y + 6 > 0$;

б) $3x + 4y - 12 < 0$, $x - 2y + 2 > 0$, $x - y - 1 < 0$;

в) $3x + 5y - 15 > 0$, $4x + 3y + 12 < 0$, $x - y + 6 < 0$.

537. Одредити све тачке $M(x, y)$ чије координате задовољавају неједначине: а) $|x| + |y| \leq 1$; б) $|x+y| + |y-x| \leq 4$; в) $y > |x-1| + |x-2| + x$; г) $\max\{x, y\} \leq 1$.

4.4. Линеарно програмирање

Проблем који решава линеарно програмирање састоји се у томе да се одреди највећа (или најмања) вредност функције

$$f(x, y) = ax + by$$

на скупу S задатом системом неједначина

$$a_i x + b_i y \geq c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Функција f се зове *функција циља*, неједнакости у систему — *ограничења*, а S је *допустиви скуп*. Тачке из S у којима функција f достиже највећу (најмању) вредност називају се *оптимална решења*.

538. Наћи максимум и минимум функције $f(x, y) = x + y$ уз ограничења: $x - y \leq 3 \wedge x \leq 4 \wedge x + 2y \leq 10 \wedge x - y \geq -2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

539. Наћи најмање и највеће вредности функција $f_1 = x + y$ и $f_2 = -2x + y$ у области $3x + 2y \geq 6 \wedge x - 2y \leq 2 \wedge -3x + 2y \leq 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

540. Одредити минимум функције $f = 2x + y$ при ограничењима $3 \leq x + y \leq 5$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$.

541. Наћи максимум функције $f = x + y$ при ограничењима $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 7$, $y + x \leq 11$.

542. Фабрика производи два модела M и N неке робе и то машинама P и Q. За модел M машине раде 2 h и 4 h, а за модел N — 4 h и 2 h. Ако је зарада 300 динара по моделу M и 500 динара по моделу N, одредити како да се организује рад да би зарада била што већа.

543. Рафинерија располаже са 8 милиона барела нафте типа A и 5 милиона барела нафте типа B. Од тих количина може се производити бензин са зарадом од 4 долара по барелу или уље за ложење са зарадом од 3 долара по барелу.

Постоје два могућа процеса прераде и то следећих карактеристика:

	I процес	II процес
улаз — нафта A	1	5
улаз — нафта B	1	3
излаз — бензин	1	3
излаз — уље за ложење	1	4

Како организовати производњу па да укупан профит буде највећи?

544. У извесној фабрици производе се две врсте артикала – A_1 и A_2 и то од четири врсте сировина — S_1, S_2, S_3 и S_4. За једну јединицу производа A_1 или A_2 неопходна је одређена количина сваке од сировина S_1, S_2, S_3, S_4. Зарада фабрике као и резерве сировина које су на располагању да се добију артикли A_1 и A_2 дате су у таблици:

врста сировина	резерве сировина	артикал	
		A_1	A_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
зарада		7	5

Како треба организовати оптималну производњу?

Глава V

ВЕКТОРИ

5.1. Вектори у правоуглом координатном систему

Уређена тројка међусобно нормалних јединичних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ зове се *база правоуглог координатног система у простору*. Сваки вектор $\vec{a}$ може се на јединствен начин приказати у облику

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Бројеви x, y, z се притом зову *координате* вектора $\vec{a}$. Краће пишемо $\vec{a} = (x, y, z)$.

Слично, уређени пар међусобно нормалних јединичних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ зове се *база правоуглог координатног система у равни*.

Ако је $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тада је

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \quad \lambda \in \mathbf{R};$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

545. Израчунати дужину дужи AB ако су дате координате тачака A и B: а) $A(4,1)$, $B(1,-3)$; б) $A(2,3)$, $B(-1,4)$; в) $A(-1,-3)$, $B(4,2)$.

546. Нека су $A(4,1,6)$ и $B(2,4,-2)$ две тачке у простору. Одредити координате вектора $\overrightarrow{AB}$.

547. Ако је $\overrightarrow{OA} = (2,3,4)$, $\overrightarrow{OB} = (3,0,-1)$, одредити координате тачка A и B (Тачка O је координатни почетак).

Дате су тачке:

548. $A(1,-2)$, $B(3,2)$. Одредити координате вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

549. $A(2,3,1)$, $B(3,-1,0)$, $C(-1,-2,1)$ и $D(-3,3,-2)$. Наћи координате вектора а) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; б) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

Дати су вектори:

550. $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (3,-1)$. Наћи координате вектора: а) $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$.

551. $\overrightarrow{AB} = (A(2,3), B(3,-1))$ и $\overrightarrow{CD} = (C(-1,-2), D(-3,3))$. Одредити координате вектора: а) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; б) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

552. $\vec{a} = (-1,2)$, $\vec{b} = (3,2)$, $\vec{c} = (-2,-3)$. Одредити координате вектора: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{r} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

553. $\overrightarrow{AB} = (1,3)$ и $\overrightarrow{AC} = (2,1)$. Наћи координате вектора $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$, где су M_1, M_2, M_3 средишта страница BC, CA и AB троугла ABC.

Одредити интензитете (дужине) вектора:

554. $\vec{m} = (3,4)$, $\vec{n} = (0,1)$, $\vec{p} = (-3,1)$, $\vec{q} = (2,4)$.

555. а) $\vec{n} = (2,3,6)$; б) $\vec{p} = (2,-6,-9)$; в) $\vec{q} = (-5,8,44)$; г) $\vec{r} = (8,-12,-51)$.

556. Одредити $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$ ако је: а) $\vec{a} = (3,-5,8)$ и $\vec{b} = (-1,1,-4)$; б) $\vec{a} = (2, \frac{9}{2}, \frac{15}{2})$ и $\vec{b} = (0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

557. Дати су вектори $\vec{a} = (4,2,-4)$ и $\vec{b} = 6\vec{j} - 8\vec{k}$. Израчунати: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

558. На оси Oz одредити тачку A чије је растојање од тачке $M(2,2,4)$ једнако 3.

559. Одредити темена B, C, D и пресек T дијагонала паралелограма $ABCD$, ако је $A(2,-1,5)$, $\overrightarrow{AB} = (1,3,1)$ и $\overrightarrow{AD} = (1,-5,3)$.

560. Дата су три узастопна темена паралелограма: $A(1,-2,3)$, $B(3,2,1)$ и $C(6,4,4)$. Наћи координате четвртог темена.

561. Дата су темена $A(1,2,2)$ и $B(3,0,3)$ и вектор $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ троугла ABC. Одредити координате темена C и дужину странице AB.

562. Дати су вектори $\vec{a} = (3,-4)$, $\vec{b} = (-7,-1)$, $\vec{p} = (2,0)$ и $\vec{q} = (0,-2)$. Одредити координате јединичних вектора датих вектора.

563. Одредити јединични вектор вектора: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} + 4\vec{b}$, ако је $\vec{a} = (2,3)$ и $\vec{b} = (-1,2)$.

564. Одредити $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ ако је: а) $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{b} = (1,3)$, $\vec{c} = (2,2)$; б) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = (4,0)$, $\vec{c} = (-1,-2)$; в) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = (0,0)$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

565. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је а) $\vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 3\vec{a_3} + 4\vec{x} = \vec{0}$, где је $\vec{a_1} = (5,-8,-1)$, $\vec{a_2} = (2,-1,4)$, $\vec{a_3} = (-3,2,-5)$; б) $3(\vec{a_1} - \vec{x}) + 2(\vec{a_2} + \vec{x}) = 5(\vec{a_3} + \vec{x})$, где је $\vec{a_1} = (2,5,1)$, $\vec{a_2} = (10,1,5)$, $\vec{a_3} = (4,1,-1)$.

Дати су вектори:

566. $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (1,0)$. Разложити вектор $\vec{m} = (9,1)$ по векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

567. $\vec{u} = (3,-1)$, $\vec{v} = (1,-2)$, $\vec{w} = (-1,7)$. Разложити вектор $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ по векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

AB+BC−AB=0⃗.

568. $\vec{a} = (x-3)\vec{i} + 4\vec{j} + (2z-1)\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + (y-1)\vec{j} + \vec{k}$. Одредити x, y и z тако да је $\vec{a} = \vec{b}$.

569. $\vec{a} = (3,-2,6)$ и $\vec{b} = (-2,1,0)$. Одредити пројекције на координатне осе следећих вектора: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}$; г) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; д) $2\vec{a}+3\vec{b}$; ђ) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

570. Дат је вектор $\vec{m} = (-8,6)$ и тачка $A(1,-1)$. Одредити координате тачке B тако да буде: а) $\overrightarrow{AB} = -\vec{m}$; б) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m}$; в) $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{m}$ и $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

571. Вектори $\overrightarrow{AB} = (2,6,-4)$ и $\overrightarrow{AC} = (4,2,-2)$ поклапају се са страницама троугла ABC. Одредити координате вектора који одговарају тежишним дужима AA_1, BB_1 и CC_1 троугла ABC.

5.2. Линеарна зависност вектора

Дефиниција. Ако су $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ вектори а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ реални бројеви, тада се израз $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n}$ зове *линеарна комбинација вектора* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$.

Ако из једнакости $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$ следи да је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, каже се да су вектори $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ *линеарно независни*. У супротном случају се каже да су ови вектори *линеарно зависни*. Другим речима, вектори $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ су линеарно зависни ако постоје реални бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, тако да је $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,0,\dots,0)$ и да је притом $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$. Дакле, оваква линеарна комбинација једнака је нула-вектору иако нису сви коефицијенти у линераној комбинацији једнаки нули. (Понекад се услов да нису сви бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ једнаки нули пише у еквивалентном облику $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0$.)

Напомена 1. За $n = 2$, не-нула вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни, тј. ако су њихове праве-носачи паралелне.

Напомена 2. За $n = 3$, не-нула вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно зависни ако и само ако су компланарни, тј. ако су њихове праве носачи паралелне истој равни.

572. Дати су вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = 1,2$, $\vec{c} = (9,4)$; б) $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b} = (-2,1)$, $\vec{c} = (7,-4)$; в) $\vec{a} = (3,-1)$, $\vec{b} = (1,-2)$, $\vec{c} = (3,4)$.

573. Доказати да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни (колинеарни) ако је: а) $\vec{a} = (3,2)$, $\vec{b} = (6,4)$; б) $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (6,-3,9)$; в) $\vec{a} = (24,-8,12)$, $\vec{b} = (-6,2,-3)$.

574. Доказати да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни (компланарни), а затим разложити вектор $\vec{c}$ по правцима вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако је а) $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(-2,1)$, $\vec{c}=(7,-4)$; б) $\vec{a}=(-3,0,2)$, $\vec{b}=(2,1,-4)$, $\vec{c}=(11,-2,-2)$; в) $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,1,1)$, $\vec{c}=(7,5,9)$.

?

575. Испитати да ли су следећи скупови вектора линеарно зависни или линеарно независни: 2 а) $\vec{a_1}=(1,2,3)$, $\vec{a_2}=(3,6,7)$; б) $\vec{a_1}=(4,-2,6)$, $\vec{a_2}=(6,-3,9)$; в) $\vec{a_1}=(2,-3,1)$, $\vec{a_2}=(3,-1,5)$, $\vec{a_3}=(1,-4,3)$; г) $\vec{a_1}=(5,4,3)$, $\vec{a_2}=(3,3,2)$, $\vec{a_3}=(8,1,3)$.

2

576. Доказати да су следећи вектори линеарно зависни:

а) $\vec{a}=(-3,4)$, $\vec{b}=(6,-8)$;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, где је $A(-1,0)$, $B(7,-6)$, $C(9,5)$, $D(-3,14)$;

в) $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$;

г) $\vec{a}=(2,-2,0)$, $\vec{b}=(-1,3,2)$, $\vec{c}=(3,2,5)$.

577. Одредити све вредности параметра λ тако да дати скуп вектора буде линеарно независан: а) $\vec{a}=(3,\lambda)$, $\vec{b}=(2,6)$; б) $\vec{a}=(3,2,5)$, $\vec{b}=(2,4,7)$, $\vec{c}=(5,6,\lambda)$; в) $\vec{a}=(6,8,4)$, $\vec{b}=(3,4,2)$, $\vec{c}=(\lambda,0,1)$.

578. Дати су вектори $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(1,-3)$, $\vec{c}=(-1,3)$. Одредити реалан број α тако да вектори $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ буду колинеарни.

579. Дати су вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. Испитати да ли су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно независни и изразити вектор $\vec{d}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

а) $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(-1,1,-2)$, $\vec{c}=(2,1,-3)$, $\vec{d}=(11,-6,5)$;

б) $\vec{a}=(2,1,0)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$, $\vec{c}=(2,2,-1)$, $\vec{d}=(3,7,-7)$;

в) $\vec{a}=(3,2,-1)$, $\vec{b}=(-2,1,3)$, $\vec{c}=(2,0,-2)$, $\vec{d}=(11,1,-10)$.

580. Нека су $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ произвољни вектори. Доказати да су вектори $\vec{a}=\vec{p_1}+\vec{p_2}$, $\vec{b}=\vec{p_1}-2\vec{p_2}$, $\vec{c}=-\vec{p_1}+4\vec{p_2}$ линеарно зависни. Наћи коефицијенте те линеарне зависности.

581. Нека је AB дата дуж и C тачка праве AB таква да је $CA:CB=m:n=\lambda$ и O произвољна тачка. Доказати да је

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}.$$

582. Да би три тачке A, B и C биле колинеарне неопходно је и довољно да је $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, где је O произвољна тачка и $t\in\mathbf{R}$.

583. Ако су четири тачке A,B,C,D компланарне, при чему су тачке A,B,C неколинеарне, тада постоје такви реални бројеви α,β,γ да је $\alpha+\beta+\gamma=1$ и $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, где је O произвољна тачка.

584. Дат је троугао ABC. Нека је M средиште дужи AB и N средиште дужи CM и $AN\cap CB=\{P\}$. Доказати да је $BP:PC=2:1$.

585. Нека су P и Q тачке на страницама BC и AB троугла ABC, такве да је $CP : PB = 2 : 1$ и $AQ : QB = 3 : 1$. Ако је $AP \cap CQ = \{S\}$, израчунати односе $CS : SQ$ и $AS : SP$.

586. а) Нека су K и L тачке на страници AD и дијагонали AC паралелограма $ABCD$ такве да је $AK = \frac{1}{4}AD$ и $AL = \frac{1}{5}AC$. Доказати да су тачке K, L и B колинеарне и израчунати $KL : LB$.

б) Доказати да су тачке K, L и B колинеарне ако је $AK = \frac{1}{n}AD$ и $AL = \frac{1}{n+1}AC$.

587. Тачке M и N су средишта дужи AB и CD. Доказати да тежиште L троугла BCD, средиште K дужи MN и тачка A припадају једној правој. Наћи однос $AK : KL$.

5.3. Скаларни производ

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је број

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Својства скаларног производа:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$.

Ако су у правоуглим Декартовим координатама дати вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тада је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Угао $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ одређен је релацијом

$$\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

588. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао $\psi = \frac{\pi}{6}$. Ако је $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, израчунати угао између вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

589. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Знајући да је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, наћи: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $|\vec{a}|^2$; в) $|\vec{b}|^2$; г) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; д) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; ђ) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; е) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

590. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образују један с другим углове од $60°$. Ако је $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, израчунати дужину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

591. Наћи угао између вектора $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ ако је $|\vec{m}| = |\vec{n}| \neq 0$.

592. За које су вредности реалног броја α вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ нормални међу собом, ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

593. Одредити реалан број m тако да вектори $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$ и $\vec{b} = 3m\vec{u} + 2\vec{v}$ буду узајамно нормални, при чему су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ узајамно нормални јединични вектори.

594. Одредити број x тако да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ буду међусобно нормални, ако је $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\measuredangle(\vec{m},\vec{n}) = 60°$: а) $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - x\vec{n}$; б) $\vec{a} = 4\vec{m} + x\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$.

595. Одредити све реалне бројеве x тако да вектори

$$\vec{u} = (x+3)\vec{i} + x(x+2)\vec{j} + (x+3)\vec{k} \quad \text{и}$$

$$\vec{v} = (x-2)\vec{i} + (x+3)\vec{j} + (x+2)\vec{k}$$

буду међусобно управни и за те вредности x наћи векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

596. Одредити интензитет вектора: а) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 120°$; б) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 30°$.

597. Израчунати дужину дијагонала паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, ако је $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\measuredangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

598. Наћи угао између јединичних вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако су вектори $\vec{p} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ узајамно нормални.

599. Дати су вектори $\vec{a} = 2\lambda\vec{i} + \vec{j} + (1-\lambda)\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$. Ако је $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \measuredangle(\vec{a},\vec{c})$, одредити λ и за тако нађену вредност израчунати $|\vec{a}|$.

600. Нека су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори који заклапају угао од $120°$. Одредити угао који образују вектори $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$.

601. Дати су вектори $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (-1,3)$, $\vec{c} = (0,-1)$, $\vec{d} = (-3,-2)$. Израчунати: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{d}$; в) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})$; г) $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{d})$.

602. Израчунати угао између датих вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) $\vec{a} = (2,0)$, $\vec{b} = (0,-1)$; б) $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{b} = (2,-2)$; в) $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{b} = (3,0)$.

603. Израчунати скаларни производ вектора: а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$; б) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; в) $\vec{a} = (3,1,-2)$, $\vec{b} = (5,-1,-4)$; г) $\vec{a} = (3,4,1)$, $\vec{b} = (1,1,-7)$.

604. Доказати да је троугао ABC правоугли ако је:
а) $A(5,-4)$, $B(3,2)$, $C(2,-5)$; б) $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(1,7)$;
в) $A(5,2,6)$, $B(6,4,4)$, $C(4,3,2)$.

605. Дати су вектори $\vec{a} = (-3,-2)$, $\vec{b} = (3,1)$. Наћи алгебарску вредност пројекције вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ и вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

606. Дате су тачке $A(3,3,-2)$, $B(0,-3,4)$, $C(0,-3,0)$ и $D(0,2,-4)$. Наћи пројекцију вектора $\overrightarrow{CD}$ на $\overrightarrow{AB}$.

607. Дати су вектори $\vec{a} = (1,-1,3)$, $\vec{b} = (3,-5,6)$. Наћи пројекцију вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ на $\vec{a} + \vec{b}$.

617

608. Израчунати угао који образују вектори $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b}$ ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ узајамно нормални.

609. Дати су вектори $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. Одредити $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q})$ ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

610. Дат је четвороугао са теменима $A(2,2)$, $B(7,3)$, $C(6,6)$, $D(4,6)$. Доказати да су дијагонале овог четвороугла узајамно нормалне.

611. Израчунати угао између дијагонала AC и BD четвороугла чија су темена:

а) $A(2,1,-2)$, $B(4,0,-1)$, $C(4,3,2)$, $D(2,4,1)$;

б) $A(5,2,-1)$, $B(1,-3,4)$, $C(-2,1,3)$, $D(2,6,-2)$;

в) $A(-3,-7,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$, $D(-1,1,1)$.

612. Дате су тачке $A(5,6)$, $B(2,3)$, $C(5,0)$. а) Одредити координате тачке D тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм. б) Доказати да је паралелограм $ABCD$ квадрат.

613. Ако су вектори $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ узајамно нормални, наћи услов који задовољавају вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

614. Доказати да је вектор $\vec{p} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ нормалан на вектор $\vec{a}$.

615. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су узајамно ортогонални, а вектор $\vec{c}$ гради са њима углове од $\frac{\pi}{3}$. Ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, наћи: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; в) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

616. Дат је троугао ABC. Ако су интензитети вектора $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ редом једнаки a, b, c, наћи $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$, где је D средиште странице AB датог троугла.

617. Дати су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, такви да је $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{0}$. Ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$, израчунати $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

618. Израчунати вредност скалара $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ три јединична вектора који задовољавају услов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{0}$.

619. Наћи угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако је: а) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ и $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \vec{b})$.

-2

5.4. Векторски и мешовити производ

Векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор одређен својствима:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$;
2) $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$;
3) тројка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ је позитивно оријентисана.

Својства векторског производа:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
4) $\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{0}$ ако и само ако је $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
5) Ако је $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, онда је

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Својства мешовитог производа:

1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
2) Ако је $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, онда је

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Површина паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дата је са

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Запремина паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

620. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао од $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ако је $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 3$ израчунати $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

621. Ако је $\overrightarrow{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, наћи $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

622. Ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ наћи:
а) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$; б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

623. Нека је $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$. а) Ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, наћи $|\vec{a} \times \vec{b}|$. б) Ако је $|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{100}{13}$, наћи $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

624. Наћи површину паралелограма конструисаног над векторима $2\vec{b} - \vec{a}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

625. Одредити векторске производе јединичних вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ оса Декартовог правоуглог координатног система.

626. Нека су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортови координатних оса Декартовог правоуглог координатног система у простору. Израчунати:
а) $[(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{i}] \times \vec{i}$; б) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

627. Доказати да су вектори $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$ компланарни.

628. Одредити координате вектора $\vec{r}$ који је нормалан на векторима $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$ и гради са осом Oy туп угао ако је $|\vec{r}| = 26$.

629. Вектор $\vec{r}$ је нормалан на Oz-осу и на вектор $\vec{a} = (8, -15, 3)$. Ако је $|\vec{r}| = 51$ и $\vec{r}$ гради оштар угао са Ox-осом, одредити координате вектора $\vec{r}$.

630. У равни xOy одредити вектор $\vec{r}$ који је нормалан на вектору $\vec{a} = (5, -3, 4)$ и има исти интензитет као вектор $\vec{a}$.

631. Израчунати површину троугла ABC ако је:
а) $A(6, 3, 1)$, $B(3, 6, 1)$, $C(1, 3, 6)$;
б) $A(1, 2, 1)$, $B(4, 3, 3)$, $C(3, 0, 5)$;
в) $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(4, 4, 1)$.

632. Показати да тачке A, B, C, D припадају истој равни:
а) $A(1, 0, 1)$, $B(4, 4, 6)$, $C(2, 2, 3)$, $D(10, 14, 17)$;
б) $A(3, -2, 3)$, $B(0, 4, 9)$, $C(2, 0, 5)$, $D(2, -8, -1)$;
в) $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$, $D(5, 0, -6)$.

633. Доказати да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарни: а) $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 5, -1)$, $\vec{c} = (4, 4, 1)$; б) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, -4)$, $\vec{c} = (-3, 12, 6)$.

634. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$, $\vec{d} = (3, 2, -1)$. Израчунати: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \times \vec{b}$; в) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; г) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$; д) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$; ђ) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

635. Одредити x тако да вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ буду компланарни:
а) $\vec{a} = (1, x - 1, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$, $\vec{c} = (4, 4, x - 1)$;
б) $\vec{a} = (1, 6, x)$, $\vec{b} = (3, -2, 4)$, $\vec{c} = (7, -18, 2)$;
в) $\vec{a} = (\log(x - 2), -2, 6)$, $\vec{b} = (x, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, -1, 3)$.

636. Израчунати запремину паралелопипеда кога одређују вектори:

а) $\vec{a} = (1, 0, 3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 4, 0)$;

б) $\vec{a} = (4, 5, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$;

в) $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$;

г) $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 0)$.

637. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ако је $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, израчунати: а) $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$; б) $|\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})|$; в) $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})|$; г) $(\vec{a} \times \vec{b})^2$; д) $((\vec{a} \times 2\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}))^2$.

638. Који услов треба да испуњавају вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да би вектори $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ били колинеарни.

639. Одредити површину паралелограма ако су његове дијагонале задате векторима $2\vec{m} - \vec{n}$ и $4\vec{m} - 5\vec{n}$, где су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори који заклапају угао од $45°$.

640. Доказати да су дати вектори компланарни:

а) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$; б) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

641. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образују десни триедар. Израчунати мешовити производ ових вектора ако је

а) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ и вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су међусобно ортогонални;

б) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вектор $\vec{c}$ је ортогоналан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $30°$.

642. Одредити висину која одговара основи $(\vec{a}, \vec{b})$ паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

643. Наћи координате вектора $\overrightarrow{x}$ знајући да је он нормалан на векторима $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$, ако је $\overrightarrow{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

644. Доказати идентитет: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.

645. Доказати: ако је $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{0}$, тада је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

646. Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$, тада су вектори $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ колинеарни. Доказати.

647. Доказати да је $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{b} \times \vec{a})$ и дати геометријску интерпретацију ове једнакости.

648. Ако вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовољавају услов $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \overrightarrow{0}$, тада су они компланарни. Доказати.

649. Тачке $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ и $D(2, 3, 8)$ су темена пирамиде.

а) Израчунати запремину те пирамиде; б) Израчунати висину која одговара темену D.

650. Ако су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ произвољни вектори, испитати да ли су вектори $q\vec{a} - p\vec{b}$, $r\vec{b} - q\vec{c}$ и $p\vec{c} - r\vec{a}$ (p, q, r, — скалари) компланарни.

Глава VI

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ

6.1. Растојање две тачке. Подела дужи у датој размери. Површина троугла

1. Ако су дате тачке својим координатама $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, растојање између њих је

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

2. Ако су дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, координате тачке C која припада правој AB и дели дуж AB у односу λ, тј. $\dfrac{AC}{BC} = \lambda$ су

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Специјално, ако је $\lambda = 1$, тј. C средиште дужи AB важи

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Ако су координате темена троугла $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, површина троугла је

$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \quad \text{или}$$

$$P = \frac{1}{2}\ \text{апс.вр.} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

13-16

651. Израчунати дужину дужи AB ако је дато: а) $A(4,6)$, $B(1,2)$; б) $A(-3,2)$, $B(5,-4)$.

652. Дата су темена троугла $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ и $C(11,-6)$. Одредити дужине његових страница.

653. Одредити дужину тежишних дужи троугла ABC: а) $A(-8,-2)$, $B(0,-4)$, $C(8,6)$; б) $A(3,2)$, $B(9,4)$, $C(7,8)$.

654. Одредити дужине страница и дијагонала паралелограма $ABCD$, ако је: а) $A(0,0)$, $B(8,4)$, $C(6,8)$, $D(-2,4)$; б) $A(-6,3)$, $B(1,-2)$, $C(2,1)$, $D(-5,0)$.

655. Нека су $A(-4,3)$ и $B(4,-3)$ два темена једнакостраничног троугла. Наћи координате трећег темена.

656. Доказати да је троугао ABC правоугли ако је: а) $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(1,7)$; б) $A(1,-1)$, $B(7,-3)$, $C(5,1)$; в) $A(-4,2)$, $B(3,3)$, $C(4,-4)$.

657. На Oy оси одредити тачку која је на одстојању 5 од тачке $A(4,-6)$.

658. На Ox оси одредити тачку једнако удаљену од координатног почетка и тачке $A(9,-3)$.

659. Одредити тачку на Oy оси која је подједнако удаљена од тачака $A(-3,1)$ и $B(5,7)$.

660. Одредити координате тачке која је подједнако удаљена од тачака $A(0,4)$ и $B(5,3)$, а њено одстојање од Oy осе два пута веће него од Ox осе.

661. Одредити тачку која је подједнако удаљена од тачака $A(2,3)$ и $B(5,6)$, ако је њено растојање од координатног почетка $d = 5\sqrt{2}$.

662. Дат је четвороугао $ABCD$ својим теменима $A(1,-2)$, $B(7,-4)$, $C(10,5)$, $D(4,3)$. Нека су M и N средишта дужи AB и CD. Одредити координате вектора $\overline{MN}$.

663. Дате су координате два темена троугла ABC: $A(3,6)$, $B(-3,5)$. Одредити координате темена C ако средишта страница AC и BC припадају различитим координатним осама.

664. Дат је четвороугао $ABCD$: $A(-7,-6)$, $B(7,-4)$, $C(3,2)$, $D(-5,0)$. Нека су M, N, P, Q редом средишта дужи AB, BC, CD, DA. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

665. Дат је четвороугао $ABCD$: $A(-7,-6)$, $B(7,-4)$, $C(3,2)$, $D(-5,0)$. Нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта страница AB, BC, CD, DA и дијагонала AC и BD. Доказати да се дужи MP, QN, RS секу у једној тачки која полови сваку од ових дужи.

666. Наћи координате средишта дужи AB ако је: а) $A(-1,-2)$, $B(5,4)$; б) $A(-1,2)$, $B(7,-2)$.

667. Одредити координате средишта страница троугла ABC, ако је: а) $A(3,-7)$, $B(5,2)$, $C(-1,0)$; б) $A(3,-2)$, $B(5,2)$, $C(-1,4)$.

668. Наћи координате темена троугла ABC ако су дата средишта његових страница: а) $P(3,-2)$, $Q(1,6)$, $R(-4,2)$; б) $P(5,2)$, $Q(-4,0)$, $R(3,-3)$.

15 - 11

669. Дуж AB, где је $A(-3,-2)$, $B(9,10)$ поделити: а) тачком D у односу $5:7$; б) на три једнака дела; в) на три дела који се односе као $1:2:3$.

670. Дате су тачка $A(1,1)$, $B(6,-4)$ и $C(7,1)$. Одредити координате тачке D која дели дуж AB у односу $2:3$, а затим наћи координате тачке E која полови дуж CD.

671. Дуж AB подељена је на пет једнаких делова. Одредити координате деобних тачака ако је $A(3,2)$, $B(15,6)$.

672. Доказати да тачка T, тежиште троугла са теменима $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ има координате $T\left(\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right)$ и затим наћи тежиште троугла ABC ако је : а) $A(1,4)$, $B(-5,0)$, $C(-2,-1)$; б) $A(2,-1)$, $B(6,-3)$, $C(-2,-5)$.

673. Тежиште троугла ABC поклапа се са координатним почетком, тачке A и B имају координате $A(6,0)$, $B(0,-2)$. Одредити координате темена C.

Израчунати површину троугла чија су темена тачке (задаци 674–675):

674. $A(-2,1)$, $B(3,-1)$, $C(5,-1)$.

675. а) $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$; б) $A(-3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,3)$; в) $A(0,0)$, $B(\sqrt{3},0)$, $C\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.

676. Израчунати површину паралелограма $ABCD$ ако су дата темена $A(-2,8)$, $B(1,5)$, $C(4,1)$.

677. Испитати да ли три дате тачке припадају једној правој:

а) $A(0,5)$, $B(2,1)$, $C(-1,7)$; б) $A(3,1)$, $B(-2,-9)$, $C(8,11)$;

в) $A(4,2)$, $B(9,4)$, $C(7,6)$.

678. Дате су тачке $A(1,2)$, $B(2,3)$ и $C(4,m)$. Одредити параметар m тако да све три тачке припадају истој правој.

679. Дат је троугао ABC. Наћи тачку пресека симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC ако је $A(4,1)$, $B(7,5)$, $C(-4,7)$.

680. Дате су координате два суседна темена $A\left(-4\frac{1}{2},-7\right)$ и $B(2,6)$ паралелограма $ABCD$ и пресека дијагонала $S\left(3,1\frac{1}{2}\right)$. Одредити координате остала два темена паралелограма.

681. Дата су два темена паралелограма $A(-2,-4)$ и $B(2,-1)$ и пресек дијагонала $S(0,0)$. Наћи координате преостала два темена и доказати да је овај паралелограм ромб.

682. Наћи тачку пресека заједничких тангенти кругова чији су центри $C_1(2,5)$ и $C_2\left(7\frac{1}{3},10\frac{1}{3}\right)$, а одговарајући полупречници $r_1=3$, $r_2=7$.

683. Доказати да је троугао ABC једнакокраки и израчунати његову површину, ако је $A(-3,8)$, $B(1,5)$ и $C(4,1)$.

684. Два темена троугла су $A(6,3)$ и $B(9,-6)$, а средиште странице AC је тачка $D(-3,0)$. Колика је површина троугла ABC?

3 - 2

685. Дате су тачке $A(1,3)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$ и $D(-1,4)$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ паралелограм и наћи дужину висине која одговара страници AB.

686. Површина троугла је $P = 3$, а његова два темена су $A(3,1)$ и $B(1,-3)$. Одредити координате темена C, ако је познато да тежиште троугла припада x-оси.

687. Израчунати површину петоугла $ABCDE$ ако је $A(-2,0)$, $B(0,-1)$, $C(2,0)$, $D(3,2)$, $E(-1,3)$.

6.2. Права у равни

6.2.1. Разни облици једначине праве

1. *Општи (имплицитни) облик* једначине праве је

$$Ax + By + C = 0,$$

где су A, B, C коефицијенти, такви да A и B не могу истовремено бити једнаки нули ($(A,B) \neq (0,0)$).

2. *Експлицитни (главни) облик* једначине праве је

$$y = kx + n.$$

Параметар $k = \operatorname{tg}\varphi$ је коефицијент правца праве, где је φ угао који образују позитивни смер x-осе и део праве изнад x-осе. Параметар n је дужина одсечка који права одсеца на y оси, рачунајући од координатног почетка. За праве које су паралелне са y-осом главни облик једначине праве не постоји.

3. Једначина праве *кроз тачке* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ дата је са

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad x_2 - x_1 \neq 0,$$

где је $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\varphi = k$ коефицијент правца те праве.

4. *Сегментни облик* једначине праве је

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad a, b \neq 0,$$

где су a и b дужине одсечака (сегмената) које права одсеца на координатним осама. Овај облик једначине праве има смисла само за праве које секу обе осе и које не пролазе кроз координатни почетак.

5. Једначина праве *кроз тачку* је

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где је k коефицијент правца праве која пролази кроз тачку $M(x_1, y_1)$.

16 - 14

688. Конструисати праве: а) $x = -1$, $x = 2$, $x = 0$; б) $y = 2$, $y = -1$, $y = 0$.

689. Одредити једначине правих које садрже тачку $M(2, -3)$ а паралелне су са координатним осама.

690. Тачке A, B, C, D које припадају правој $2x - y - 1 = 0$ имају, редом, ординате $-3, -1, 3, 7$. Одредити апсцисе ових тачака.

691. Дате су праве p_1: $y = -x + 3$ и p_2: $y = 2x - 4$. Испитати које од следећих тачака припадају датим правама: $A(1, 2)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$, $D\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $E(-2, 5)$, $F(-3, -2)$, $O(0, 0)$.

692. Одредити тачке пресека праве $2x - 3y + 12 = 0$ са координатним осама.

693. Одредити угао који са осом Ox образује права: а) $x + y + 15 = 0$; б) $x - y + 4 = 0$; в) $x + y\sqrt{3} - 4 = 0$; г) $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.

694. Написати једначину праве ако је дат коефицијент правца k и одсечак n на Oy-оси: а) $k = \frac{2}{3}$, $n = 3$; б) $k = 3$, $n = 0$; в) $k = 0$, $n = -2$; г) $k = -\frac{3}{4}$, $n = 4$.

695. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(2, -1)$, а са позитивним смером осе Ox гради угао $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

696. Наћи коефицијент правца k и одсечак n на Oy оси праве која пролази кроз тачке $A(2, -8)$ и $B(-1, 7)$.

697. Светлосни зрак усмерен по правцу праве $y = \frac{2}{3}x - 4$ погађа x-осу. Одредити упадну тачку зрака и једначину праве по којој се зрак одбио.

698. Одредити вредност реалног параметра $m \neq 0$ тако да: а) права чија је једначина $4x - my - 7 = 0$ има коефицијент правца $k = 3$; б) права чија је једначина $mx - y - 3m + 6 = 0$ одсеца на оси Oy одсечак $n = 5$.

699. За које вредности реалних параметара p и q права чија је једначина $(p + q - 1)x + (2p + 3q)y + p + 2 = 0$ паралелна оси Ox, а на оси Oy одсеца одсечак -2.

700. Дате су праве: а) $(b+2)x + (b-3)y + b^2 - 2b + 1 = 0$; б) $(b-1)x + (b+2)y + b^2 + 2b + 1 = 0$. Одредити све вредности b за које је дата права: $1°$ паралелна x-оси; $2°$ паралелна y-оси; $3°$ пролази кроз координатни почетак. У сваком од случајева написати једначину праве.

701.[1] Доказати да се једначина праве која садржи две тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ може написати у облику:

а) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

702. Написати једначину праве која пролази кроз тачке A и B ако је: а) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$; б) $A(2, -1)$, $B(-2, 3)$; в) $A(-4, -1)$, $B(4, 3)$; г) $A(1, 0)$, $B(4, 2)$.

703. Дате су координате темена троугла ABC. Одредити једначине његових страница ако је: а) $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$; б) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(7, -5)$.

[1] Једначина праве кроз две тачке, задаци 701–706.

11 - 10

704. Одредити једначину праве која садржи координатни почетак и средиште дужи M_1M_2 ако је:
а) $M_1(-4,6)$, $M_2(8,8)$; б) $M_1(4,-1)$, $M_2(-10,-5)$; в) $M_1(3,-4)$, $M_2(7,6)$.

705. Темена троугла ABC су $A(3,2)$, $B(5,-2)$ и $C(1,0)$. Наћи једначине страница и тежишних линија датог троугла.

706. Два темена троугла ABC имају координате $A(1,5)$ и $B(5,1)$, а тежиште је тачка $T(2,2)$. Одредити једначине страница AC и BC.

707.[2] Написати једначину праве која сече координатне осе у тачкама: а) $A(5,0)$ и $B(0,2)$; б) $M_1(-3,0)$ и $M_2(0,-4)$; в) $P(1,0)$ и $Q\left(0,\frac{3}{5}\right)$.

708. Наћи сегментни облик једначине праве: а) $x+2y-2=0$; б) $2x-3y+6=0$; в) $x+3y-3=0$; г) $4x+y-4=0$; д) $2x-1=0$; ђ) $y-4=0$.

709. Одредити једначине правих које пролазе кроз тачку $A(-1,3)$ и на координатним осама одсецају једнаке одсечке.

710. У једначини праве $12x+ky-60=0$ одредити реалан параметар k тако да њен одсечак између координатних оса буде 13.

711. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку $A(x,y)$, а са координатним осама образује троугао површине S ако је: а) $A(-5,4)$, $S=5$; б) $A(12,6)$, $S=150$.

712.[3] Написати једначину праве која садржи тачку $A(x,y)$ и чији је коефицијент правца k: а) $A(3,4)$, $k=2$; б) $A(-4,1)$, $k=-\frac{2}{3}$; в) $A(0,4)$, $k=\frac{1}{2}$; г) $A(-3,0)$, $k=-2$.

713. Наћи једначину праве која: а) пролази кроз тачку $A(2,3)$ и има коефицијент правца $k=3$; б) пролази кроз координатни почетак и има коефицијент правца $k=2$; в) симетрала првог и трећег квадранта; г) пролази кроз координатни почетак и са x-осом образује угао од 30°.

714. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку M а са x-осом гради (захвата) угао α ако: а) $M(3,2)$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; б) $M(-4,-1)$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; в) $M(-3,0)$, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; г) $M(0,4)$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

---

[2] Сегментни облик једначине праве, задаци 707–711.

[3] Једначина праве кроз дату тачку, задаци 712–714

14

6.2.2. Међусобни положај двеју правих

1. *Угао између правих* $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ (оријентисани угао): $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$; (апсолутни угао): $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$.

2. *Услов паралелности* правих $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$: $k_1 = k_2$.

3. *Услов нормалности* правих $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$: $\boxed{k_1k_2 = -1}$

715. Наћи угао између правих: а) $y = 3x$, $y = -2x+5$; б) $y = 4x-7$, $y = -\frac{1}{4}x+2$; в) $y = 5x-3$, $y = 5x+7$; г) $y = \sqrt{3}x-2$, $y = -\sqrt{3}x+1$; д) $y = 7x-2$, $y = x-\sqrt{2}$; ђ) $y = (2+\sqrt{3})x - 4$, $y = (2-\sqrt{3})x + 1$.

716. Израчунати углове троугла ABC ако је $A(3,7)$, $B(5,1)$, $C(1,3)$.

717. Одредити једначину праве која садржи тачку $M(2,-1)$ и гради са x-осом угао два пута већи него права $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

718. Одредити све вредности реалног параметра a тако да права $ax + 2y = 8$ сече праву $2x - y + 3 = 0$ под углом од: а) $45°$; б) $60°$.

719. Наћи једначину праве која садржи тачку $M(-1,3)$ и са правом (p): $3x + 2y - 6 = 0$ образује угао од $45°$.

720. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку $M(1,3)$ и образује са правом (l): $3x + 5y + 1 = 0$ оштар угао φ тако да је $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{7}$.

721. Одредити угаоне коефицијенте правих l_1 и l_2 ако права l_1 садржи тачке $M_1(2,3)$ и $N_1(-1,1)$, а права l_2 тачке $M_2(3,0)$ и $N_2(0,-2)$ и доказати да су праве паралелне.

722. Одредити тангенсе унутрашњих углова троугла чије су странице задате једначинама: CA; $2x + 3y - 6 = 0$, AB: $2x - y - 5 = 0$, BC: $x - 3y - 2 = 0$.

723. Одредити једначину симетрале дужи AB: а) $A(1,-4)$, $B(3,2)$; б) $A(-5,-2)$, $B(1,4)$.

724. Дате су једначине страница троугла: $x + y - 10 = 0$, $2y - 3x + 8 = 0$, $x - 4y + 4 = 0$. Израчунати површину овог троугла.

725. Одредити једначину праве која садржи тачку A и нормална је на правој p, ако је: а) $A(1,3)$, p: $3x - 5y + 7 = 0$; б) $A(3,-6)$, p: $y = 3x$; в) $A(3,0)$, p: $5x - 4y - 13 = 0$.

726. Наћи једначине правих одређених висинама троугла ако су једначине његових страница: $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$.

727. Једначине страница паралелограма $ABCD$ су AB: $2x + y - 3 = 0$, BC: $2x - 3y - 15 = 0$, CD: $2x + y + 5 = 0$, DA: $2x - 3y + 9 = 0$. Одредити коодинате његових темена.

728. Наћи једначину праве која садржи пресечну тачку правих (l): $2x+3y-7 = 0$ и (m): $x+2y-5 = 0$ и: а) паралелна је са правом (p): $2x+y+4 = 0$; б) нормална је на праву (q): $x - y + 7 = 0$.

17

729. Дате су праве (p_1): $x-2y+1=0$ и (p_2): $x+y-2=0$. Израчунати површину троугла који одређују праве p_1, p_2 и x-оса, а затим написати једначину праве p која пролази кроз пресек правих p_1 и p_2 и нормална је на правој p_1.

730. Дата је права (l): $x+3y+3=0$ и тачка $M(1,2)$. Одредити ортогоналну пројекцију $N(x,y)$ тачке M на праву (l).

731. Дата је права (l); $x+2y-5=0$ и тачка $M(2,4)$. Одредити тачку $N(x_1,y_1)$ симетричну тачки M у односу на праву l.

732. Дат је троугао ABC: $A(-1,-1)$, $B(4,2)$, $C(2,5)$. Наћи једначине висина овог троугла.

733. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку пресека правих p и q, а паралелна је правој a, ако је:
а) p: $x-3y+2=0$, q: $5x+6y-4=0$, a: $4x+y+7=0$;
б) p: $6x-y-9=0$, q: $-x+y-1=0$, a: $2x-3y-6=0$.

734. Одредити једначину праве која садржи хипотенузину висину правоуглог троугла ABC, ако је $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,4)$.

735. Доказати да је троугао који образују праве $y=3x-1$, $x-7y=7$ и $x+y-7=0$ једнакокраки.

736. Кроз тежиште троугла чија су темена $A(7,-7)$, $B(-2,5)$ и $C(4,2)$ конструисана је права паралелна страници AB. Одредити координате тачка M и N у којима та права сече страницу BC, односно AC.

737. Дате су тачке $P(0,8)$ и $Q(7,9)$ и права l: $x-3y+2=0$. На правој l одредити тачку M тако да је $\measuredangle PMQ=45°$.

738. Светлосни зрак долази по правој (l): $x+2y-3=0$ и одбија се од правца (q): $2x-3y+1=0$. Наћи једначину одбијеног зрака.

739. Одредити једначину праве која садржи тачку $M(8,1)$ и са правим $7x+6y-42=0$ и $9x+2y-14=0$ образује једнакокраки троугао (при чему је тачка M на основици или продужетку основице тог троугла).

740. Наћи једначине страница троугла ако су дате координате једног темена $A(3,-4)$ и једначине двеју правих одређених висинама тог троугла: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$.

741. Наћи једначине страница троугла ако је дато: h_a: $x-2y-3=0$, h_b: $x+4y-17=0$, AB: $x-y-2=0$.

742. Дата су два темена троугла ABC: $A(-2,-1)$, $B(4,1)$ и ортоцентар $H(1,3)$. Одредити координате темена C.

743. На правој (p): $3x+2y-6=0$ одредити тачку која је једнако удаљена од тачака $A(-1,-3)$ и $B(3,1)$.

744. Одредити реалан параметар a тако да пресечна тачка правих $3x+(a+4)y=7$ и $5x-(a+2)y=3$ припада правој $6x+y=1$.

745. Израчунати површину четвороугла чија су темена $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,3)$ и познато је да четврто теме D припада x-оси, ако су дијагонале тог четвороугла међусобно управне.

6.2.3. Прамен правих

Ако су $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ једначине две праве које се секу у тачки S, тада једначина

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

представља једначину прамена правих са центром S. Ако за $\alpha \neq 0$ ставимо $\lambda = \beta/\alpha$, добијамо једначину

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

која представља све праве пармена кроз S осим праве $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, која овом једначином *није обухваћена*. Зато је, у овом облику, једначина прамена правих са центром у S дата формулом:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2) = 0 \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \quad \text{или} \quad A_2x+B_2y+C_2 = 0.$$

746. Доказати да права $x + 3y + 13 = 0$ припада прамену $3x + y - 1 + \lambda(2x - y - 9) = 0$.

747. Проверити да ли права $7x + 2y - 15 = 0$ припада прамену $5x + 3y + 6 + \lambda(3x - 4y - 37) = 0$.

748. У прамену правих $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ одредити праву која садржи тачку $M(4, 1)$.

749. Одредити једначину праве l која пролази кроз пресек правих $3x - 4y - 5 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$, а паралелна је са правом $4x - 8y + 3 = 0$.

750. У прамену $2x - y + 1 + \lambda(x + 4y - 13) = 0$ одредити праву која је паралелна са осом Ox.

751. У прамену $x + 5y + 3 + \lambda(x + y + 1) = 0$ одредити праву нормалну на праву $x + 3y + 11 = 0$.

752. Одредити једначину праве која припада прамену $5x - 4y - 6 + \lambda(x - y - 1) = 0$ и гради са правом $2x - y + 3 = 0$ угао од $45°$.

753. У прамену $2x + y + 3 + \lambda(x - 3y - 2) = 0$ одредити праву која на координатним осама одсеца једнаке одсечке.

754. Показати да свака права фамилије правих $(m + 2)x - (m - 1)y - 2m - 3 = 0$ пролази кроз једну сталну тачку независно од вредности коју има реалан параметар m.

7 - 6

6.2.4. Нормални облик једначине праве

1. *Нормални облик једначине праве* (l) је:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Параметар p $(p \geq 0)$ је дужина нормале спуштене из координатног почетка на праву, а φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ угао између нормале p и позитивногдела x-осе.

2. Растојање d тачке $M(x_0, y_0)$ од праве (l) дато је формулом:

$$d = |x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p|.$$

3. Ако је права дата у општем облику $Ax+By+C=0$, тада њен нормални облик гласи:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

при чему је предзнак у $\pm$ супротан предзнаку од C. За $C \neq 0$ ово се може записати и у прецизнијем облику

$$\frac{Ax+By+C}{-(\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

где је $\operatorname{sgn} x$ (*сигнум* или (*знак*) од x) $= 1$, ако је $x > 0$; $= 0$, ако је $x = 0$ и $= -1$, ако је $x < 0$.

4. Растојање d тачке $M(x_0, y_0)$ од праве $Ax+By+C=0$ дато је формулом

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

755. Одредити нормални облик једначине праве ако је: а) $\varphi = 30°$, $p = 5$; б) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $p = 3$; в) $\varphi = 180°$, $p = 4$; г) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $p = 10$; д) $\varphi = 160°30'$, $p = 2$.

756. Свести на нормалан облик селдеће једначине: а) $23x + 4y + 5 = 0$; б) $x - 2y + 3 = 0$; в) $y = 3x + 4$; г) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$; д) $x = -3$.

757. Одредити нормални облик једначина правих: а) $4x - 3y + 10 = 0$; б) $5x + 12y - 39 = 0$; в) $y - x\sqrt{3} = 4$; г) $x\cos 10° + y\sin 10° + 4 = 0$.

758. Одредити m тако да је права $y = mx + 5$ удаљена од координатног почетка за $d = \sqrt{5}$.

759. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(4, -8)$ и удаљена је од координатног почетка за $d = 4$.

760. Наћи растојање дате тачке од дате праве: а) $A(2,1)$, p: $3x + 4y + 5 = 0$; б) $A(1,-4)$, p: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}$; в) $A(0,0)$, p: $-\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{3} = 0$.

761. Наћи угаони коефицијент праве која садржи тачку $P(-2,1)$ и њено растојање од тачке $A(3,1)$ једнако је 4.

12 - 6

762. Одредити једначину праве која садржи тачку $M(-3,1)$ и њено одстојање d од тачке $N(1,3)$ је $d=\sqrt{2}$.

763. На ком одстојању од тачке $M(6,8)$ се налази нормала из тачке $N(2,-3)$ на праву p: $3x-4y+6=0$?

764. Ако су дата темена троугла, одредити дужине његових висина: а) $A(3,6)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$; б) $A(-\frac{1}{7},-\frac{3}{28})$, $B(4,3)$, $C(2,-1)$.

765. Одредити међусобно растојање паралелних правих: а) $3x-4y+4=0$ и $3x-4y-1=0$; б) $5x+12y+19=0$ и $5x+12y-7=0$.

766. Дате су паралелне праве $3x-4y+15=0$ и $3x-4y-5=0$. Одредити једначину осе симетрије која је паралелна са њима.

767. Одредити растојање између двеју датих паралелних правих: а) $3x-4y-10=0$ и $6x-8y+5=0$; б) $4x-3y+15=0$ и $8x-6y+26=0$.

768. Дате су праве $24x-10y+39=0$ и $12x-5y-26=0$ којима припадају паралелне странице квадрата. Одредити површину квадрата.

* **769.** На правој p: $x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ одредити тачке A и B тако да троугао OAB буде једнакостраничан.

770. Одредити једначину праве која је паралелна датим правим $4x-6y-3=0$ и $2x-3y+7=0$ и једнако удаљена од њих.

771. На правој $2x-3y+21=0$ наћи тачку која је подједнако удаљена од апсцисне осе и тачке $A(1,2)$.

772. У прамену правих $2x+y+4+\lambda(x-2y+2)=0$ одредити праву чије је одстојање од тачке $A(1,-1)$ једнако $\sqrt{10}$.

773. Симетрала угла има једначину $x-7y+21=0$, а један крак је $4x-3y+9=0$. Написати једначину другог крака.

774. Наћи једначине симетрала углова између правих: а) $6x-8y+15=0$, $24x+10y-3=0$; б) $3x-4y+7=0$, $5x+12y-1=0$; в) $4x+3y-11=0$, $3x-4y-2=0$.

6.2.5. Додатак уз поглавља 6.1 до 6.2.4.

775. Наћи кординате пресека дијагонала четвороугла $ABCD$, ако је $A(6,-1)$, $B(3,5)$, $C(-2,3)$ и $D(-2,0)$.

776. Дата је тачка $P(0,1)$ и праве l_1: $x-3y+10=0$ и l_2: $2x+y-8=0$. Одредити једначину праве која сече праве l_1 и l_2 у тачкама $A_1(x_1,y_1)$, односно $A_2(x_2,y_2)$, тако да је P средиште дужи A_1A_2.

777. Дате су једначине двеју суседних страница паралелограма: $x-y-1=0$ и $x-2y=0$ и координате тачке пресека дијагонала $M(3,-1)$. Наћи једначине других двеју страница паралелограма.

778. Дати су теме $A(-1,0)$ и висине h_b: $2x-y-4=0$ и h_c: $x+y-3=0$ троугла ABC. Одредити једначину праве BC.

779. У троуглу чија су темена $A(-4,3)$, $B(6,1)$, $C(2,5)$ наћи величину угла између висине h_c и тежишне дужи t_c.

780. Одредити једначине правих одређених висинама троугла ABC и одредити координате ортоцентра тог троугла, ако је $A(1,-1)$, $B(5,-3)$, $C(8,6)$.

781. Наћи тачку Q' симетричну датој тачки Q у односу на дату праву l, ако је: а) $Q(-2,-9)$, l: $2x+5y-38=0$; б) $Q(1,3)$, l: $x+2y-2=0$; в) $Q(2,5)$, l: $2x-3y-2=0$.

782. Одредити праву симетричну правој $3x-2y+1=0$ у односу на тачку $M(5,1)$.

783. Одредити једначину праве q која је симетрична правој p у односу на праву s, ако је:
а) p: $3x+4y-25=0$, s: $64x-8y-195=0$; б) p: $3x+4y-2=0$, s: $-x+y-8=0$.

784. Одредити једначину праве која сече праве $x+y+3=0$ и $2x-y-5=0$ у тачкама A и B тако да је средиште дужи AB тачка $M(1,1)$.

785. Дата су два темена троугла ABC: $A(-10,2)$, $B(6,4)$ и ортоцентар тог троугла $H(5,2)$. Одредити координате трећег темена троугла.

786. Дате су тачке $A(-1,0)$ и $B(4,0)$. На правој $3x-2y-4=0$ одредити тачку C тако да површина троугла ABC буде $P=10$.

787. Одредити једначине страница једнакокраког трапеза $ABCD$ ако је $A(-5,0)$, $B(5,0)$, краци са дужом основицом граде углове од $60°$, а краћа основица је дужине 6.

788. Дат је четвороугао са теменима $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,2)$ и $D(0,2)$. Нека су P,Q,R,S тачке такве да је P средиште дужи DS, Q средиште дужи PA, R средиште дужи QB и S средиште дужи RC. Наћи координате тачака P,Q,R,S и површину четвороугла $PQRS$.

789. На правој p: $x-2y+8=0$ одредити тачку једнако удаљену од тачке $S(8,3)$ и праве q: $3x+4y-11=0$.

790. Дати су теме $C(1,-2)$ и једначине симетрала углова s_α: $x+y-3=0$ и s_β: $x-3y+1=0$ троугла ABC. Одредити једначину праве AB.

791. Дате су једначине странице AB: $3x+y-2=0$, симетрале угла s_β: $x-y+8=0$ и висине h_c: $x-3y+30=0$ троугла ABC. Одредити координате тачке C.

792. Наћи једначине страница троугла ABC ако су дате координате темена $A(-4,2)$ и једначине двеју правих којима припадају тежишне дужи тог троугла: p: $3x-2y+2=0$, q: $3x+5y-12=0$.

793. Темена $A(2,y_1)$ и B ромба $ABCD$ припадају правој $3x-7y+1=0$. Наћи координате свих темена ромба, као и полупречник уписаног круга, ако је тачка $S(0,4)$ центар ромба.

794. Израчунати површину ромба ако је познато једно његово теме $A(0,-1)$, тачка $S(4,4)$ – пресек дијагонала ромба и тачка $M(2,0)$ на страници AB ромба.

795. Дате су тачке $A(5,2)$, $B(-2,3)$ и $C(1,-6)$. Наћи координате центра описаног круга S, тежишта T и ортоцентра H троугла ABC. Доказати да тачке S, T и H припадају једној правој и одредити њену једначину.

796. У троуглу ABC висина h_a припада правој $y=-x+6$, а тежишна дуж t_a правој $y=-2x+7$. Ако је $B(1,-1)$, наћи дужину странице a и угао између те странице и тежишне дужи t_a.

797. Дата су темена троугла $A\left(-\frac{1}{2},5\right)$, $B(-3,-2)$, $C\left(4,-\frac{1}{4}\right)$. Ако тачка E дели страницу AB у односу $AE:EB=1:4$, а тачка F страницу AC у односу $AF:FC=2:1$, наћи однос у којем права EF дели висину AD троугла ABC и дужине тих делова.

798. Одредити једначине страница троугла ABC ако су дате једначине тежишне линије t_a: $x+2y+10=0$ и висине h_b: $3x+y+15=0$ и теме $C(1,-8)$.

799. На правој $x-2y+7=0$ одредити тачку која је једнако удаљена од тачке $M(7,2)$ и од праве $3x+4y-4=0$.

800. Одредити координате темена A троугла ABC ако су дате једначине тежишне линије t_c: $4x+13y+24=0$ и симетрале угла s_γ: $x+2y+1=0$ и теме $B(2,1)$.

801. Одредити геометријско место тежишта троуглова чија су темена $A(1,3)$, $B(5,6)$, а треће теме припада правој $y=3x+6$.

802. Одредити геометријско место средишта дужи конструисаних из тачке $A(2,1)$ до праве $y=3x+5$.

803. Површина троугла ABC чија су два темена $A(4,-5)$ и $B(2,9)$ износи 50. Одредити геометријско место тачака C.

6.3. Круг

1. *Канонска једначина* круга* са центром у тачки $S(a,b)$ и полупречником r дата је са
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$
2. Ако је једначина круга дата у *општем облику*
$$x^2+y^2+px+qy+m=0,$$
координате центра су $a=-\frac{p}{2}$, $b=-\frac{q}{2}$, а дужина *полупречника* је
$$r=\sqrt{(p/2)^2+(q/2)^2-m}.$$
У случају да је $(p/2)^2+(q/2)^2-m=0$ горња једначина представља тачку $S(a,b)$, а ако је $(p/2)^2+(q/2)^2-m<0$, горња једначина представља празан скуп тачака у равни, тзв. *имагинарни круг*, јер би формално могло да се каже да је то круг са полупречником $r=i\sqrt{m-(p/2)^2-(q/2)^2}$.

3. Права $y=kx+n$ је *тангента круга* $x^2+y^2=r^2$ ако је
$$r^2(1+k^2)=n^2,$$
а круга $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ако је
$$r^2(1+k^2)=(ka-b+n)^2.$$
4. Ако је $M(x_1,y_1)$ нека тачка круга $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, ***једначина*** *тангенте* круга у тој тачки гласи
$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2.$$

804. Написати једначину круга ако су дати његов центар и **полупречник**: а) $C(-2,5)$, $r=3$; б) $C(4,-3)$, $r=5$; в) $C(0,4)$, $r=1$; г) $C(0,0)$, $r=1$.

805. Написати једначину круга чији је центар тачка:

а) $C(-3,4)$ и тај круг садржи координатни почетак;

б) $C(0,4)$ и круг садржи тачку $(5,-8)$;

в) $C(1,-2)$ и круг додирује x-осу;

г) $C(-5,4)$ и круг додирује y-осу.

---

* ***Дефиниција***: ***Кружна линија*** је скуп тачака у равни са својством да су све тачке тог скупа на једнаком растојању r од једне сталне тачке C те равни која се назива ***центар*** (***средиште***) кружне линије. Ма која дуж која спаја центар кружне линије са неком тачком кружне линије зове се ***полупречник***, а број r је ***дужина полупречника*** кружне линије. Често се и за број r кратко каже да је полупречник кружне линије.

У нашој уџбеничкој литератури користе се термини ***круг***, ***кружница*** и ***кружна линија***. Под кружницом или кружном линијом подразумева се скуп описан у датој дефиницији, док се под кругом, нажалост двосмислено, понекад подразумева исто што и под кружном линијом у смислу дате дефиниције, а понекад унија кружне линије и унутрашње области ограничене овом кружном линијом.

806. Одредити једначину кружне линије којој је дуж AB пречник, где је $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: а) $A(1,1)$, $B(5,3)$; б) $A(1,5)$, $B(3,7)$; в) $A(2,6)$, $B(-4,-2)$; г) $A(-5,3)$, $B(1,-1)$; д) $A(1,1)$, $B(-3,2)$.

807. Одредити координате центра и полупречник круга чија је једначина: а) $9x^2+9y^2+36x-18y+20=0$; б) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$; в) $x^2+y^2+2x-3=0$; г) $x^2+y^2-4y-21=0$.

808. Написати једначину круга који пролази кроз тачку $A(9,-5)$ а центар му се налази у пресеку правих $2x+y-15=0$ и $x-3y+17=0$.

809. Наћи једначину круга који пролази кроз тачку $A(3,-6)$ и концентричан је са кругом $x^2+y^2+6x-4y-62=0$.

810. Одредити једначину круга концентричног кругу $x^2+y^2-4x-4y=8$ са полупречником већим за 1.

811. Испитати положај тачке $M(1,2)$ у односу на сваки од следећих кругова: а) $x^2+y^2=1$; б) $x^2+y^2=5$; в) $x^2+y^2=9$; г) $x^2+y^2-8x+4y-5=0$; д) $x^2+y^2-10x+8y=0$.

812. Наћи једначину круга полупречника $r=3$ који додирује обе координатне осе у првом квадранту.

813. Одредити координате средишта круга који додирује x-осу, садржи тачку $M(-1,2)$ и чији је полупречник $r=5$.

814. Наћи једначину круга који: а) додирује x-осу у координатном почетку и садржи $A(0,4)$; б) додирује y-осу у тачки $A(0,-3)$ и има полупречник $r=2$.

815. Наћи једначину круга који додирује обе координатне осе и садржи тачку: а) $A(2,1)$; б) $A(2,9)$.

816. Наћи једначину круга који додирује координатне осе а центар му је на правој (l): $2x-y+3=0$.

817. Написати једначину круга који садржи тачке A и B чији центар припада правој p: а) $A(3,0)$, $B(-1,2)$, p: $x-y+2=0$; б) $A(5,4)$, $B(-1,2)$, p: $x-2y-3=0$; в) $A(-3,-4)$, $B(5,2)$, p: $3x+y-2=0$; г) $A(3,5)$, $B(4,2)$, p: $x+y-5=0$.

818. Написати једначину круга који садржи тачке $M(0,-1)$ и $N(2,-3)$, а центар му припада кругу $x^2+y^2=9$.

819. Написати једначину круга који пролази кроз тачке: а) $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(2,0)$; б) $A(-2,9)$, $B(-4,5)$, $C(5,8)$; в) $A(0,4)$, $B(3,1)$, $C(6,4)$; г) $A(1,0)$, $B(6,2)$, $C(1,8)$.

820. Наћи једначину круга који додирује осу Ox у координатном почетку и сече осу Oy у тачки $M(0,-10)$.

821. Одредити једначину заједничке тетиве кругова $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-6x-6y+2=0$.

822. Дат је круг $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ чији је центар тачка C. Ако круг сече x-осу у тачкама A и B, наћи површину троугла ABC и унутрашње углове тог троугла.

823. Наћи једначину круга који садржи тачке пресека круга $x^2+y^2+4x-4y=0$ и праве $y=-x$ и тачку $A(4,4)$.

824. Права $y = mx$, $m > 0$, сече круг $(x-1)^2 + y^2 = 1$ у тачкама A и B. Одредити координате тих тачака и израчунати m ако је $AB = \sqrt{3}$.

825. Одредити једначину круга чији је центар $C(0,-5)$, а који додирује праву $4x + 3y - 10 = 0$.

826. Написати једначину круга са центром $C(3,-1)$ који на правој $2x-5y+18 = 0$ одсеца тетиву дужине 6.

827. Одредити параметар λ тако да је растојање средишта круга $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ од праве $x - (\lambda+2)y - \lambda - 4 = 0$ једнако $5/\sqrt{2}$.

828. Наћи пресечне тачке датог круга и дате праве: а) $x^2 + y^2 = 41$, $y - x = 1$; б) $x^2 + y^2 = 41$, $x + y = 9$; в) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$, $x + y + 8 = 0$.

829. Одредити међусобни положај круга $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ и правих: а) $x - y - 4 = 0$; б) $3x - 4y + 36 = 0$; в) $x - y - 5 = 0$.

830. Дата је права $x + 2y + 1 = 0$ и круг $x^2 + y^2 = 5$. Одредити једначине тангената датог круга које су: а) паралелне са датом правом; б) нормалне на дату праву; в) са датом правом граде угао од 45°.

831. Одредити једначину тангенте круга k у тачки додира $M(x_1, y_1)$: а) $x^2+y^2 = 5$, $M(1,-2)$; б) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$, $M(0,3)$; в) $x^2 + y^2 = 20$, $M(4,2)$; г) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, $M(5,5)$; д) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$, $M(1,-2)$; ђ) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, $M(2,1)$.

832. Наћи једначине тангената круга конструисаних из тачке $M(x_1, y_1)$ на круг k:

а) k: $x^2 + y^2 = 25$, $M(7,1)$;
б) k: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, $M(0,0)$;
в) k: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, $M(-4,3)$;
г) k: $x^2 + y^2 = 32$, $M(8,8)$;
д) k: $x^2 + y^2 + 2y = 0$, $M(1,1)$.

833. Одредити једначину нормале круга у његовој тачки M, ако је:

а) k: $x^2+y^2+4x-4y-17 = 0$, $M(2,5)$; б) k: $x^2+y^2-6x-8y+17 = 0$, $M(5,6)$; в) k: $x^2 + y^2 = 25$, $M(3,4)$.

834. Наћи једначине тангенти круга k које су паралелне правој l, ако је:

а) k: $x^2 + y^2 = 5$, l: $2x - y + 1 = 0$.

б) k; $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$, l: $4x - 3y + 10 = 0$.

835. Наћи једначине тангената датог круга k које су нормалне на датој правој p, ако је:

а) k: $x^2 + y^2 = 4$, p: $x + y = 2$; б) k: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$, p: $y = 3x$.

836. Наћи дужину тангенте конструисане из тачке $M(x,y)$ на круг k: а) $M(2,6)$, k: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$; б) $M(0,-1)$, k: $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 16$; в) $M(0,0)$, k: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$.

837. Из тачке $P(2,-3)$ конструисане су тангенте круга $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 4$. Наћи једначину тетиве која садржи додирне тачке.

838. Одредити координате центра $M(x,y)$ и дужину полупречника круга описаног око троугла ABC ако је: а) $A(1,2)$, $B(-1,0)$, $C(3,-1)$; б) $A(-1,3)$, $B(0,2)$,

$C(1,-1)$; в) $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(2,-2)$; г) $A(7,7)$, $B(0,8)$, $C(-2,4)$; д) $A(1,2)$, $B(1,-2)$, $C(0,-1)$.

839. Одредити једначину круга који је концентричан са кругом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и пролази кроз тачку $M(1,-4)$.

840. Дат је круг $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и тачка $A(5,4)$. Наћи једначину круга чији је центар тачка A и који додирује споља дати круг.

841. Одредити све тачке на кругу $x^2 + y^2 = 2$ тако да тангенте круга у тим тачкама граде са x-осом угао од $135°$.

842. Центар круга припада правој $x + y = 0$. Наћи једначину тог круга ако он садржи тачке пресека кругова $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 50$ и $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$.

843. На кругу $x^2 + y^2 = 5$ одредити тачку једнако удаљену од праве $y = -x - 5$ и тачке $A(-3,-2)$.

844. Одредити дужину полупречника круга $(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ тако да се дуж чије се крајње тачке $A(-1,2)$ и $B(4,1)$ налази ван круга.

845. Наћи координате тачке S која полови мањи лук $\widehat{M_1M_2}$ круга $x^2 + y^2 = 25$, ако је $M_1(5,0)$, $M_2(3, y > 0)$.

846. Дат је круг $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Одредити једначину тетиве круга која садржи тачку $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ и подељена је том тачком на два једнака дела.

847. Написати једначину тетиве круга $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ која пролази кроз тачку $A(5,7)$, која је средиште тражене тетиве.

848. Кроз тачку $T\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ унутар круга $(x-1)^2 + y^2 = 4$ конструисана је тетива чије је средиште тачка T. Одредити једначину праве којој припада та тетива.

849. За које вредности реалног параметра k права $y = kx$: а) сече круг $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$; б) додирује овај круг; в) нема заједничких тачака са овим кругом.

850. За које вредности параметра n права $y = 2x + n$ сече круг $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$.

851. За колико треба да се паралелно помери права $3x + 4y = 50$ да би се добила тангента круга $x^2 + y^2 = 25$? Како гласи једначина добијене тангенте?

852. У зависности од параметра m одредити међусобни положај круга: а) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ и праве $y = mx$; б) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 = 0$ и праве $y = x + n$.

853. Права $x + y\sqrt{3} = 4$ је тангента круга чији је центар у координатном почетку. Наћи дужину мањег кружног лука између y-осе и тачке додира тангенте.

854. Написати једначину круга који додирује две паралелне праве $2x + y - 5 = 0$ и $2x + y + 15 = 0$, при чему једну у тачки $A(2,1)$.

855. Конструисан је круг полупречника $r = 12$ са центром у координатном почетку. Одредити тачку $A(a,0)$ $(a > 0)$ и једначине тангенти из A на круг тако да је дужина одговарајућих тангентних дужи $l = 35$.

856. Одредити угао под којим се види круг $x^2 + y^2 = 16$ из тачке $P(8,0)$.

857. Из тачке $A(4,2)$ конструисане су тангенте на круг $x^2+y^2=10$. Израчунати угао који те тангенте међу собом граде.

858. Под којим углом права $y=\frac{4}{3}x$ сече круг $x^2+y^2=25$?

859. Одредити једначину круга који: а) садржи координатни почетак, а праве $3x-4y+8=0$ и $3x+4y+8=0$ су му тангенте; б) садржи тачку $A(1,1)$, а праве $7x+y-3=0$ и $x+7y-3=0$ су му тангенте.

860. Наћи једначину круга који садржи тачку $A(x,y)$ и додирује две паралелне праве l_1 и l_2: а) $A(1,0)$, l_1: $2x+y+2=0$, l_2: $2x+y-18=0$; б) $A(2,1)$, l_1: $2x+y-5=0$, l_2: $2x+y+15=0$.

861. Дате су тачке $A(-2,5)$, $B(2,-3)$ и права $3x+4y-19=0$. Одредити једначину круга који садржи тачке A и B и додирује дату праву, а затим одредити координате додирне тачке.

862. Наћи једначину круга који додирује две дате праве: $4x-3y+10=0$ и $4x-3y-30=0$, а чији центар припада правој $2x+y=0$.

863. Одредити центар $M(x,y)$ и полупречник r круга уписаног у троугао ABC, ако је: а) $A(9,2)$, $B(0,20)$, $C(-15,-10)$; б) $A(\frac{9}{5},\frac{2}{5})$, $B(0,4)$, $C(-3,-2)$.

864. Дате су једначине страница троугла: $7x+y-25=0$, $x-2y+5=0$, $x+3y+5=0$. Наћи: а) једначину круга описаног око троугла; б) однос површина круга и троугла.

865. Тачке $A(5,5)$, $B(-2,4)$ и $C(2,-4)$ су темена троугла ABC. Наћи једначину круга који садржи тачку A, а чији је центар у ортоцентру троугла ABC.

866. У круг са центром у координатном почетку уписан је троугао чије две странице имају једначине $x+3y-5=0$ и $3x-y=5$. Наћи једначину треће странице и површину тог троугла.

867. Испитати узајамни положај кружних линија:

а) k_1: $x^2+y^2-2x-6y+6=0$, k_2: $x^2+y^2-10x-8y+40=0$;

б) k_1: $x^2+y^2-8x-18y+93=0$, k_2: $x^2+y^2-8x-8y+23=0$;

в) k_1: $x^2+y^2=25$, k_2: $2x^2+2y^2-4x-3y-25=0$;

г) k_1: $x^2+y^2-10x-20=0$, k_2: $x^2+y^2+2x-4y-20=0$;

д) k_1: $x^2+y^2+8y+12=0$, k_2: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

ђ) k_1: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$, k_2: $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

868. Израчунати одстојање од центра круга $x^2+y^2=2x$ до праве одређене пресечним тачкама кругова $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ и $x^2+y^2-3x+7y-25=0$.

869. Под којим углом се секу линије: а) $x-3y=5$ и $x^2+y^2=5$; б) $x^2+y^2=3$ и $(x-1)^2+y^2=4$; в) $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$?

870. Наћи једначине заједничких тангенти кругова: а) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ и $x^2+y^2+4x+2y-4=0$; б) $x^2+y^2=2$ и $(x-2)^2+y^2=8$; в) $x^2+(y+1)^2=5$ и $x^2+(y-4)^2=20$.

871. Доказати да се око четвороугла $ABCD$ може описати круг и наћи једначину тог круга, ако је $A(5,6)$, $B(2,7)$, $C(-3,2)$, $D(-2,-1)$.

872. Одсечак праве чија је једначина $3x + 2y = 6$ између координатних оса је хипотенуза једнакокраког правоуглог троугла. Наћи координате темена тог троугла.

873. Наћи једначину круга уписаног у троугао чија једна страница припада x-оси, друга правој p: $3x - 4y + 36 = 0$, а трећа правој q, симетричној правој p у односу на y-осу.

874. На кругу $x^2+y^2-2x-4y = 20$ наћи тачку A најближу правој $3x+4y+34 = 0$ и израчунати одстојање тачке A од те праве.

875. Дат је круг $x^2 + y^2 = 34$ и права која садржи тачке $M(9, -2)$ и $N(6, 10)$. Одредити координате тачке A праве најближе кругу и тачке B круга најближе правој.

876. У пресечним тачкама кругова $x^2 + y^2 = 10$ и $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ конструисане су тангенте на оба круга. Наћи површину четвороугла којег образују те тангенте.

877. Наћи једначину круга који дате кругове k_1, k_2, k_3 сече под правим углом: k_1: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7$; k_2 $(x-3)^2 + y^2 = 5$; k_3: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

878. У тачки $A(r, 0)$ лука круга $x^2 + y^2 = r^2$ у првом кавдранту конструисана је тангента на круг. Одредити на тој тангенти тачку T тако да је површина трапеза одређеног координатним осама и тангентама у A и из тачке T једнака датој вредности k^2.

879. У равни xOy одредити све тачке чије координате задовољавају релацију: а) $|x^2 + y^2 - 1| + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; б) $|x^2 + y^2 - 2| = 2(x + y)$; в) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$.

880. У равни xOy одредити све тачке чије координате задовољавају неједнакости: а) $1 \le x^2 + y^2 \le 16$; б) $x^2 + y^2 \le 9$, $x + y \ge 0$; в) $y^2 \le 4 - x^2$, $3x + 2y - 3 \le 0$; г) $4 \le x^2 + y^2 \le 2(|x| + |y|)$.

881. Дате су тачке $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ и $C(-2, 2)$. Одредити тачку из које се дужи AB и AC виде под правим углом.

882. Дат је круг k: $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ и права p: $x - 7y - 9 = 0$, која сече круг у тачкама A и B. У овим тачкама конструисане су тангенте на круг k; оне се секу у тачки C. а) Ако је S средиште круга k, доказати да је четвороугао $ASBC$ квадрат. б) Одредити површину пресека круга описаног око квадрата $ASBC$ и круга k.

883. Дата је једначина $x^2 - 2x + y^2 - 6y = d$. а) Одредити d тако да ова једначина буде једначина круга; б) одредити d тако да дуж чије су крајње тачке $A(-1, 2)$ и $B(4, 1)$ буде изван круга.

884. Дате су тачке $A(-2, 1)$, $B(7, -2)$, $C(2, 7)$, $D(8, 1)$. За које вредности параметра r круг $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$ сече сваку од дужи AB и CD у по две тачке?

885. Наћи геометријско место тачака $M(x, y)$ тако да је однос растојања сваке тачке од сталних тачака D_1 и D_2 увек $D_1M = \lambda D_2M$, ако је: а) $D_1(1, 1)$, $D_2(6, 6)$, $\lambda = \frac{2}{3}$; б) $D_1(1, -1)$, $D_2(7, 2)$, $\lambda = 2$; в) $D_1(-3, 1)$, $D_2(2, 1)$, $\lambda = \frac{5}{2}$.

6.4. Елипса

1. Једначина *елипсе* чије *жиже* (*фокуси*), тачке $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, припадају x-оси симетрично у односу на координатни почетак је

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где је $b^2 = a^2 - c^2$.

— Параметри a и b су дужине *велике* односно *мале полуосе* елипсе.

— Дужине потега (радијус-вектора) тачке $M(x,y)$ на елипси су:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \qquad r_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

— *Линеарни ексцентрицитет* је параметар $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (растојање жиже од центра елипсе).

— *Нумерички ексцентрицитет* је параметар $e = \dfrac{c}{a}$

— *Директрисе* елипсе су праве чије су једначине:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{e}, \quad \text{тј.} \quad x = \frac{a^2}{c} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a^2}{c}.$$

— *Параметар* елипсе је $p = \dfrac{b^2}{a}$.

2. Услов да права $y = kx + n$ *додирује* елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ је $a^2k^2 + b^2 = n^2$.

3. Једначина *тангенте* елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ у њеној тачки $M(x_1, y_1)$ је:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

886. Израчунати дужину полуоса, координате фокуса и нумерички ексцентрицитет елипсе: а) $25x^2 + 169y^2 = 4225$; б) $9x^2 + 25y^2 = 225$.

887. Дата је елипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Одредити ексцентрицитет, параметар и једначине директриса.

888. На елипси $24x^2 + 30y^2 = 720$ наћи тачку чије је растојање од мале осе једнако 5.

889. Познате су две тачке елипсе: $M_1\left(3, \frac{12}{5}\right)$ и $M_2\left(\frac{5}{3}\sqrt{5}, 2\right)$. Написати једначину елипсе (E).

890. Написати једначину елипсе ако је:

а) велика оса $2a = 6$, а нумерички ексцентрицитет $e = \frac{1}{2}$;

б) $a + b = 25$ и линеарни ексцентрицитет $c = 5$;

в) $b = 3$ и тачка $M(-2\sqrt{5}, 2)$ на елипси;

г) $c = 4$ и тачка $M(\sqrt{15}, 1)$ на елипси.

891. Растојања жиже елипсе од крајева велике осе износе 7 и 1. Наћи једначину ове елипсе.

892. Наћи једначину елипсе ако је: а) велика полуоса $a = \sqrt{6}$, а мала оса се види из жиже под углом од $90°$; б) растојање између жижа једнако растојању између крајева велике и мале осе и ако је $b = 3$.

893. Израчунати дужину тетиве елипсе $x^2 + 2y^2 = 18$ која полови угао између координатних оса.

894. На елипси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ наћи тачку чији је производ радијус-вектора једнак квадрату мале полуосе.

895. Одредити коефицијенте a^2 и b^2 у једначини елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ако та елипса садржи тачке: а) $A_1(2,3)$, $A_2(4,-1)$; б) $B_1(-8,3)$, $B_2(6,-4)$.

896. Наћи дужине и једначине радијус-вектора конструисаних из тачке $M(2, y < 0)$ елипсе $5x^2 + 9y^2 = 45$.

897. На елипси $36x^2 + 100y^2 = 3600$ наћи тачке чије је растојање од десне жиже четири пута веће од његовог растојања од леве жиже.

898. Одредити пресечне тачке праве и елипсе: а) $2x - 5y = 0$, $24x^2 + 30y^2 = 720$; б) $2x - y - 9 = 0$, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$.

899. На правој $x = -5$ одредити тачку једнако удаљену од „леве“ жиже и „горњег“ темена елипсе $x^2 + 5y^2 = 20$.

900. Кроз фокус $F(c, 0)$ елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ конструисана је тетива нормална на велику осу. Наћи дужину ове тетиве.

901. У елипсу $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ уписан је правоугаоник тако да му две наспрамне странице садрже фокусе елипсе. Израчунати површину тог правоугаоника.

902. Дата је елипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и права $y = -x + b$, $b \in \mathbf{R}$. Одредити за које вредности параметра b права: а) додирује дату елипсу; б) сече дату елипсу; в) нема са елипсом заједничких тачака.

903. Наћи површину четвороугла чија два темена леже у жижама елипсе $x^2 + 5y^2 = 20$, а друга два се поклапају са крајевима мале осе.

904. Израчунати дужину страница квадрата уписаног у елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

905. У елипсу $x^2 + 4y^2 = 36$ уписан је квадрат. Одредити дужину странице тог квадрата.

906. Наћи једначине тангената које дату елипсу додирују у тачки $A(x_1, y_1)$:

а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, $A(2,-3)$; б) $2x^2 + 3y^2 = 21$, $A(3,1)$;

в) $4x^2 + 9y^2 = 22$, $A(1,\sqrt{2})$; г) $3x^2 + 4y^2 = 48$, $A(2,-3)$;

д) $x^2 + 3y^2 = 16$, $A(2,2)$.

907. Одредити једначине тангенти на елипсу (E), конструисаних из тачке $A(x, y)$ ако је:

а) (E): $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{18}=1$, $A(12,-3)$; б) (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $A(10,4)$;

в) (E): $x^2+4y^2=100$, $A(2,7)$; г) (E): $19x^2+25y^2=475$, $A(10,-8)$;

д) (E): $9x^2+15y^2=135$, $A(-6,3)$; ђ) (E): $25x^2+24y^2=600$, $A(-16,9)$.

908. Елипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ садржи тачку $P\left(3,\frac{12}{5}\right)$ и додирује праву $4x+5y=25$. Одредити једначину елипсе и координате додирне тачке.

909. Одредити једначине тангенти елипсе (E) које су паралелне правој l, ако је:

а) E: $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24}=1$, l: $2x-y+17=0$;

б) E: $9x^2+16y^2=144$, l: $x+y-1=0$;

в) E: $x^2+4y^2=10$, l: $3x+2y+7=0$.

910. Одредити једначине тангенти елипсе (E) које су нормалне на праву q, ако је:

а) E: $25x^2+169y^2=4225$, q: $13x+12y-115=0$;

б) E: $x^2+4y^2=20$, q: $2x-2y-13=0$;

в) E: $3x^2+4y^2=120$, q: $2x-y+7=0$;

г) E: $x^2+4y^2=16$, q: $3x-2y+18=0$.

911. Одредити једначину тангенте и нормале елипсе (E) у тачки $D(x_1,y_1)$:

а) E: $3x^2+4y^2=12$, $D(-1,y_1>0)$; б) E: $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$, $D(5,y_1<0)$.

912. Одредити једначину елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ако су познате две њене тангенте: а) $x+y-8=0$ и $x+3y+16=0$; б) $x+y=5$ и $x-4y=10$.

913. Одредити полуосе елипсе $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ако она додирује две дате праве $3x-2y-20=0$ и $x+6y-20=0$.

914. Наћи једначине заједничких тангенти двеју елипси:

а) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ и $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$; б) $\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$ и $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

915. а) Одредити велику полуосу елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{36}=1$, ако је познато да једна тангента те елипсе има једначину $2x+y-10=0$

б) Одредити малу полуосу елипсе $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, ако је познато да једна тангента ове елипсе има једначину $3x+2y-20=0$.

916. Испитати положај тачака $A(6,-3)$, $B(-2,5)$, $C(3,-6)$, $D(\sqrt{50},0)$, $E(-4,2\sqrt{6})$ и $G(1,\sqrt{26})$ у односу на елипсу $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

917. Одредити једначину елипсе са центром у тачки $S(-2, 1)$ која садржи тачке $A(0, 4)$ и $B(4, 2)$, а чије су осе паралелне координатним осама.

918. У елипсу $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ уписан је једнакостранични троугао чије је једно теме тачка $A(6, 0)$. Наћи координате остала два темена.

919. Израчунати површину троугла чија су два темена жиже елипсе $x^2 + 4y^2 = 36$, а треће теме је у оној тачки елипсе у којој су радијус вектори међу собом нормални.

920. Тетива елипсе $x^2 + 3y^2 = 36$ на правој $x - y = 6$ је основа једнакокраког троугла чији врх припада оси Oy. Наћи површину тог троугла.

921. Одредити једначине тангенти елипсе E: $x^2 + 3y^2 = 28$ које са правом $x - 5y - 20 = 0$ граде угао од 45°

922. Одредити једначине тангенти елипсе E: $3x^2 + 8y^2 = 45$ таквих да је њихово одстојање од центра елипсе једнако 3.

923. Одредити тачку на елипси (E) најближу правој (p) ако је:

а) E: $x^2 + 4y^2 = 4$, p: $y = \frac{2}{3}x + 10$; б) E: $x^2 + 4y^2 = 20$, p: $x + y = 7$.

924. У тачкама $A_1(3, y > 0)$, $A_2(4, y > 0)$ елипсе $4x^2 + 25y^2 = 100$ конструисане су тангенте. Израчунати површину троугла ограниченог тим тангентама и x-осом.

925. Конструисана је тангента елипсе $3x^2 + 5y^2 = 120$ тако да на позитивним деловима координатних оса одсеца једнаке одсечке. Одредити једначину те тангенте, а затим наћи површину четвороугла ограниченог том тангентом, нормалама конструисаним из жижа елипсе на тангенту и x-осом.

926. Из тачака $A(0, 4)$ и $C(0, -4)$ конструисане су тангенте на елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$. Израчунати површину четвороугла ограниченог тим тангентама.

927. Елипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и круг $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ имају три заједничке тачке A, B и C. а) Одредити координате тачака A, B и C; б) Наћи једначине тангената на круг у тачкама A, B и C; в) Израчунати површину троугла који образују те три тангенте.

928. Елипса $16x^2 + 27y^2 = 576$ и круг $x^2 + y^2 = 25$ имају четири заједничке тачке. У тим тачкама конструисане су тангенте на круг. Израчунати површину четвороугла који образују те тангенте.

929. Наћи геометријско место тачака чије је растојање од тачке $A(4, 0)$ једнако половини растојања од праве $x - 16 = 0$.

930. Наћи геометријско место тачака таквих да деле ординате круга k: $x^2 + y^2 = 25$ у односу $3 : 5$.

931. Дуж $AB = 12$ клизи крајем A по оси Oy, а крајем B по оси Ox. Одредити геометријско место тачака таквих да је растојање тачке $M(x, y)$ на дужи AB од тачке A једнако 8.

932. Одредити једначину геометријског места тачака у равни једнако удаљених од кругова $(x + 2)^2 + y^2 = 64$ и $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

933. Доказати да је производ одстојања фокуса елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до произвољне њене тангенте једнак b^2.

6.5. Хипербола

1. Једначина *хиперболе* чије *жиже* (*фокуси*), тачке $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, припадају x-оси симетрично у односу на координатни почетак је

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{где је} \quad b^2=c^2-a^2.$$

— *Реална оса* хиперболе је права која пролази кроз обе жиже хиперболе, док је њена *имагинарна оса* права управна на реалној оси у тачки која је средиште дужи са крајевима у пресецима реалне осе хиперболе и саме хиперболе.

— Параметри a и b су дужине *реалне* односно *имагинарне полуосе* хиперболе.

— Дужине потега (радијус-вектора) тачке $M(x,y)$ на хиперболи су:

$$r_1=\frac{c}{a}x-a, \quad r_2=\frac{c}{a}x+a.$$

— *Линеарни ексцентрицитет* је параметар $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

— *Нумерички ексцентрицитет* је параметар $e=\frac{c}{a}$

— *Директрисе* хиперболе су праве чије су једначине:

$$x=\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x=-\frac{a}{e}, \quad \text{тј.} \quad x=\frac{a^2}{c} \quad \text{и} \quad x=-\frac{a^2}{c}.$$

— *Параметар* хиперболе је $p=\frac{b^2}{a}$.

2. Једначине *асимптота* хиперболе су: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

3. Услов да права $y=kx+n$ *додирује* хиперболу $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ је

$$a^2k^2-b^2=n^2.$$

4. Једначина *тангенте* хиперболе у њеној тачки $M(x_1,y_1)$ је $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

934. Дата је хипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Одредити: а) координате фокуса; б) нумерички ексцентрицитет хиперболе; в) једначине асимптота и директриса.

935. Написати једначину хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је: а) одстојање темена је 8, а одстојање фокуса 10; б) реална полуоса једнака је 5, а темена хиперболе полове одстојање између центра криве и фокуса; в) реална оса једнака је 6, а хипербола садржи тачку $M(9,-4)$.

936. Како гласи једначина хиперболе: а) ако су фокуси $F_1(-10,0)$ и $F_2(10,0)$, а тачка $M(12,3\sqrt{5})$ припада хиперболи; б) ако је дужина реалне осе 6 и тачка $M(9,-4)$ припада хиперболи; в) ако је $a=5$, а свако теме дели растојање између центра и жиже на два једнака дела?

937. Одредити коефицијенте a^2 и b^2 у једначини хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, ако та хипербола садржи тачке: а) $M_1(2,3)$, $M_2(7,12)$; б) $M_1(-1,1)$, $M_2(2,-3)$.

938. Одредити положај тачака $A(4,1)$, $B(1,-2)$, $C(\sqrt{2},1)$ у односу на хиперболу $x^2-y^2=1$.

939. Наћи дужине радијус-вектора тачке $P(5,y>0)$ на хиперболи $4x^2-5y^2=20$.

940. Написати једначину хиперболе чији је параметар $2p=32$ и линеарни ексцентрицитет $c=15$.

941. Наћи тачке пресека праве (l) и хиперболе (H), ако је:

а) $l\colon\ 2x-y-10=0$, $H\colon\ 5x^2-20y^2=100$;

б) $l\colon\ 4x-3y-16=0$, $H\colon\ 16x^2-25y^2=400$;

в) $l\colon\ 2x-y+1=0$, $H\colon\ 4x^2-9y^2=36$.

942. Израчунати површину троугла одређеног асимптотама хиперболе $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ и правом $9x+2y-24=0$.

943. Одредити растојање темена хиперболе од њених асимптота.

944. Израчунати одстојање жижа хиперболе $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=-1$ од њених асимптота.

945. Кроз тачку $A(2,-5)$ конструисане су праве паралелне асимптотама хиперболе $x^2-4y^2=4$. Наћи једначине тих правих.

946. Хипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ садржи тачку $M(2,3)$, а њена једна асимптота гради са x-осом угао од 60°. Наћи једначину хиперболе.

947. Наћи дужину тетиве коју дата хипербола одсеца на датој правој:

а) $x^2-2y^2=2$, $3x-4y=2$; б) $9x^2-y^2=144$, $x-y+4=0$.

948. Из фокуса хиперболе $9x^2-16y^2=144$ конструисана је нормала на асимптоту. Израчунати површину троугла одређеног том нормалом, асимптотом и x-осом.

949. Кроз леви фокус хиперболе $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ конструисана је нормала на x-осу. Одредити одстојање фокуса и тачака пресека те нормале и хиперболе.

950. Доказати да су пресечне тачке елипсе $5x^2+20y^2=100$ и хиперболе $3x^2-12y^2=36$ темена правоугаоника и наћи једначине правих одређених његовим страницама.

951. Дата је хипербола $9x^2-4y^2=36$. Израчунати површину троугла чија су темена координатни почетак, десна жижа и тачка на асимптоти која има исту апсцису као жижа, а припада I квадранту.

952. На хиперболи $9x^2-16y^2=144$ одредити тачку која је два пута ближа десној него левој жижи те хиперболе.

953. Одредити једначине тангенти конструисаних из дате тачке на дату хиперболу: а) $A(1,0)$, $2x^2-9y^2=18$; б) $B(0,3)$, $x^2-y^2=9$; в) $C(-3,5)$, $3x^2-y^2=3$; г) $D(2,0)$, $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$.

954. Одредити једначину тангенте хиперболе (H) у тачки D, ако је:
а) H; $x^2-4y^2=64$, $D(10,y_1>0)$; б) H: $9x^2-y^2=144$, $D(x_1<0,-9)$;
в) H: $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, $D(5,y_1<0)$; г) H: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$, $D(4,2)$.

955. Одредити једначину тангенте хиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ која се налази на једнаком растојању од центра и десног фокуса.

956. Одредити једначину тангенте хиперболе $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ паралелне правој: а) $x+y-7=0$; б) $x-2y=0$.

957. Одредити величину b^2 у једначини хиперболе $b^2x^2-16y^2=16b^2$, знајући да је права $15x+16y-36=0$ тангента те хиперболе.

958. Одредити једначину хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ако су једначине двеју њених тангенти $5x-6y-16=0$ и $13x-10y-48=0$.

959. Дата је елипса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. Одредити једначину хиперболе чији су фокуси у теменима елипсе и чија су темена фокуси елипсе.

960. Написати једначину хиперболе чији је нумерички ексцентрицитет $e=\frac{5}{4}$ и која је конфокална са елипсом $24x^2+49y^2=1176$.

961. Одредити тачке хиперболе (H) чије је растојање од жиже једнако d, ако је: а) H: $16x^2-9y^2=144$, $F_1(-c,0)$, $d=7$; б) H: $36x^2-64y^2=2304$, $F_2(+c,0)$, $d=4{,}5$.

962. Наћи скуп тачка у равни које задовољавају услов:
а) $x^2-y^2-36<0$; б) $4x^2-9y^2-36>0$;
в) $x^2-y^2>4$, $x^2+y^2<16$; г) $9x^2-25y^2<225$, $9x^2+25y^2>225$.

963. Наћи угао између асимптота хиперболе код које је $c=a\sqrt{2}$.

964. Дата је једнакостранична хипербола $x^2-y^2=8$. Наћи једначину конфокалне хиперболе кој садржи тачку $M(-5,3)$.

965. Доказати да је растојање фокуса хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ од асимптоте једнако полуоси b.

966. Одредити све тачке на хиперболи $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ које су три пута ближе једној асимптоти него другој.

967. На хиперболи (H) одредити тачку $M(x,y)$ у којој су радијус вектори међусобно нормални: а) H: $9x^2-16y^2=144$; б) H: $x^2-4y^2=144$.

968. Одредити угао између асимптота $y=\pm\frac{b}{a}x$ хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

969. Колике су полуосе хиперболе $x^2 - 4y^2 = C$, ако је права $x - y\sqrt{3} - 2 = 0$ тангента те хиперболе? Затим одредити површину троугла одређеног тангентом и нормалом у додирној тачки D и x-осом.

970. Наћи једначину хиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ако су њене асимптоте $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ и ако је једна њена тангента $5x - 6y - 8 = 0$.

971. У тачки $D\left(-\frac{5}{3}, y > 0\right)$ конструисана је тангента елипсе $4x^2 + 5y^2 = 20$. Ова права одређује тетиву хиперболе $4x^2 - y^2 = 36$. Колика је дужина те тетиве?

972. Одредити једначину круга чије је средиште на x-оси и који сече хиперболу $3x^2 - 4y^2 = 12$ под правим углом у тачки $M(4, -3)$.

973. Познато је да је права $2x - 3y = 3$ тангента хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и да је права $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x$ једна њена асимптота. Наћи једначину хиперболе.

974. Одредити тачку на хиперболи $3x^2 - 4y^2 = 72$ најближу правој $3x + 2y + 1 = 0$.

975. Која је тангента хиперболе $5x^2 - 7y^2 = 13$ подједнако удаљена од тачака $A(7, 0)$ и $B(0, -10)$?

976. Тангента хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ у тачки $M(x_0, y_0)$ сече x-осу у тачки T. Ако је M' пројекција тачке M на x-осу, доказати да је производ $OT \cdot OM'$ константан и не зависи од положаја тачке M на хиперболи.

977. Доказати да је производ одстојања произвољне тачке хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ од њених асимптота константан.

978. Одредити геометријско место тачака чије је растојање од тачке $A(0, 4)$ једнако $\frac{4}{3}$ њеног растојања од праве $4y - 9 = 0$.

979. Права се креће тако да је површина троугла који она образује са координатним осама константна. Наћи геометријско место тачака (скуп тачака) које деле одсечак те праве између координатних оса у датом односу λ.

6.6. Парабола

1. Једначина *параболе* чија је *жижа* (*фокус*) тачка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а *директриса* права $x = -\frac{p}{2}$ је

$$y^2 = 2px.$$

Једначина параболе чија је жижа тачка $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, а директриса $y = -\frac{p}{2}$ је

$$x^2 = 2py.$$

2. Права $y = kx + n$ додирује параболу $y^2 = 2px$ ако је $p = 2kn$. $-\frac{1}{k}$

3. Једначина *тангенте* параболе $y^2 = 2px$ у њеној тачки $M(x_1, y_1)$ је $y_1 = kx_1 + n$ $n = y_1 - kx_1$ u.l.

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

980. Написати једначину параболе ако је: а) симетрична у односу на x-осу, садржи координатни почетак и тачку $M(1, -4)$; б) симетрична у односу на y-осу, садржи координатни почетак и тачку $M(6, -2)$; в) симетрична у односу на x-осу и удаљеност од фокуса до темена, које је у координатном почетку, једнако је 3.

981. Наћи координате фокуса и једначину директрисе параболе:

а) $y^2 = 24x$; б) $y^2 = -8x$; в) $y = x^2$.

982. Одредити координате темена T, параметра $2p$, координате фокуса и једначину осе симетрије s параболе:

а) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$; б) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$;

в) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$.

983. Наћи једначину параболе ако су дати фокус и директриса:

а) $F(3, 0)$, $x = -3$; б) $F(7, 2)$, $x = 5$; в) $F(4, 3)$, $y = -1$.

984. На параболи (P) наћи тачку $M(x, y)$ ако је дат радијус-вектор:

а) P: $y^2 = 8x$, $r = 20$; б) P: $y^2 = 16x$, $r = 13$.

985. Наћи дужину радијус-вектора тачке $M(x, y)$ параболе (P):

а) $M(7, y)$, P: $y^2 = 20x$; б) $M(x, 6)$, P: $y^2 = 12x$.

986. Дата је парабола $y^2 = 3x$ и права p: $3x + 5y + 1 = 0$. Одредити једначину праве n која садржи фокус F параболе и нормална је на правој p.

987. Наћи координате тачака пресека праве и параболе: а) $x + y - 3 = 0$, $x^2 = 4y$; б) $3x + 4y - 12 = 0$, $y^2 = -9x$; в) $3x - 2y + 6 = 0$, $y^2 = 6x$.

988. У равни xOy одредити све тачке чије координате задовољавају релацију: а) $y^2 - 4x > 0$, $x^2 + y^2 - 4 < 0$; б) $y^2 - 4x < 0$, $4x^2 + y^2 - 4 < 0$.

989. Права $2x - y - 4 = 0$ сече параболу $y^2 = 4x$ у тачкама A и B. Израчунати површину троугла OAB.

990. Дата је парабола $y^2 = 4x$ и права $y = 2x$. Наћи једначину круга чији је пречник тетива коју одређује дата права на датој параболи.

991. Наћи координате пресечних тачака: а) елипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ и параболе $y^2 = 24x$; б) хиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ и параболе $y^2 = 3x$; в) парабола $y = x^2 - 2x + 1$ и $x = y^2 - 6y + 7$.

992. Наћи координате тачке на параболи $y^2 = 8x$ чији је фокални радијус-вектор дужине 20.

993. Одредити једначину праве одређене заједничком тетивом параболе: а) $y^2 = 18x$ и круга $(x+6)^2 + y^2 = 100$; б) $y^2 = 12x$ и елипсе $16x^2 + 25y^2 = 400$.

994. Тетива параболе $y^2 = 2x$ на правој $x - y - 4 = 0$ је основица једнакокраког троугла чији врх је на x-оси. Наћи површину тог троугла.

995. Праве $2x + y - 12 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$ секу се у тачки A параболе $y^2 = 2px$. Наћи површину троугла ABC, где су B и C друге тачке пресека датих правих и параболе.

996. Наћи једначину тангенте параболе $y^2 = 8x$ која садржи тачку: а) $P(5, -7)$; б) $Q(-4, 2)$.

997. Одредити једначину тангенте дате параболе (P) у тачки M, ако је: а) P: $y^2 = 4x$, $M(1, 2)$; б) P: $y^2 = 16x$, $M(1, 4)$; в) P: $(y-2)^2 = 2(x+1)$, $M(7, 6)$; г) P: $(y-5)^2 = -4(x-4)$, $M(3, 3)$; д) P: $y^2 = 8x$, $M(5, -7)$.

998. Одредити једначину тангенте параболе (P) која је паралелна датој правој q, ако је: а) P: $y^2 = 12x$, q: $y = x + 5$; б) P: $y^2 = 9x$, q: $3x + 2y - 4 = 0$; в) P: $y^2 = 8x$, q: $2x + 2y - 3 = 0$.

$2y=-3x+4$ $y=-\frac{3}{2}x+2$

999. Наћи једначину тангенте параболе (P) која је нормална на правој q: а) P: $y^2 = 4x$, q: $2x + y - 5 = 0$; б) P: $y^2 = 3x$, q: $2x - 3y - 4 = 0$; в) P: $x^2 = 16y$, q: $2x + 4y + 7 = 0$.

1000. Одредити површину троугла ограниченог x-осом, тангентом и нормалом параболе $y^2 = 16x$ у тачки $M(1, 4)$.

1001. Дате су права $4x + 6y = 19$ и парабола $y^2 = 4x$. Наћи једначине двеју узајамно нормалних тангенти параболе од којих је једна паралелна датој правој.

1002. Дате су хипербола $3x^2 - y^2 = 12$ и парабола $y^2 = 16x$. Одредити пресечне тачке кривих и угао под којим се секу.

1003. Дате су права $2x + y - 12 = 0$ и парабола $y^2 = 4x$. Наћи једначину тангенте на параболу у пресечној тачки $M(x_0, y_0)$, $y_0 < 0$, праве и параболе

1004. Дата је парабола $y^2 = 12x$. Одредити једначине тангенти параболе које са правом q: $4x - 2y + 9 = 0$ граде угао од $45°$ и координате додирне тачке.

1005. Наћи једначине оних тангенти параболе $y^2 = 12x$ које са правом $y = 3x - 4$ граде угао од $45°$ (или $135°$).

1006. Дате су параболе $y^2 = 24x$ и $x^2 = 3y$ и тачка $B(24, 3)$. Ако су A и O пресечне тачке ових парабола, доказати да је угао BAO прав.

1007. Права t: $x - 2y + 1 = 0$ је тангента параболе $y^2 = 2px$. У додирној тачки T конструисана је нормала која сече параболу још и у тачки S. Под којим углом се види тетива TS из фокуса F параболе?

1008. Из тачке $A(-5, 0)$ конструисана је на круг $x^2 + y^2 = 5$ тангента, која је у исто време и тангента параболе $y^2 = 2px$. Наћи површину троугла чија су темена тачке додира и жижа параболе.

1009. Наћи једначине заједничких тангенти и одредити координате додирних тачака елипсе $3x^2 + 4y^2 = 12$ и параболе $y^2 = 4x$.

1010. Дата је хипербола $3x^2 - y^2 = 12$ и параболе $y^2 = 16x$. а) Одредити једначине њихових заједничких тангенти. б) Израчунати површину трапеза чија су темена тачке додира тих тангенти. в) Под којим углом се из жиже параболе виде дијагонале трапеза?

1011. Одредити координате тачке која припада параболи (P) и најближа је правој (l): а) P: $y^2 = 16x$, l: $4x + y + 4 = 0$; б) P: $y = x^2$, l: $y = 2x - 4$; в) P: $y^2 = 4x$, l: $y = x + 3$.

1012. Одредити једначину геометријског места тачака једнако удаљених од праве: а) $y = -2$ и тачке $F(0, 2)$; б) $x = 2$ и тачке $F(-2, 0)$.

1013. Одредити једначине заједничких тангенти елипсе $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ и параболе $y^2 = \dfrac{20}{3}x$.

1014. Наћи једначину тетиве дате параболе (P) која пролази кроз дату тачку A и подељена је том тачком на два једнака дела:

а) P: $y^2 = 4x$, $A(2, 1)$; б) P: $y^2 = 9x$, $A(5, 3)$; в) P: $y^2 = 20x$, $A(2, 5)$.

1015. У тачкама $A(4, y > 0)$ и $B(9, y < 0)$ параболе $y^2 = 4x$ конструисане су тангенте које се секу у тачки C. Наћи једначину круга описаног око троугла ABC.

1016. Права (l) сече параболу (P) у двема тачкама. Одредити једначине тангената параболе у тим тачкама и величину угла који оне граде, ако је:
а) l: $x - 2y - 6 = 0$, P: $y^2 = 2x$; б) l: $2x - 3y + 4 = 0$, P: $y^2 = 4x$.

1017. Кроз жижу параболе $y^2 = 4x$, управно на праву $y = 2x$, конструисана је тетива. Одредити координате средишта M те тетиве.

1018. Наћи геометријско место тачака из којих се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом.

1019. Одредити геометријско место центара кружних линија које пролазе кроз тачку $F\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ и додирују праву $x + \dfrac{a}{2} = 0$.

1020. Дате су тачке $A(2, 4)$ и $B(5, -3)$. Наћи геометријско место тачака $M(x, y)$ таквих да је коефицијент правца праве MA за 1 већи од коефицијента правца праве MB.

1021. Одредити геометријско место центара кругова који додирују круг $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ и праву $x + 5 = 0$.

1022. Наћи геометријско место центара кругова који додирују осу Oy и пролазе кроз тачку $P(4,0)$.

1023. Наћи геометријско место тачака које су подједнако удаљене од осе Oy и круга $(x-3)^2+y^2=1$.

1024. Одредити једначину параболе која пролази кроз тачке $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$: а) $A(3,1)$, $B(2,-1)$, $C(6,-5)$ чија је оса паралелна са x-осом; б) $A(1,-1)$, $B(-2,4)$, $C(16,4)$ чија је оса паралелна са y-осом.

6.7. Додатак уз главу VI

1025. На елипси $2x^2+y^2=18$ дате су тачке $A(1,4)$ и $B(3,0)$. Одредити на елипси тачку C тако да површина троугла ABC буде највећа.

1026. Одредити тачке пресека следећих кривих (и дати геометријску интерпретацију): а) $x^2+y^2=25$, $x^2+2y^2=41$; б) $x^2-y^2=48$, $x^2+y^2=50$; в) $3x^2+y^2=4$, $6x^2+5y^2=2$; г) $5x^2-6y^2=111$, $7x^2+3y^2=714$.

1027. Одредити координате пресечних тачака параболе $y^2=2x$ и круга са средиштем $S(3,-1)$, који садржи координатни почетак.

1028. Дате су тачке $A\left(-\frac{17}{2},0\right)$, $B(2,0)$, $C(-1,0)$. Одредити на правој $y=x-3$ тачку D из које се дужи AC и BC виде под једнаким угловима.

1029. Задате су координате два наспрамна темена квадрата $ABCD$: $A(8,-3)$ и $C(10,11)$. Одредити координате остала два темена квадрата.

1030. Одредити координате темена C и D квадрата $ABCD$ ако су $A(9,2)$ и $B(18,8)$ два суседна темена и квадрат припада првом квадранту.

1031. а) Наћи једначину симетрале оног угла између правих $x+y+2=0$ и $x+7y+3=0$ у коме се налази тачка $A(2,-1)$. б) Наћи једначину симетрале оног угла између правих $x+2y+1=0$ и $x+y=0$ у коме се налази координатни почетак.

1032. Нека су $x+3y-8=0$ и $2x+y+4=0$ једначине правих којима припадају страница AB и дијагонала AC ромба $ABCD$ и нека тачка $E(-9,-1)$ припада страници CD. Одредити једначине правих које садрже остале странице ромба.

1033. Основица једнакокраког троугла припада правој $x+2y=0$, а један од кракова правој $x-y+5=0$. Наћи једначину праве којој припада други крак, знајући да она садржи тачку $M(4,2)$.

1034. Одредити геометријско место тежишта троуглова ABC ако је $A(1,0)$, $B(5,0)$ и теме C припада симетрали првог и трећег квадранта.

1035. Дата је права p: $Ax+By+C=0$. Доказати да за све тачке $M(x_1,y_1)$ које се налазе у једној полуравни праве p важи неједнакост $Ax_1+By_1+C>0$, а све тачке $N(x_2,y_2)$ које припадају другој полуравни праве p важи неједнакост $Ax_2+By_2+C<0$. Затим утврдити да ли се тачке $A(-1,3)$ и $O(0,0)$ налазе са исте или са разних страна правих: а) $2x-y+5=0$; б) $x-3y-5=0$.

1036. Кроз тачку O на дијагонали BD паралелограма $ABCD$ конструисане су дужи $MN \parallel AB$ и $PQ \parallel AD$, при чему је $M \in AD$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in AB$. Доказати да се праве AO, BP и DN секу у једној тачки.

1037. Дати су квадрати $OA_1B_1C_1$ и $OABC$, такви да $A_1 \in OC$ и да немају заједничких унутрашњих тачака. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

1038. Дата је дуж AB дужине $2a$. Одредити геометријско место тачака M за које важи $MA^2 - MB^2 = 2c$ (c — константа).

1039. Доказати да је удаљеност сваке тачке, чије су координате цели бројеви, од праве p: $25x - 15y + 12 = 0$ већа од $\frac{1}{30}$.

1040. Наћи најмању вредност израза:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

1041. Дате су тачке $A(1,1)$, $B(7,4)$, $C(4,5)$. Одредити тачку D тако да $ABCD$ буде једнакокраки трапез.

1042. Наћи координате тежишта четвороугла $ABCD$ ако је $A(4,4)$, $B(5,7)$, $C(10,10)$ и $D(12,4)$.

1043. У једнакокраком троуглу дата је једначина основице: $x - 2y + 3 = 0$, једначина једног од кракова: $4x - y + 5 = 0$ и тачка $P\left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}\right)$ на другом краку. Израчунати: а) дужину висине која одговара краку; б) координате тежишта троугла; в) површину троугла.

1044. Праве $3x + 4y - 30 = 0$ и $3x - 4y + 12 = 0$ додирују круг чији је полупречник дужине $r = 5$. Израчунати површину четвороугла који одређују те тангенте и полупречници кругова конструисани у тачкама додира.

1045. Одредити геометријско место тачака M за које важи $2OM^2 + MA^2 = OA^2$, где је $O(0,0)$, $A(3a,0)$, $a \in \mathbf{R}$.

1046. Наћи геометријско место тачака M за које је $AM \cdot BM \cos\measuredangle AMB = \frac{3}{4}AB^2$, где је $A(0,0)$, $B(b,0)$, $b > 0$.

1047. Одредити геометријско место тачака M таквих да је $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3a^2$, где је $A(-a,0)$, $B(0,a)$ и $C(a,0)$.

1048. Два темена троугла ABC су фиксирана, а треће се мења, али тако да је збир квадрата страница троугла једнак осмострукој површини. Одредити геометријско место тачака коме припада треће теме троугла.

1049. Дат је квадрат $ABCD$: $A(-a,-a)$, $B(a,-a)$, $C(a,a)$, $D(-a,a)$. Ако је E средиште странице AB, а F и G тачке, редом, на страницама BC и CD такве да су праве AG и EF паралелне, доказати да дуж FG додирује круг уписан у квадрат.

1050. Два наспрамна темена правоугаоника су: $A(5,0)$ и $C(2,4)$. Наћи остала два темена ако једно од њих припада правој $x - 3y = 0$.

1051. Одредити геометријско место центара кругова који пролазе кроз тачку $O(0,0)$, а за које су тангенте конструисане из дате тачке $A(a,0)$ међусобно нормалне.

1052. Дат је једнакостранични троугао ABC, $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $B(0,0)$, $C(1,0)$. Нормале конструисане из унутрашње тачке M тог троугла секу странице AB, BC и CA редом у тачкама D, E, F. Наћи геометријско место тачака M тако да је угао DEF прав.

1053. Испитати које су криве одређене једначинама:

а) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$; б) $x^2 + 4x - y + 5 = 0$;

в) $xy + 2x + 3y = 0$; г) $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 4y = 0$.

1054. Одредити дужине страница нравоугаоника највеће површине уписаног у елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (странице паралелограма параделне су осама елипсе).

1055. Произвољна тангента елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ сече праве $x = -a$ и $x = a$ у тачкама A и B. а) Доказати да се дуж AB из фокуса елипсе види под правим углом. б) Доказати да је производ дужи које спајају тачке A и B са одговарајућим теменима елипсе константан и не зависи од положаја тангенте AB.

1056. Дат је скуп елипси $\lambda^2x^2 + a^2y^2 = a^2\lambda^2$ $(\lambda > 0)$. Доказати да тангенте свих ових елипси конструисане у тачкама са константном апсцисом $x = x_0$ секу x-осу у истој тачки. (Ова чињеница користи се за конструкцију тангенте елипсе у датој тачки.)

1057. Дат је једнакокраки троугао чија темена имају координате $A(4,2)$, $B(-4,2)$, $C(0,-2)$. Наћи геометријско место тачака таквих да је збир квадрата одстојања од страница троугла једнак 12.

1058. Дате су тачке $A(-a,0)$ и $B(a,0)$, $a > 0$. Нека су C и D тачке на нормалама из A, односно B, на x-осу, такве да је $\measuredangle COD$ прав. Одредити геометријско место тачака пресека правих AD и BC.

1059. Дат је круг $x^2 + y^2 = r^2$. Нека је M произвољна тачка круга и Q њена пројекција на x-осу. Ако је N средиште дужи MQ, а тачка $A(-r,0)$ дата, права AN сече дати круг, осим у тачки A, још и у тачки D. Наћи геометријско место пресека правих BD и QM, ако је $B(r,0)$.

1060. Наћи геометријско место тачака из којих се елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види под правим углом.

1061. Дата је елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ коју права p: $x = t$ $(-a < t < a)$ сече у тачкама M и N, при чему M има позитивну, а N негативну ординату. Одредити геометријско место пресечне тачке P правих AM и BN и пресечне тачке Q правих AN ио BM, где су $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ темена елипсе, када се права p креће остајући паралелна y-оси.

1062. Дат је једнакокраки троугао ABC $(AB = 2a,\ AC = BC)$. Права BC и нормала у тачки A на AC секу се у тачки P. Одредити геометријско место тачака P када се тачка C креће, док је основица AB фиксирана.

1063. Наћи геометријско место средишта свих тетива хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ које садрже теме $A(a,0)$.

1064. Права која пролази кроз координатни почетак сече праве $x + y = 1$ и $x - y = 1$ у тачкама A и B. Одредити геометријско место средишта S дужи AB.

1065. Дате су две праве a: $x+y-4=0$ и b: $x-y-4=0$. Нека су A и B пресечне тачке правих a, односно b, са променљивом правом s која садржи координатни почетак. Наћи геометријско место средишта дужи AB.

1066. Из тачке M хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ конструисана је тангента MD на круг чији је пречник оса хиперболе. Нека је P тачка на оси хиперболе таква да је права MP паралелна асимптоти хиперболе. Доказати да је $MP=MD$.

1067. Конструисана је произвољна тангента хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Ако та тангента сече асимптоте хиперболе у тачкама A и B, доказати да је: а) тачка додира тангенте средиште дужи AB; б) површина троугла OAB не зависи од положаја тангенте.

1068. Доказати да се елипса $b_1^2x^2+a_1^2y^2=a_1^2b_1^2$ и хипербола $b_2^2x^2-a_2^2y^2=a_2^2b_2^2$, које су конфокалне, секу под правим углом.

1069. Доказати да је површина паралелограма ограниченог асимптотама хиперболе $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, и правим које садрже произвољну тачку хиперболе а паралелне су асимптотама, константна.

1070. Произвољна тангента параболе $y^2=2px$ сече њену фокалну сечицу која је паралелна директриси и директрису у тачкама подједнако удаљеним од фокуса параболе. Доказати.

1071. Одсечак произвољне тангенте параболе $y^2=2px$, ограничен двема фиксираним тангентама ове параболе, ортогонално се пројектује на директрису параболе. Доказати да је дужина те пројекције константна.

1072. Краци правог угла са фиксираним теменом у координатном почетку секу параболу $y^2=2px$ у тачкама X и Y $(p>0)$.

а) Наћи геометријско место средишта дужи XY.

б) Доказати да све праве XY имају једну заједничку тачку.

1073. Тангенте параболе $y^2=2px$ конструисане из ма које тачке на директриси те параболе међу собом су управне. Доказати.

1074. Одредити једначину геометријског места средишта свих кругова који додирују праву $y+4=0$ и круг $x^2+y^2=4$ споља.

1075. Тачка M параболе $y^2=2px$ пројектује се у тачку N на x-оси. Одредити геометријско место средишта дужи MN.

1076. Доказати да је геометријско место средишта свих паралелних тетива параболе $y^2=2px$ полуправа паралелна x-оси, чија је почетна тачка — тачка додира тангенте паралелна тим тетивама.

1077. Конструисана је тангента параболе $y^2=2px$ у тачки M. Доказати да је теме параболе средиште дужи AB, где је A пресек тангенте и x-осе, а B пројекција таче M на x-осу.

1078. Нека је F фокус параболе $y^2=2px$. Ако тангента параболе у њеној тачки M сече x-осу у тачки N, доказати да је троугао NFM једнакокраки.

1079. Дата је парабола $y^2=2px$. На параболи одредити тачку такву да је збир квадрата одстојања до жиже и до темена једнак датој величини k^2.

Глава VII

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА. НИЗОВИ

7.1. Математичка индукција и њене примене

Готово сва тврђења, која се односе на природне бројеве, доказују се применом метода математичке индукције:

Нека је $P(n)$ тврђење, које се односи на променљиву n, $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Да би $P(n)$ било тачно за све природне бројеве довољно је да је:

1° $P(1)$ тачно.

2° За све природне бројеве n је импликација $P(n) \implies P(n+1)$ тачна; односно

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbf{N})(P(n) \implies P(n+1)) \implies (\forall n \in \mathbf{N})P(n).$$

Важе и следеће модификације основног става:

$$\text{(i)} \quad P(n_0) \wedge (\forall n \in \mathbf{N})\big(n \geqslant n_0 \implies (P(n) \implies P(n+1))\big) \implies$$
$$\implies (\forall n \in \mathbf{N})(n \geqslant n_0 \implies P(n)), \quad \text{где } n_0 \in \mathbf{N}.$$

$$\text{(ii)} \quad P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \wedge (\forall n \in \mathbf{N})(n > k \implies$$
$$(P(n-k+1) \wedge P(n-k+2) \wedge \cdots \wedge P(n) \implies P(n+1))) \implies$$
$$\implies (\forall n \in \mathbf{N})P(n) \quad \text{где } k \in \mathbf{N}.$$

1080. Доказати да за све природне бројеве n важи:

а) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

в) $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

г) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

д) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

ђ) $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

е) $2+7+14+\cdots+(n^2+2n-1)=\dfrac{n}{6}(2n^2+9n+1)$;

ж) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$.

1081. Доказати да за све природне бројеве n важи:

а) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

б) $\dfrac{3}{1\cdot2}+\dfrac{7}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n(n+2)}{n+1}$;

в) $\dfrac{5}{1\cdot2}+\dfrac{13}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n(2n+3)}{n+1}$;

г) $\dfrac{2}{2+1}+\dfrac{2^2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{2^n}{2^{2^{n-1}}+1}=2-\dfrac{2^{n+1}}{2^{2^n}-1}$;

д) $\dfrac{1^2}{1\cdot3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

ђ) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$;

е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

1082. Доказати применом математичке индукције

а) $1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

б) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$, $n\geqslant2$.

1083. Применом математичке индукције доказати да су следећа тврђења тачна за све природне бројеве n или за све природне бројеве, који су у задатку наведени:

а) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$, $n\geqslant2$;

б) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$;

в) $\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{26}{28}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$, $n\geqslant2$.

1084. Доказати да је за све природне бројеве $n\geqslant0$:

а) $3\mid 5^n+2^{n+1}$;

б) $133\mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$;

в) $19\mid 7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n$;

г) $17\mid 6^{2n}+19^n-2^{n+1}$;

д) $59\mid 5^{n+2}+26\cdot5^n+8^{2n+1}$;

ђ) $11\mid 30^n+4^n(3^n-2^n)-1$;

е) $676\mid 3^{3n+3}-26n-27$;

ж) $9\mid n\cdot4^{n+1}-(n+1)\cdot4^n+1$;

з) $84\mid 4^{2n}-3^{2n}-7$, $n\geqslant1$;

и) $11\mid 5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$.

1085. Доказати:

а) да се бројеви облика $2^{2^n}+1$ $(n=2,3,\ldots)$ завршавају цифром 7;

б) да се бројеви облика $2^{4^n}-5$ $(n=1,2,\ldots)$ завршавају цифром 1.

1086. Применом математичке индукције доказати следећа тврђења:

а) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2}, \quad n\geqslant 2;$

б) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}, \quad n\geqslant 2;$

в) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>1;$

г) $2+2^2+2^3+\cdots+2^{2n}<n(2^{2n+1}+1);$

д) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n};$

ђ) $\dfrac{1}{2^3-2}+\dfrac{1}{4^3-4}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^3-2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{n}{2n+1}.$

1087. Доказати да за природне бројеве n важе неједнакости:

а) $2^n>n^2, \quad n\geqslant 5;$

б) $n!>2^n, \quad n\geqslant 4;$

в) $n!<n^{n-1}, \quad n\geqslant 3;$

г) $\dfrac{4^n}{n+1}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n\geqslant 2;$

д) $(1+h)^n>1+nh$, $n\geqslant 2$, $h\in\mathbf{R}$, $h>-1$, $h\neq 0$ (Бернулијева неједнакост);

1088. Применом математичке индукције, доказати следећа тврђења:

а) Ако је $x_1=1$, $x_2=2$ и за $n\geqslant 3$ је $x_n=(n-1)(x_{n-1}+x_{n-2})$, тада за све $n\in\mathbf{N}$ важи $x_n=n!$;

б) Ако је $a_0=2$, $a_1=5$; за све $n\geqslant 0$ је $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, тада је $a_n=2^n+3^n$ за све $n\geqslant 0$;

в) Ако је $a_0=2$, $a_1=3$ и $a_{n+1}=a_1a_n-a_0a_{n-1}$, $n\geqslant 1$, онда је $a_n=2^n+1$, $n\geqslant 0$.

г) Ако је $a_1=5$, $a_2=7$ и $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$, $n\geqslant 2$, тада је $a_n=2n+3$, $n\geqslant 1$.

д) Ако је $a_0=1$, $a_1=4$ и $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$, $n\geqslant 0$, тада је $a_n=2^n+n\cdot 2^n$, $n\geqslant 0$.

1089 Доказати да за природне бројеве n важе неједнакости:

а) $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}<\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}};$

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1);$

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, \quad n\geqslant 2;$

г) $1+2+2^2+\cdots+2^n>\dfrac{n+1}{n-1}(2+2^2+\cdots+2^{n-1}), \quad n\geqslant 2.$

1090. Применом математичке индукције доказати:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$;

б) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \dfrac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$;

в) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 4x} + \cdots + \dfrac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x, \quad x \neq \dfrac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda \in \mathbf{Z})$.

1091. Доказати да је за сваки цео број $n \geqslant 2$, $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ ирационалан број.

1092. Нека је $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2xa_n}{a_n + x}$, $n \geqslant 1$, $x > 0$. Доказати да је $a_{n+2} = \dfrac{2^{n+1}x}{2^{n+1} + x - 1}$, за $n \geqslant 0$.

1093. Дата је функција $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ако је $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n пута), доказати да је $f^n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $(n \in \mathbf{N})$.

7.2. Елементарна теорија бројева

7.2.1. Дељивост. Прости бројеви

1094. Ако је n природан број, доказати: а) $6 \mid 2n^3 - 3n^2 + n$; б) $3 \mid n^3 + 3n^2 + 5n + 3$; в) $24 \mid n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 62$; г) $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$.

1095. Нека је m цео број. Доказати да је: а) $6 \mid m^3 - m$; б) $30 \mid m^5 - m$.

1096. Одредити број p ако су: а) p и $8p^2 + 1$ прости бројеви; б) p, $p + 10$ и $p + 14$ прости бројеви; в) p, $2p + 1$ и $4p + 1$ прости бројеви; г) p и $2^p + p^2$ прости бројеви.

1097. Наћи све просте бројеве p такве да је број $2p + 1$: а) потпун квадрат; б) потпун куб.

1098. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ међусобно различити прости бројеви, доказати да број

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

није цео.

1099. Ако је троцифрен број $\overline{abc}$ дељив са 37, доказати да су са 37 дељиви такође и бројеви $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$.

1100. Ако су у троцифреном броју дељивом са 7 две последње цифре једнаке, доказати да је збир цифара тог броја дељив са 7.

1101. Доказати да производ четири узастопна природна броја не може бити потпун квадрат.

1102. Број $N = 10101\ldots0101$ дефинисан је тако да се наизменично ређају јединице и нуле.

а) Одредити најмањи број N овог облика дељив са 9.

б) Одредити најмањи број N овог облика дељив са 99.

1103. Одредити цифре x и y тако да:

а) број $\overline{1993xy}$ буде дељив и са 8 и са 9:

б) број $\overline{34x5y}$ буде дељив са 36.

1104. Ако је број $mn + pq$ дељив са $m - p$, доказати да је број $mq + pn$ дељив са $m - p$ (бројеви m, n, p, q су цели).

1105. а) Одредити најмањи природан број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје у остатку, редом, 1, 2, 3, 4 и 5.

б) Одредити најмањи природан број који има својство: остаци нри дељењу тог броја са $2, 3, \ldots, 10$ су $1, 2, \ldots, 9$.

в) Одредити најмањи природан број дељив са 7 који пи дељењу са $3, 4, 5, 6$ даје редом остатке $1, 2, 3, 4$.

1106. а) Доказати да ни за један цео број n број $n^2 + n + 2$ није дељив са 49.

б) Доказати да ни за један цео број n број $n^2 + 3n + 5$ није дељив са 121.

7.2.2. Конгруенције и примене

Релација $\equiv \pmod{m}$ дефинише се у скупу целих бројева на следећи начин:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b,$$

тј. бројеви a и b имају исте остатке при дељењу са m.

Својства релације конгруенције у скупу $\mathbf{Z}$:

1° $a \equiv a \pmod{m}$;

2° $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$;

3° $a \equiv b \pmod{m} \land b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$;

4° $a \equiv b \pmod{m} \land c \equiv d \pmod{m} \implies a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

5° $a \equiv b \pmod{m} \land c \equiv d \pmod{m} \implies ac \equiv bd \pmod{m}$;

6° $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbf{N}$.

Фермаова теорема. Ако је p прост број и $p \nmid a$, онда је $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ојлерова теорема. Ако је $\varphi(m)$ број природних бројева који нису већи од датог природног броја m и релативно су прости са њим и ако су a и m узајамно прости, онда је $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

1107. Наћи остатак при дељењу броја: а) 2^{100} са 7; б) 5^{20} са 24; в) 2^{30} са 13; г) 317^{259} са 15.

1108. Доказати да за све природне бројеве n важи: а) $10^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{37}$; б) $2^{5n} - 1 \equiv 0 \pmod{31}$; в) $12^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

1109. Доказати да је: а) $112 \mid (3299^5 + 6)^{18} - 1$; б) $11 \cdot 31 \cdot 61 \mid 20^{15} - 1$; в) $8 \cdot 13 \cdot 19 \mid 7^{24} - 1$.

1110. Извести правило за дељивост целог броја са: а) 9; б) 2; в) 11.

1111. Ако је n природан број, доказати да је $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} \equiv 0 \pmod{11}$.

1112. а) Наћи све природне бројеве n такве да је $7 \mid 2^n - 1$;

б) Доказати да ни за један $n \in \mathbf{N}$ не важи $7 \mid 2^n + 1$.

1113. Доказати да је број $19 \cdot 8^n + 17$ сложен за свако $n \in \mathbf{N}$.

1114. Нека су a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и b цели бројеви такви да је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$. Доказати да је бар један од ових бројева паран.

1115. Ако је $n \in \mathbf{N}$, доказати да је број $7^{2n} - 4^{2n}$ дељив са 33.

1116. Доказати да је за све природне бројеве n бар један од бројева $3^{3n} + 2^{3n}$ или $3^{3n} - 2^{3n}$ дељив са 35.

1117. Одредити све бројеве n за које је број: а) $2^n - 1$; б) $2^n + 1$ потпун квадрат.

1118. Број $3^{105} + 4^{105}$ је дељив са 13, а није дељив са 11. Доказати.

1119. а) Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са 49 и са 181.

б) Доказати да је број $9^{44} + 4^{99}$ дељив са 5.

1120. Ако је p прост број и цео број a није дељив са p, доказати да је $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (мала Фермаова теорема).

1121. Доказати да је $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

1122. Нека је a цео број који није дељив простим бројем p. Доказати да је број $a^{p-1} + p - 1$ сложен.

1123. Доказати: а) Ако је a цео број који није дељив са 7, тада је $a^{12} \equiv 1 \pmod{7}$. б) Ако су a и b цели бројеви који нису дељиви са 65, тада је $a^{12} - b^{12}$ дељиво са 65.

7.2.3. Диофантове једначине

Линеарна Диофантова једначина

$$ax + by = c$$

има решења ако и само ако $d \mid c$, где је d највећи заједнички делилац бројева a и b. У том случају је опште решење једначине облика

$$x = \frac{c}{d}\alpha + \frac{b}{d}t, \quad y = \frac{c}{d}\beta - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbf{Z},$$

где се једно посебно (партикуларно) решење (α, β) једначине $a\alpha + b\beta = d$ добија Еуклидовим алгоритмом.

Сва решења једначине

$$x^2 + y^2 = z^2$$

су облика

$$x = t(m^2 - n^2), \quad y = 2mnt, \quad z = t(m^2 + n^2),$$

где је $t \in \mathbf{Z}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, m и n — узајамно прости.

1124. а) Одредити применом Еуклидовог алгоритма највећи заједнички делилац бројева 24 и 42, а затим решити једначину $24x + 42y =$ НЗД$(24, 42)$.

б) Решити једначину $105x + 1000y =$ НЗД$(105, 1000)$

в) Решити једначину $27x + 59y = 20$.

1125. У скупу природних бројева решити једначине:
а) $x^2 - y^2 = 105$; б) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$; в) $x^2 + 73 = y^2$;
г) $2(x^2 - y^2) = 1978$; д) $x^2 + 3x + 24 = y^2$.

1126. Наћи целобројна решења система једначина:

$$\begin{aligned} xyzu - x &= 1993, \\ xyzu - y &= 993, \\ xyzu - z &= 93, \\ xyzu - u &= 3. \end{aligned}$$

1127. Доказати да следеће једначине немају целобројних решења:
а) $3x^2 + 8 = y^2$; б) $x^2 + 4x - 8y = 11$; в) $x^2 - 3y = 17$; г) $x^2 + 5x - 15y = 22$.

7.3. Основни појмови о низовима

Низ је свака функција чији је домен скуп природних бројева, а кодомен скуп реалних бројева.

Низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ је *ограничен* ако постоје реални бројеви a и b, $a < b$, такви да за све чланове низа важи $a \leqslant a_n \leqslant b$.

Низ (a_n) је

1° *строго растући* ако је за све $n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$;

2° *растући* ако је за све $n \in \mathbf{N}$: $a_n \leqslant a_{n+1}$;

3° *опадајући* ако је за све $n \in \mathbf{N}$: $a_n \geqslant a_{n+1}$;

4° *строго опадајући* ако је за све $n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$.

У сваком од случајева 1°–4° каже се да је (a_n) *монотон*, а у случајевима 1° и 4° да је *строго монотон*.

1128. Написати првих пет чланова следећих низова задатих формулом општег члана:

а) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2-2}$; б) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; в) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; г) $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

1129. Претпостављајући да се правилност, коју уочавамо међу наведеним члановима низова, одржава и даље, наћи бар по једну формулу за опште чланове следећих низова:

а) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^3}, \dfrac{4}{2^4}, \dots\right)$; б) $\left(1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \dots\right)$;

в) $\left(1, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4\sqrt{4}}, \dots\right)$; г) $(1, -2, 3, -4, \dots)$.

1130. Дато је неколико првих чланова низова. Претпостављајући да се правилност, коју уочавамо међу њима, одржава и даље, испитати монотоност тих низова:

а) $\left(1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \dots\right)$; б) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{9}{27}, \dfrac{16}{81}, \dots\right)$; в) $\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}, \dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{4\cdot 5}, \dots\right)$.

1131. За дате низове (x_n) и (y_n) наћи:

$$(x_n)+(y_n),\quad (x_n)-(y_n),\quad (x_n)\cdot(y_n),\quad \frac{(x_n)}{(y_n)},\quad 2(x_n)+(-1)(y_n).$$

а) $x_n = n$, $y_n = n^2$; б) $x_n = 2n$, $y_n = -n$;

в) $x_n = n + (-1)^{n+1}$, $y_n = -n$; г) $x_n = n\bigl(2+(-1)^{n+1}\bigr)$, $y_n = n$.

1132. Низови су дати својим општим члановима. Који од њих су ограничени, а који нису?

а) $a_n = (-1)^n$; б) $a_n = n$; в) $a_n = \dfrac{2}{n!}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{2n}$; ђ) $a_n = (-1)^n n^3$;

е) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; ж) $a_n = \min\{n, 15\}$; з) $a_n = \dfrac{3n^2-1}{n^2+1}$;

и) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot n!$.

1133. Низови су дати својим општим члановима. Испитати њихову монотонију:

а) $a_n = n$; б) $a_n = \dfrac{1}{n}$; в) $a_n = (-1)^n$; г) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$;

д) $a_n = n^2 - 8n + 12$; ђ) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$; е) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^4+1}$;

ж) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$; з) $a_n = \dfrac{1}{\log_2 n}$, $n \geqslant 2$; и) $a_n = \sin n$.

7.4. Аритметички и геометријски низ

Бесконачан низ реалних бројева је *аритметички низ*, ако је сваки његов члан, почевши од другог, једнак аритметичкој средини њему суседних чланова. Да би бесконачан низ реалних бројева био аритметички, неопходно је и довољно да постоји реалан број d (*разлика* аритметичког низа) тако да се сваки члан, почевши од другог добија сабирањем њему претходног члана и броја d:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \dots, \quad a_n = a_{n-1} + d, \quad \dots .$$

У аритметичком низу су првим чланом a_1 и разликом d је за све природне бројеве n

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Ако бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ представљају првих n чланова аритметичког низа, онда за сваки број k, $1 \leqslant k \leqslant n$, важи

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Нека је $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ збир првих n чланова аритметичког низа $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ са разликом d, тада је

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big).$$

Бесконачан низ реалних бројева је *геометријски низ* ако је сваки његов члан, почев од другог, једнак геометријској средини њему суседних чланова. Да би бесконачан низ реалних бројева, чији је први члан различит од нуле, био геометријски низ чији су сви чланови различити од нуле неопходно је и довољно да постоји реалан број q, различит од нуле (који се назива *количник* геометријског низа), такав да се сваки члан низа, почев од другог, добија множењем њему претходног члана са q:

$$a_1, \ a_2 = a_1 q, \ a_3 = a_2 q, \ a_4 = a_3 q, \ \dots, \ a_n = a_{n-1} q, \ \dots .$$

У геометријском низу, са првим чланом a_1 и количником q је за све $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

У геометријском низу, чији је први члан a_1 и количник q, збир првих n чланова овог низа је

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{ако је } q \neq 1, \qquad S_n = n a_1, \quad \text{ако је } q = 1.$$

1134. Аритметички низ дат је својим првим чланом и разликом. Одредити првих шест чланова низа, ако је

а) $a_1 = 1$, $d = 1$; б) $a_1 = 10$, $d = -5$; в) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$.

1135. Наћи осми члан аритметичког низа:

а) $(-3, -7, -11, -15, \dots)$; б) $(1, 3, 5, 7, \dots)$; в) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \dots\right)$.

1136. За аритметички низ са општим чланом a_n важи $a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и $a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$. Израчунати први члан и разлику овог низа.

1137. Наћи први члан и разлику аритметичког низа, чији чланови задовољавају једнакости $a_2 + a_5 - a_3 = 10$, $a_2 + a_9 = 17$.

1138. У аритметичком низу је $a_1 = 10$, $d = -2$. Наћи индекс оног члана овог низа, који је једнак нули.

1139. Да ли је број 347 члан аритметичког низа $(1, 5, 9, \dots)$?

1140. Одредити први члан и разлику аритметичког низа, ако је збир његова прва три члана једнак -3, а збир првих пет чланова са парним индексима једнак 15.

1141. Написати прва три члана аритметичког низа ако је за сваки природан број n збир S_n његових првих n чланова једнак $S_n = 4n^2 - 3n$.

1142. Наћи петнаести члан аритметичког низа, ако су му дати први и осми члан: $a_1 = 2$, $a_8 = 23$.

1143. Збир првог и петог члана аритметичког низа је 26, а производ другог и четвртог је 160. Наћи збир првих шест чланова низа.

1144. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 150. Ако је највећи од њих четири пута већи од најмањег, наћи та три броја.

1145. Наћи растући аритметички низ у коме је збир прва три члана 27, а збир њихових квадрата 275.

1146. Три броја су узастопни чланови аритметичког низа. Њихов збир је 2, а збир њихових квадрата је $\frac{14}{9}$. Наћи те бројеве.

1147. Израчунати збир првих n природних бројева.

1148. Збир трећег и деветог члана аритметичког низа је 8. Израчунати збир првих једанаест чланова тог низа.

1149. Наћи збир првих 19 чланова аритметичког низа (a_n) ако је $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

1150. Дати су десети и двадесети члан аритметичког низа, $a_{10} = 25$, $a_{20} = 75$. Наћи збир првих десет чланова овог низа.

1151. Наћи збир свих троцифрених непарних природних бројева.

1152. Ако су x, y, z три узастопна члана аритметичког низа онда важи релација $x^2 + 8yz = (2z + x)^2$. Доказати.

1153. Одредити вредност реалног броја x тако да $x + 1$, $2x + 3$, $6x - 1$ буду три узастопна члана аритметичког низа.

1154. Одредити аритметички низ код кога је збир трећег и петог члана 22, а производ другог и четвртог 55.

1155. Између бројева 3 и 17 уметнути шест бројева тако да они са датим бројевима образују аритметички низ.

1156. Између $9x+y$ и $x+9y$ уметнути 7 израза који са датим изразима образују аритметички низ.

1157. Колико бројева треба уметнути између бројева 16 и 250 да би се добио аритметички низ чији је збир чланова 1995?

1158. Дужине страница правоуглог троугла образују аритметички низ. Површина троугла је $24\,\mathrm{cm}^2$, одредити дужине страница.

1159. Одредити вредности реалних бројева x и y тако да $2x-y, x+2y-5$, $x+y$, $4x-3y+8$ буду узастопни чланови аритметичког низа.

1160. Дат је први члан и количник геометријског низа. Написати првих осам чланова тог низа:
а) $a_1=6$, $q=-\frac{1}{2}$; б) $a_1=-1$, $q=1$; в) $a_1=\frac{1}{2}$, $q=-1$; г) $a_1=2$, $q=2$.

1161. Дат је општи члан геометријског низа. Одредити први члан и количник овог низа, ако је

а) $a_n=\dfrac{5}{7^n}$; б) $a_n=(-1)^n$; в) $a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{2^n}$.

1162. Доказати да је број -81 један од чланова геометријског низа чији је први члан $a_1=-1$, а количник $q=3$. Који је индекс тог члана?

1163. Наћи пети и осми члан геометријског низа, ако му је трећи члан једнак -12, а количник $q=-4$.

1164. Наћи количник геометријског низа, ако му је други члан једнак 6, а осми 384.

1165. Збир првог и трећег члана растућег геометријског низа је 20, а збир прва три члана је 26. Наћи његов први члан и количник.

1166. Одредити геометријски низ ако је збир другог и трећег члана 6, а четврти члан је за 24 већи од другог члана.

1167. Бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ образују аритметички низ. Ако је збир свих чланова са непарним индексима једнак 320, а збир свих чланова са парним индексима једнак 350, израчунати a_{11}.

1168. Збир три узастопна члана неког растућег аритметичког низа је 3, а збир њихових кубова 4. Одредити те чланове.

1169. Наћи аритметички низ $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, ако је познато да је $a_1+a_3+a_5=-12$ и $a_1a_3a_5=80$.

1170. Познато је да је за свако $n\in\mathbf{N}$ збир првих n чланова неког низа $S_n=2n^2+3n$. Наћи десети члан тог низа и доказати да је низ аритметички.

1171. Нека су a,b,c реални бројеви такви да је $(b+c)(c+a)(a+b)\neq 0$. Доказати да су бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ узастопни чланови аритметичког низа ако и само ако су бројеви a^2, b^2, c^2 узастопни чланови аритметичког низа.

AN $\quad a, b, c \quad b = \frac{a+c}{2}$

GN $\quad a\ b\ c \quad b^2 = ac$

1172. Бројеви a, b, c су узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да су и бројеви a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2 такође узастопни чланови аритметичког низа.

1173. Ако за аритметички низ и неке природне бројеве m и n $(m \neq n)$ важи $S_m = S_n$, доказати да је $S_{m+n} = 0$.

1174. Наћи све аритметичке низове код којих је збир S_n првих n чланова једнак n^2.

1175. Дати су реални бројеви a, b и c. Под којим условима постоји аритметички низ, тако да ја за свако n збир S_n првих n чланова тог низа једнак $an^2 + bn + c$?

1176. Збир првих n чланова аритметичког низа је $S_n = \dfrac{n^2+5n}{4}$. Одредити разлику тог низа.

1177. Три броја образују геометријски низ чији је збир 65. Ако се средњи члан умањи за 10, низ постаје аритметички. Одредити тај низ.

1178. У геометријском низу су први, трећи и пети члан, редом, једнаки првом, четвртом и шеснаестом члану неког аритметичког низа. Ако је први члан тог аритметичког једнак 5, наћи његов четврти члан.

1179. У геометријском низу (a_n) збир прва два члана једнак је 25, а збир прва три члана је једнак 105. Наћи први члан и количник овог низа.

1180. Сви чланови геометријског низа (b_n) су позитивни. Ако је разлика првог и петог члана једнака 15, а збир првог и трећег члана једнак 20, наћи збир првих пет чланова тог низа.

1181. Разлика четвртог и првог члана геометријског низа је 52, а збир прва три члана тог низа је 26. Наћи збир првих шест чланова низа.

1182. Бројеви $5x-y, 2x+3y, x+2y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ су узастопни чланови аритметичког низа, а бројеви $(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ су узастопни чланови геометријског низа. Наћи x и y.

1183. Четири позитивна броја образују геометријски низ. Ако је први већи од другог за 36, а трећи од четвртог за 4, наћи те бројеве.

1184. Збир прва три члана геометријског низа је 14, а збир првог и трећег члана је два пута већи од збира другог и четвртог члана. Наћи трећи члан овог низа.

1185. Збир три броја који образују растући геометријски низ је 21, а збир њихових реципрочних вредности је 7/12. Наћи те бројеве.

1186. Три броја чији је збир 26 образују геометријски низ. Увећа ли се средњи члан за 4, добија се аритметички низ. Који су то бројеви?

1187. Низ бројева $1, 8, 22, 43, \ldots$ има својство да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ: $7, 14, 21, \ldots$. Посматраном низу припада број 35351. Одредити његов индекс.

1188. Три броја чији је збир 63 образују аритметички низ. Ако се од првог одузме 7, од другог 9, а од трећег 5, добија се геометријски низ. Који су то бројеви?

1189. Дат је низ $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_4 = 11$, $a_5 = 18$, $\dots$, такав да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ. Одредити a_{500}.

1190. У аритметичким низовима $17, 21, 25, 29, \dots$ и $16, 21, 26, 31, \dots$ има једнаких чланова. Наћи збир првих 100 таквих чланова.

1191. Збир три узастопна члана геометријског низа је 13, а збир њихових квадрата је 91. Одредити те чланове.

1192. Збир прва три члана геометријског низа је 21, а збир њихових квадрата је 189. Наћи први члан и количник тог низа.

1193. Наћи четири броја, од којих је други мањи за 35 од првог, трећи већи за 560 од четвртог и који су узастопни чланови геометријског низа.

1194. Први, трећи и седми члан једног неконстантног аритметичког низа су истовремено прва три члана геометријског низа.

а) Наћи количник геометријског низа.

б) Одредити индекс у аритметичком низу четвртог члана геометријског низа.

в) Наћи први члан и разлику аритметичког низа ако је збир његових првих 15 чланова $S_{15} = 3$.

1195. Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо редом 25, 27 и 1, добићемо три броја који образују аритметички низ. Одредити седми члан датог геометријског низа.

1196. Три броја образују геометријски низ. Ако се други члан повећа за 8, низ постаје аритметички; ако се затим последњи члан овог аритметичког низа повећа за 64, добија се опет један геометријски низ. Одредити три поменута броја.

1197. Три реална броја различита од нуле образују аритметички низ, а квадрати тих бројева, у истом поретку, образују геометријски низ. Одредити количник тог геометријског низа.

1198. Испитати монотонију геометријског низа $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ $(a_1 \neq 0,$ $q \neq 0)$.

1199. Дужине ивица квадра, чија је дијагонала $d = 6\,\text{cm}$, а површина $P = 72\,\text{cm}^2$ образују геометријски низ. Одредити дужине ивица.

1200. Израчунати збирове:

а) $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$;

б) $S_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$;

в) $S_n = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$, $x, y \in \mathbf{R}$.

1201. Израчунати збир:

а) $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\cdots9}_{n \text{ деветки}}$;

б) $S'_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\cdots7}_{n \text{ седмица}}$.

1202. Посматрајмо збир првих n чланова растућег геометријског низа. Ако је збир првог и последњег члана једнак 66, производ другог и претпоследњег једнак 128, а збир свих чланова је 126, одредити број n.

1203. Израчунати збирове:

а) $S_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$;

б) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$;

в) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$;

г) $T_n = 1 + 2^2q + \cdots + (n+1)^2q^n$, $q \neq 1$;

д) $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{n}{3^n}$.

1204. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2-3x+A=0$, а x_3 и x_4 корени једначине $x^2-12x+B=0$. Бројеви x_1, x_2, x_3, x_4 су узастопни чланови геометријског низа. Одредити реалне бројеве A и B.

1205. Доказати да је $(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 1)(10^{n+1}+5)+1 = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$.

1206. Израчунати збирове:

а) $2 + 5 + 11 + \cdots + (3\cdot 2^{n-1} - 1)$;   б) $\dfrac{5}{2} + 5 + \dfrac{19}{2} + 18 + \cdots + \dfrac{n+2^{n+1}}{2}$.

1207. Нека је S_n збир првих n чланова геометријског низа. Доказати да израз $\dfrac{S_{n+2}-S_n}{S_n - S_{n-2}}$ зависи само од количника q посматраног геометријског низа.

7.5. Конвергентни низови

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$

Другим речима, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако се скоро сви чланови низа (a_n) (сви осим, можда, коначног броја њих $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$), за свако ε, налазе у ε-околини $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ тачке a.

Низ је *конвергентан* ако има граничну вредност, а *дивергентан* ако је нема. Конвергентан низ, чија је гранична вредност нула, назива се нула-низ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall M \in \mathbf{R})(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies a_n > M),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall M \in \mathbf{R})(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies a_n < M).$$

Особине конвергентних низова:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{ако је за све } n\text{: } b_n \neq 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Монотон и ограничен низ је конвергентан.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1208. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^3}}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1209. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n + 5}{4n^2 + n - 6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 2n + 1}{n^4 + 2n^2 - 3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 1}{n^2 + 4}$.

1210. Наћи следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2}{2n+3} + \dfrac{1-3n^3}{3n^2+1}\right)$; ∞ $-\infty$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2}{2n+1} + \dfrac{1-6n^3}{1+4n^2}\right)$.

1211. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)!}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

1212. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}+3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$.

1213. Наћи следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{3n+1}-\dfrac{n}{2}\right)$;

ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5+9+\cdots+(4n-3)}{2(n+1)}-n\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_3 3+\log_3 9+\cdots+\log_3 3^n}{n^2}$.

1214. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{7^{n-1}}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}{1-25^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$, $\quad |a|,|b|<1$.

1215. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

1216. По дефиницији доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$, одредивши за свако $\varepsilon>0$ природан број n_0 тако да је $|a_n-0|<\varepsilon$ за све $n>n_0$ и нонунити таблицу

ε	1	1/9	1/100	1/1000	1/4624
n_0					

1217. По дефиницији доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, одредивши за свако $\varepsilon>0$ природан број n_0 тако да је $|a_n-0|<\varepsilon$ за све $n>n_0$ и попунити таблицу

ε	0,1	0,01	0,001	0,00001
n_0				

1218. По дефиницији доказати да је:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+5}=2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}=0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\right)=0$.

1219. По дефиницији доказати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2-n+2}=0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n}=0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^{n^2}}{n^2}=0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\log_{10}n}=0$; ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-1}{n^4+1}=1$.

1220. Дати су низови:

а) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; б) $x_n=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; в) $x_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$;

г) $x_n=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$; д) $x_n=\dfrac{1}{\log_{10}n}-\dfrac{1}{\log_{10}(n+1)}$.

Доказати да су сви дати низови строго монотоно опадајући и по дефиницији доказати да су нула-низови.

1221. По дефиницији доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, за $a>0$.

1222. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, доказати да је $a=b$.

1223. Доказати да је низ $a_n=(-1)^n$ дивергентан.

1224. Доказати да је низ $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n-1}{n}$ дивергентан.

1225. Нека су (α_n) и (β_n) нула низови и $c\in\mathbf{R}$. Доказати да су и: а) $(c\alpha_n)$; б) $(\alpha_n\beta_n)$; в) $(\alpha_n+\beta_n)$ нула-низови.

1226. Нека је $q\in\mathbf{R}$, $|q|<1$ и низ (a_n) задат формулом $a_n=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1227. Збир S_n првих n чланова низа (a_n) је $S_n=\sqrt{n^2+n-1}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1228. Доказати да је низ (a_n) монотон и ограничен и наћи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, ако је:

а) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\alpha}{a_n}\right)$, $\alpha\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, $a_1>0$;

б) $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{\alpha}{a_n^2}\right)$, $\alpha\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, $a_1>0$.

1229. За следеће низове доказати да су монотони и ограничени и наћи њихове граничне вредности: а) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n > 1$; б) $a_{n+1} = \dfrac{3 + a_n}{2}$, $n \geqslant 1$, $a_1 = 0$.

1230. Коришћењем својства непрекидности експоненцијалне функције доказује се да, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a > 0$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. Применом ове чињенице, израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$.

7.6. Неке примене низова

1. *Сложени интересни рачун*

Ако је K главница, а p каматна стопа, вредност главнице после n година је

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

2. *Рачун улога и рачун ренте*

Ако се на почетку сваке године уплаћује улог u и рачуна $p\%$ сложене камате, тада ће се на крају n-те године добити сума

$$U_n = uq + uq^2 + \cdots + uq^n = uq\frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{где је } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Ако се на почетку сваке године од главнице K исплаћује рента r и рачуна $p\%$ сложеног интереса $\left(q = 1 + \dfrac{p}{100}\right)$, на крају n-те године у банци ће остати сума

$$Kq^n - (rq + rq^2 + \cdots + rq^n) = Kq^n - rq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

3. *Збир бесконачног геометријског низа*

$$b + bq + \cdots + bq^{n-1} + \cdots = \frac{b}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

1231. Становништво једног града повећава се сваке године за $1/80$ део. Кроз колико година ће се становништво тога града удвостручити?

1232. Израчунати збирове:

а) $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots$; б) $1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \cdots + (-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \cdots$;

в) $x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, за $|x| < 1$;

г) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, за $|x| < 1$;
д) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$, за $|x| < 1/2$; ђ) $0,1 + 0,01 + 0,001 + \cdots$;
е) $\log 5 + \log\sqrt{5} + \log\sqrt[4]{5} + \log\sqrt[8]{5} + \cdots$;
ж) $1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
з) $1 + \sqrt{\dfrac{1}{a+1}} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+1}\sqrt{\dfrac{1}{a+1}} + \cdots$, $a > 0$;
и) $1 + \sqrt{\dfrac{a+1}{a+2}} + \dfrac{a+1}{a+2} + \dfrac{a+1}{a+2}\sqrt{\dfrac{a+1}{a+2}} + \cdots$, $a > -1$.

1233. За које је вредности $a \in \mathbf{R}$ збир бесконачног геометријског низа $2a + a\sqrt{2} + a + \cdots$ једнак 8?

1234. Следеће рационалне бројеве записане у облику бесконачног периодичног децималног броја, написати у облику $\dfrac{p}{q}$: а) 0,(3); б) 3,2(27); в) 0,(12); г) 0,431(56); д) 41,3(12); ђ) 8, 90(714285).

1235. Наћи опадајући геометријски низ чији је сваки члан 10 пута већи од збира свих следећих иза њега.

1236. Одредити количник опадајућег геометријског низа чији је први члан 3, а збир свих чланова 7/2.

1237. За које x важи $1 + 3x + 9x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-3x}$?

1238. Решити неједначину: $1 + \log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x + \cdots > 0$.

1239. У једнакостранични троугао странице a уписан је круг. У тај круг уписан је нови једнакостранични троугао, у тај троугао поново је уписан круг итд. Израчунати збир површина свих тих кругова.

1240. Над висином једнакостраничног троугла странице a конструисан је други једнакостранични троугао, над висином другог трећи итд. Наћи збир површина свих тих једнакостраничних троуглова.

1241. У троугао са страницама 15, 41 и 52 уписан је нови троугао чија су темена средишта првог троугла. Средишта страница другог троугла су темена трећег итд. Израчунати збир површина свих троуглова.

1242. У квадрат странице a уписан је нов квадрат, чија су темена средишта страница датог квадрата. У други квадрат на исти начин уписан је трећи, итд. Наћи збир обима и збир површина овако добијених квадрата.

1243. У круг полупречника r уписан је квадрат. У квадрат је уписан круг, итд. Израчунати збир свих полупречника кругова и збир површина тих кругова.

1244. У правилни шестоугао странице a уписан је круг, у њега је уписан правилни шестоугао, а у тај шестоугао поново круг, итд. Наћи збир S_1 површина свих шестоуглова и збир S_2 површина свих кругова.

1245. У праву правилну четворострану призму основне ивице a и висине H уписана је друга призма, чија су темена основа средишта основних ивица праве призме. У другу призму на исти начин уписана је трећа, итд. Израчунати збир запремина тако добијених призми.

1246. У коцку ивице a уписана је лопта, у лопту коцка, па у коцку лопта, итд. Израчунати збир запремина свих лопти.

1247. У банку је уложено 6 000 000 динара са каматном стопом 60. Колико ће износити главница после 3 године?

1248. Ако се дуг који би кроз 5 година износио 2 000 000 динара жели исплатити одмах, а каматна стопа је 50, који износ треба исплатити?

1249. Ако се од банке узме кредит 1 000 000 динара на 5 година, с каматном стопом 30, колико ће износити годишња рата, ако се прва рата исплаћује истовремено са подизањем кредита?

1250. Колико се година може примати рента од 500 000 динара на почетку сваке године, ако се она исплаћује од главнице која је, у износу од 2 000 000 динара, уложена истовремено кад се рента почела исплаћивати? Рачунати интересну стопу $p = 20$.

1251. На колико година треба уложити неку суму са стопом 40 да би се она удесетостручила?

1252. Ако се 30 година улаже на почетку сваке године по 120 000 динара са интересном стопом 60, колика се рента може на почетку сваке године примати одмах по престанку улагања, а у току 20 година?

1253. Колики се кредит може подићи од банке, ако се жели да се он отплаћује 15 година у једнаким годишњим ратама од по 600 000 динара, ако је каматна стопа 50?

7.7. Једноставније диференцне једначине

1. Диференцна једначина облика

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \quad n \geqslant 0, \quad x_0 = a, \ x_1 = b.$$

Ако је $q = 0$, једначина се своди на $x_{n+2} = px_{n+1}$. Решења ове једначине су геометријски низови чији је количник p.

Ако је $q \neq 0$, посматра се тзв. *карактеристична једначина* $t^2 = pt + q$. Нека су α и β корени карактеристичне једначине. Тада је $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, где се бројеви A и B одређују из услова: $A + B = a$, $A\alpha + B\beta = b$.

2. Систем диференцних једначина облика

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qy_n, \\ y_{n+1} &= rx_n + sy_n, \end{aligned} \quad n \geqslant 0, \quad x_0 = a, \ y_0 = b.$$

Ако је $q = r = 0$, систем се своди на $x_{n+1} = px_n$, $y_{n+1} = sy_n$, чија су решења парови геометријских низова са количницима p, односно r.

Ако је $q \neq 0$ или $r \neq 0$ (на пример $q \neq 0$), после замењивања из прве једначине у другу и елементарних трансформација, добија се једначина

$$x_{n+2} = (p+s)x_{n+1} + (qr - ps)x_n,$$

чије је решење низ (x_n). Низ (y_n) се одређује из релације $qy_n = x_{n+1} - px_n$.

1254. Решити диференцне једначине:
а) $x_{n+1} = 2x_n$, за $n \geqslant 0$, $x_0 = 1$; б) $x_{n+1} = -\frac{1}{10}x_n$, за $n \geqslant 0$, $x_0 = a$, $a \in \mathbf{R}$;
в) $x_{n+1} = x_n + 2n - 2$, за $n \geqslant 0$, $x_0 = 2$.

1255. Одредити решење диференцне једначине $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $1n \geqslant 0$ које задовољава услове:
а) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$; б) $a_0 = 1$, $a_1 = 5$; в) $a_0 = 2$, $a_1 = 2$.

Решити диференцне једначине (задаци 1256–1259):

1256. а) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $n \geqslant 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$;
б) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $n \geqslant 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
в) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geqslant 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
г) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, $n \geqslant 0$, $a_0 = 3$, $a_1 = 1$.

1257. а) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, за $n \geqslant 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 7$;
б) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, за $n \geqslant 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$;
в) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$, за $n \geqslant 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.

1258. а) $2x_{n+1} - x_n = 1$, за $n \geqslant 0$, $x_0 = 2$;
б) $x_n = 3x_{n-1} + 1$, за $n \geqslant 2$, $x_1 = 2$; в) $x_n = 3x_{n-1} + 2^{n-1}$, за $n \geqslant 2$, $x_1 = 1$.

1259. а) $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$, за $n \geqslant 2$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a, b \in \mathbf{R}$; б) $a_n = (a+b)a_{n-1} - aba_{n-2}$, за $n \geqslant 3$, $a_1 = a + b$, $a_2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$.

Глава VIII

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И ПОЛИНОМИ

8.1. Комплексни бројеви

8.1.1. Комплексни бројеви. Увод

1. *Комплексни бројеви* су изрази облика $a+ib$, где су a и b реални бројеви а i неки симбол, за које су дефиниције сабирања и множења дате на следећи начин:

1° $a+ib=c+id \iff a=c$ и $b=d$;

2° $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$;

3° $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

Број $a=\mathrm{Re}(z)$ је *реални део* комплексног броја z, а број $b=\mathrm{Im}(z)$ *имагинарни део* од z. Доказује се да је $i^2=-1$ и да се дељење комплексних бројева може дефинисати на следећи начин:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\qquad c^2+d^2>0.$$

За комплексни број z њему *конјуговани* број је $\bar{z}=a-ib$.

Модул комплексног броја $z=a+ib$ је број $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

1260. Израчунати:

а) 1° i^3; 2° i^{-4}; 3° i^{-5}; 4° i^{17}; 5° i^{-121}; б) 1° $\dfrac{1}{i}$; 2° $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$; 3° $\left(\dfrac{1}{2i}\right)^2$.

1261. Наћи збир, разлику, производ и количник бројева: а) 2, i; б) $1+i$, $-2+i$; в) $4+5i$, $2-5i$; г) $-7+2i$, i; д) $5+7i$, $3i^7$; ђ) $3+i$, $3-i$.

1262. Доказати да је:

а) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$; б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4=1$.

1263. Решити једначину:

а) $z^2-(2+i)z+i=0$; б) $2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0$;

в) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$.

1264. Доказати неједнакости:

а) $\mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$; б) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\leqslant 2|z_1|\,|z_2|$;

в) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; г) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$;

д) $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$, $n\in\mathbf{N}$.

1265. Ако је $1+z+z^2=0$, доказати да је $z^3=1$, а затим доказати:

а) $(az^2+bz)(bz^2+az)=a^2-ab+b^2$;

б) $(a+b)(a+bz)(a+bz^2)=a^3+b^3$;

в) $z^{2n}+z^n+1=\begin{cases}3, & n=3k\\ 0, & n=3k\pm 1\end{cases}\quad(k\in\mathbf{N})$;

г) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz)$.

1266. Ако је $z+\dfrac{1}{z}=1$ израчунати: а) z^3; б) $z^{1000}+\dfrac{1}{z^{1000}}$.

1267. Шта у xOy равни представља скуп парова (x,y) таквих да је $z=x+iy$ и:

а) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)<1$; б) $|z|=2$; в) $|z-1|=1$;

г) $z\bar{z}+(1+i)z+(1-i)\bar{z}=0$; д) $|z-2|+|z+2|=4$;

ђ) $|z+2|+|z-2|=10$; е) $|z+5|-|z-5|=8$.

1268. Решити системе једначина: а) $\left|\dfrac{z-12i}{z-8i}\right|=\dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1$;

б) $|z^2-2i|=4$, $\left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1$; в) $|z+1|=|z+4|=|z-i|$.

8.1.2. Тригонометријски облик комплексног броја. Моаврова формула. Кореновање комплексних бројева

Нека је $z = a+ib$ комплексан број различит од нуле. Он се може приказати у *тригонометријском облику* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ — *модул* комплексног броја, а угао φ — *аргумент*. Угао φ одређен је условима
$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$
Овим условима угао φ једнозначно је одређен и означава се са $\arg z$. Уместо услова $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ понекад се захтева да $\arg z$ задовољава услов $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Ако одустанемо од једнозначне одређеност угла φ, тј. решавамо систем једначина
$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$
онда су сва решења облика $\{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Ова фамилија углова означава се са $\operatorname{Arg} z$ и обично се пише (мада не и сасвим прецизно):
$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi.$$
Ако се за $\arg z$ узме да припада интервалу $[0, 2\pi)$ и ако је $a \neq 0$, из горњег система једначина налази се да је $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$. Одавде је $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ *само ако је z у првом квадранту*, тј. само ако је $a > 0$ и $b \geqslant 0$. У општем случају, формула гласи
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a), & a > 0,\ b \geqslant 0; \\ \pi/2, & a = 0,\ b > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(b/a), & a < 0; \\ 3\pi/2, & a = 0,\ b < 0; \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(b/a), & a > 0,\ b < 0. \end{cases}$$
Из практичних разлога, ако тачка z није евидентно у првом квадранту, за одређивање $\arg z$ најбоље је решавати систем $\cos\varphi = a/r$, $\sin\varphi = b/r$. Нека су дати комплексни бројеви $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тада је:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

3. *Моаврова формула*: $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

4. Нека је $n \in \mathbf{N}$. Сва решења једначине $w^n = z$ (има их тачно n) су n-ти корени из комплексног броја z и под $\sqrt[n]{z}$ подразумева се скуп вредности $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где је
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1269. Следеће комплексне бројеве написати у тригонометријском облику: а) $6i$; б) $3+3i$; в) $-2+2\sqrt{3}i$; г) $2-2i$; д) $-\sqrt{3}-i$.

1270. У једначини $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$ одредити комплексан број z и написати га у тригонометријском облику.

1271. Одредити производ бројева:

а) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$ и $z_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

б) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

в) $z_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ и $z_2=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $z_2=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

д) $z_1=\cos 5+i\sin 5$ и $z_2=\cos 2+i\sin 2$;

ђ) $z_1=4(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$ и $z_2=2(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$.

1272. Одредити количник бројева:

а) $z_1=10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $z_1=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $z_1=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ$ и $z_2=\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)$;

г) $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

1273. Дате бројеве записати у тригонометријском облику:

а) $z=\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$; б) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$.

1274. Одредити:

а) z^6 ако је $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$; б) z^{10} ако је $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

в) z^{13} ако је $z=i-\sqrt{3}$; г) z^6 ако је $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

1275. Одредити све вредности z тако да је: а) $z^2=i$; б) $z^3=1$; в) $z^4=-1$.

1276. Применом Моаврове формуле израчунати:

а) $(1+i)^{25}$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; в) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

1277. Наћи вредности z тако да је: а) $z^4=i$; б) $z^4=-16$.

1278. Следеће бројеве написати у тригонометријском облику:

а) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$; б) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

1279. Решити једначине: а) $z^4+8+8\sqrt{3}\,i=0$; б) $z^4+8-8\sqrt{3}\,i=0$; в) $z^3+4-\sqrt{48}\,i=0$; г) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$.

1280. Израчунати $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

1281. Применом Моаврове формуле доказати следеће релације:

а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

б) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

1282. Решити једначину $z^2 + |z| = 0$.

1283. У комплексној равни одредити све тачке z за које је:

а) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$; б) $\arg z = 2$; в) $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}$.

1284. У комплексној равни дате су тачке z_1 и z_2. Одредити положај тачака: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$; в) z_1^2; г) $z_1 \cdot i$.

1285. Средиште квадрата је тачка z_0, а једно теме је тачка z_1. Одредити остала темена квадрата.

1286. Ако је $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 z_2 \neq -1$, доказати да је број $w = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ реалан.

1287. Нека је $|z| = 1$ и $z \neq -1$. Доказати да се z може написати у облику $z = \dfrac{1+it}{1-it}$, $t \in \mathbf{R}$.

1288. Ако је $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$, доказати да је $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$.

1289. Доказати формулу:

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

1290. Доказати да је:

а) $(1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$; б) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

1291. Решити једначину и дати геометријску интерпретацију:

а) $z^4 = (i+2)^4$; б) $(2+5i)z^3 - 2i + 5 = 0$; в) $z^4 = i(z-2i)^4$.

1292. Наћи све комплексне бројеве z такве да је: а) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$; б) $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$; в) $z^2 = -3 + 4i$.

8.2. Полиноми

8.2.1. Дељење у прстену полинома

За два полинома $a(x)$ и $b(x)$, таква да је $b(x) \neq 0$ једнозначно су одређена два полинома $q(x)$ и $r(x)$ тако да је

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x),$$

при чему је степен полинома $r(x)$ мањи од степена полинома $b(x)$.

Безуова теорема. Остатак који се добија при дељењу полинома $a(x)$ са $x - c$ једнак је $a(c)$. Полином $a(x)$ дељив је са $x - c$ ако и само ако је $a(c) = 0$.

Основни став алгебре. Сваки полином степена већег од нуле има бар једну комплексну нулу.

Теорема о факторизацији полинома. Сваки полином n-тог степена $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$, може бити представљен у облику

$$p(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n),$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сви корени тог полинома.

Полином $a(x)$ дељив је полиномом $b(x)$ ако и само ако је сваки корен полинома $b(x)$ уједно и корен полинома $a(x)$.

1293. Одредити количник $q(x)$ и остатак $r(x)$ при дељењу полинома $a(x)$ и $b(x)$:

а) $a(x) = x^5 - x^3 + x + 1$, $b(x) = x^2 + x + 1$;

б) $a(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + x - 1$, $b(x) = x^2 - x + 2$;

в) $a(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 9$, $b(x) = x - 1$;

г) $a(x) = x^5$, $b(x) = x^2 - 1$.

1294. Доказати да је полином $x^5 - x^3 + x + 2$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

1295. Одредити бројеве p и q тако да полином $a(x)$ буде дељив полиномом $b(x)$, ако је:

а) $a(x) = x^4 - 3x^2 + px + q$, $b(x) = x^2 - 2x + 4$;

б) $a(x) = 6x^4 - 7x^3 + px^2 + 3x + 2$, $b(x) = x^2 - x + q$;

в) $a(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$, $b(x) = x^2 - 3x - 4$;

г) $a(x) = x^4 + (p - q)x^3 + (p - q)x + p^2$, $b(x) = x^2 - (p - q)x + p^2$.

1296. Колики је остатак при дељењу полинома:

а) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ са $x - 1$;

б) $p(x) = x^3 - x^2 - x$ са $x - 1 + 2i$.

1297. Полином $p(x)$ при дељењу са $x-1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x-2$ остатак 4. Колики је остатак при дељењу са $(x-1)(x-2)$?

1298. Ако полином $p(x)$ при дељењу са $x-1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x+1$ остатак 1, наћи остатак при дељењу $p(x)$ са x^2-1.

1299. Саставити бар један полином чије су нуле: а) $x_1=1$, $x_2=3-i$, $x_3=-4$, $x_4=i$; б) $x_1=2$ — двострука нула, $x_2=i$ — трострука нула; в) $x_1=\alpha$, $x_2=1/\alpha$, $x_3=-\alpha$, $x_4=-1/\alpha$, $\alpha\in\mathbf{C}$, $\alpha\neq 0$.

1300. Колики је остатак при дељењу полинома $p(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$ са $x+2+i$?

1301. Наћи остатак при дељењу полинома: а) $p(x)=x^{99}+x^3+10x+5$ са x^2+1; б) $p(x)=x^{100}-2x^{99}-1$ са x^2-3x+2; в) $p(x)=x^{100}-3x^{99}+1$ са x^2-4x+3.

1302. Наћи остатак при дељењу полинома $p(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ са x^3-x.

1303. Полином $p(x)$ степена не мањег од 3 даје при дељењу са $x+1$ остатак 4, а при дељењу са x^2+1 остатак $2x+3$. Одредити остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $(x+1)(x^2+1)$.

1304. Наћи коефицијенте a,b,c,d код полинома $p(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$ знајући да при дељењу са x^2+d $p(x)$ даје остатак x, а при дељењу са x^2-d, остатак $-x$.

1305. Доказати да је полином: а) $p(x)=x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$, $n\in\mathbf{N}$, дељив са $(x-a)^2$; б) $p(x)=x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n+1-n^2x^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$, дељив са $(x-1)^3$.

1306. Наћи све вредности реалних параметара a и b за које је полином $p(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ потпун квадрат неког полинома.

1307. Доказати да је полином $p(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$ дељив са x^2+1.

1308. Показати да је полином $p(x)=x^{991}+x^{344}+1$ дељив са x^2+x+1.

1309. Доказати да је полином $p(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ дељив полиномом $q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

1310. Одредити услов под којим је полином: а) $p(x)=x^{3m}-x^{3n-1}+x^{3p+2}$, $m,n,p\in\mathbf{N}$, дељив са x^2-x+1; б) $p(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, $m,n,p\in\mathbf{N}$, дељив са x^2-x+1.

1311. Наћи све природне бројеве n такве да је: а) полином $p(x)=(x+1)^n-x^n-1$ дељив са x^2+x+1; б) полином $p(x)=x^{2n}+x^n+1$ дељив са x^2+x+1.

1312. Доказати да је полином $p(x)=nx^{n+1}-(1+n\alpha)x^n+(\alpha-1)(x^{n-1}+\cdots+x)+\alpha$ дељив полиномом $q(x)=x^2-(\alpha+1)x+\alpha$. Посебно испитати случај када је $\alpha=1$.

8.2.2. Вијетове формуле

За корене x_1, x_2, x_3 полинома $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $a_0 \neq 0$, важе следеће формуле:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1/a_0, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= a_2/a_0, \\ x_1x_2x_3 &= -a_3/a_0. \end{aligned}$$

За корене x_1, x_2, x_3, x_4 полинома $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, $a_0 \neq 0$, важе следеће формуле:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -a_1/a_0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= a_2/a_0, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -a_3/a_0, \\ x_1x_2x_3x_4 &= a_4/a_0. \end{aligned}$$

Одговорајуће формуле важе и за полиноме n-тог степена, $n \in \mathbf{N}$.

1313. Решити једначину $2x^3 - x^2 - 7x + a = 0$, ако се зна да је збир два њена корена једнак 1.

1314. Решити једначину $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$ ако је познато да за два њена корена важи релација $2x_1 - 4x_2 = 1$.

1315. Одредити вредност параметра a тако да је један од корена једначине $x^3 - 7x + a = 0$ једнак двоструком другом корену.

1316. Ако су x_1, x_2, x_3 корени полинома $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{C}$, изразити $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ преко p и q.

1317. Одредити бар једну везу између коефицијената p и q једначине $x^3 + px + q = 0$, ако за њене корене важи $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

1318. Решити једначину $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$ ако је познато да се два њена корена разликују за $\sqrt{2}$.

1319. Одредити вредност реалног параметра a тако да корени једначине $x^3 - 5x + a = 0$ задовољавају релацију $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$ и затим решити једначину.

1320. Ако су x_1, x_2, x_3 корени полинома $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$, доказати да је

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

1321. Нека су x_1, x_2, x_3 корени полинома $ax^3 - ax^2 + bx + b$ $(a, b \neq 0)$. Израчунати вредност израза:

а) $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)$;

б) $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$.

1322. Нека су сви корени полинома $p(x) = x^3 + px + q$ $(p, q \in \mathbf{R})$ реални и $q \neq 0$. Доказати да је коефицијент p негативан.

1323. Доказати да ако је $a_1^2 < 2a_0a_2$, полином $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$ има бар један корен који није реалан.

1324. Наћи потребан и довољан услов да полином $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ има пар супротних корена.

1325. Професор диктира задатак „Следећи полином има све нуле реалне и позитивне ...“ Међутим, ученик је успео да напише само ове чланове полинома: $x^{20} - 20x^{19} + \cdots + 1$. Да ли ученик може да одреди све нуле овог полинома?

1326. Дата је једначина $8x^3 - 20x^2 - 10x + 33 = 0$. Саставити и решити кубну једначину чији су корени $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$, где су x_1, x_2, x_3 корени дате једначине, а затим одредити x_1, x_2, x_3.

1327. Бројеви α и β су корени полинома $x^3 + px + q = 0$ и задовољавају услов $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$. Одредити бар једну везу између p и q и изразити трећи корен γ датог полинома преко α и β.

1328. Одредити све вредности броја a за које корени полинома $x^3 - 6x^2 + ax + a$ задовољавају релацију $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$.

1329. Дате су једначине:

$$(1) \quad x^3 + amx^2 + ax + an = 0,$$
$$(2) \quad 2mx^2 + 2x + n = 0, \qquad a, m, n \in \mathbf{R},\ a \neq 0.$$

а) Ако су x_1, x_2, x_3 корени једначине (1), одредити вредност израза $S = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$. б) Доказати да ако једначина (2) нема реална решења, тада ни сва решења једначине (1) нису реална.

1330. Дате су једначине:

$$(1) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{и}$$
$$(2) \quad ax^2 + 2bx + 2c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

а) Ако су x_1, x_2, x_3 корени једначине (1), израчунати вредност израза $S = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$. б) Ако решења једначине (2) нису реална, доказати да ни сва решења једначине (1) нису реална.

1331. Нека су α, β, γ корени полинома $z^3 + pz^2 + qz + 1 = 0$. Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$.

8.2.3. Полиноми са реалним коефицијентима

Ако је $x = a + ib$ корен полинома $p(x)$ са реалним коефицијентима реда k, тада је и $\overline{x} = a - ib$ корен полинома $p(x)$ реда k.

Ако је цео број m корен полинома $p(x)$ са целим коефицијентима, тада је број m делитељ слободног члана тог полинома.

1332. Решити једначину ако је дат један њен корен:

а) $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50 = 0$, $x_1 = 1 - 3i$;

б) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 20 = 0$, $x_1 = 1 - 2i$;

в) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = i$.

1333. Одредити полином $p(x)$ четвртог степена који има реалне коефицијенте, двоструку нулу -2, једноструку нулу $1 - 2i$ и за који је $p(-3) = 20$.

1334. Дат је полином $3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$, $p, q \in \mathbf{R}$.

а) Одредити p и q тако да је $x_1 = 1 + i$ једна нула полинома.

б) Одредити остале нуле полинома.

1335. Познато је да полином $p(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$ има нулу $x_1 = -i\sqrt{3}$. Одредити остале нуле полинома.

1336. Потребан услов да је рационалан број $\dfrac{p}{q}$ (p, q — цели узајамно прости бројеви, $p \neq 0$, $q \neq 0$) корен полинома

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}, \quad a_0a_n \neq 0,$$

је $p \mid a_n$ и $q \mid a_0$. Доказати.

Знајући да полином има рационалан корен одредити тај корен:

а) $p(x) = 30x^5 - 9x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 40x + 12$;

б) $p(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$.

1337. Да ли постоји полином $p(x)$ са целим коефицијентима, такав да је: а) $p(2) = 4$, $p(6) = 6$; б) $p(19) = 1$, $p(62) = 2$?

8.3. Системи алгебарских једначина вишег реда

Решити системе једначине (задаци 1338–1352):

1338. а) $x^2 - xy - y^2 = -11$, $(x^2 - y^2)xy = 180$; б) $x(x+1)(3x^2+5y) = 144$, $4x^2 + x + 5y = 24$.

1339. а) $x^3 + y^3 = 35$, $x + y = 5$; б) $x^3 - y^3 = 7$, $x - y = 1$.

1340. а) $x^3 + y^3 = 9$, $x^2y + xy^2 = 6$; б) $x^3 + y^3 = 2$, $xy(x+y) = 2$; в) $x^3 + y^3 = 7$, $xy(x+y) = -2$. (Наћи само реална решења.)

1341. а) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481$, $x^2 + xy + y^2 = 37$; б) $7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155$, $3xy - x^2 - y^2 = 5$.

1342. а) $x^4 + y^4 = 82$, $xy = 3$; б) $x^3 + y^3 = 35$, $x + y = 5$; в) $x^3 + y^3 = 9$, $xy = 2$.

1343. а) $x^2 + y^4 = 5$, $xy^2 = 2$; б) $(x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117$, $x - y = 25$.

1344. $x^4 + y^4 = 17$, $x^2 + y^2 = 5$.

1345. $x^2 + y^4 = 20$, $x^4 + y^2 = 20$ (одредити само позитивна реална решења).

1346. $\dfrac{x^3}{y} + xy = 40$, $\dfrac{y^3}{x} + xy = 10$ (одредити само реална решења).

1347. $(x+y)(x^2 - y^2) = 16$, $(x-y)(x^2 + y^2) = 40$.

1348. $10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3)$, $x^2 + y^2 = 5$ (одредити само реална решења).

1349. а) $(x^2 + y^2)xy = 78$, $x^4 + y^4 = 97$; б) $(x^2+1)(y^2+1) = 10$, $(x+y)(xy-1) = 3$.

1350. $x + y = 1$, $x^5 + y^5 = 31$.

1351. а) $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $x^4 + y^4 + z^4 = 560$; б) $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = -4$, $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

1352. а) $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^3 + y^3 + z^3 = 8$; б) $x - y + z = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 - y^3 + z^3 = 36$.

1353. У зависности од параметара a и b решити систем: $x^2 + y^2 = axy$, $x^4 + y^4 = bx^2y^2$.

1354. У зависности од параметра a решити систем једначина:

а) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$;

б) $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = a^2$, $xyz = a^3$.

Глава IX
ТЕСТОВИ

9.1. Површина геометријских фигура у равни

1. Краћа основица правоуглог трапеза има дужину 2, дужи крак 4, а оштар угао трапеза је 60°. Површина овог трапеза је:

A) $8\sqrt{3}$; B) $6\sqrt{3}$; C) 6; D) $10\sqrt{3}$; E) $12\sqrt{3}$.

2. Површина правоуглог троугла је $2\sqrt{3}$. Висина која одговара хипотенузи дели прав угао у односу $1:2$. Дужина те висине је:

A) 3; B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) $\sqrt{3}$; E) 1.

3. Угао ABC правоуглог троугла ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) једнак је 15°. Ако је C_1 средиште хипотенузе AB, CC' висина троугла, E пресечна тачка симетрале угла $C'CC_1$ и хипотенузе, а дужина дужи $C'E$ једнака $2\,\mathrm{cm}$, онда је површина троугла ABC једнака:

A) $8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $16\,\mathrm{cm}^2$; C) $8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; E) $24\,\mathrm{cm}^2$.

4. Дужине двеју страница једног троугла су $1\,\mathrm{cm}$ и $\sqrt{15}\,\mathrm{cm}$, а тежишна дуж која одговара трећој је $2\,\mathrm{cm}$. Површина овог троугла је:

A) $2\,\mathrm{cm}^2$; B) $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}^2$; C) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $3\sqrt{5}\,\mathrm{cm}^2$; E) $4\,\mathrm{cm}^2$.

5. Странице паралелограма су $a = 12\sqrt{2}$ и $b = 7$, а оштар угао 45°. Површина тог паралелограма је:

A) 84; B) 42; C) $48\sqrt{2}$; D) $84\sqrt{2}$; E) $42\sqrt{2}$.

6. Дужа основица једнакокраког трапеза је $a = 21$, а крак $c = 5$ и дијагонала $d = 19$. Површина овог трапеза је:

A) $72\sqrt{3}$; B) $\dfrac{195\sqrt{3}}{4}$; C) $50\sqrt{3}$; D) $\dfrac{185\sqrt{3}}{2}$; E) $\dfrac{185\sqrt{3}}{4}$.

7. Тачке D и E су на страницама AC и BC троугла ABC тако да је дуж DE паралелна страници AB. Ако дуж DE садржи тежиште троугла ABC, тада је однос површина трапеза $ABED$ и троугла CDE једнак:

A) $5:4$; B) $3:2$; C) $1:1$; D) $4:5$; E) $2:3$.

8. Над пречником дужине $2r$ полукруга, са исте стране са које је полукруг, конструисан је једнакостранични троугао. Површина оног дела троугла који не припада кругу је:

A) $\frac{r^2}{6}(3\sqrt{3}+\pi)$; B) $\frac{r^2}{2}\sqrt{3}$; C) $\frac{r^2\pi}{6}$; D) $\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3}-\pi)$; E) $\frac{r^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$.

9. Висина једнакокраког трапеза је 17, а основице су 24 и 10. Полупречник круга описаног око тог трапеза је:

A) $10\sqrt{3}$; B) $10\sqrt{2}$; C) 15; D) 17; E) 13.

10. Око круга полупречника r описан је трапез чији су оштри углови α и β. Површина овог трапеза је:

A) $2r^2\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)$; B) $2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$; C) $4r^2\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right)$;
D) $4r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$; E) $r^2\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$.

9.2. Полиедри

1. У унутрашњости диедра са оштрим углом α дата је тачка M на одстојању a од ивице диедра и b од једне његове стране. Одстојање тачке M од друге стране диедра износи:

A) $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b\cos\alpha$; B) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}-2b\cos\alpha}{2}$; C) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b}{2}$;
D) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}-b\cos\alpha}{2}$; E) $\sqrt{a^2-b^2}\cos\alpha-b\sin\alpha$.

2. Основа праве призме је једнакокраки трапез $ABCD$ са страницама $AD = BC = 13\,\mathrm{cm}$, $AB = 21\,\mathrm{cm}$, $CD = 11\,\mathrm{cm}$. Површина дијагоналног пресека призме је $180\,\mathrm{cm}^2$. Површина призме износи:

A) $906\,\mathrm{cm}^2$; B) $900\,\mathrm{cm}^2$; C) $780\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $924\,\mathrm{cm}^2$; E) $640\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

3. Основа призме је квадрат странице a. Једна од бочних страна је такође квадрат, а друга је ромб са оштрим углом $60°$. Површина ове призме је:

A) $2a^2(1+\sqrt{3})$; B) $a^2(4+\sqrt{3})$; C) $6a^2$; D) $3a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; E) $a^2\left(5+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Средиште горње основе коцке и средишта страница њене доње основе су темена пирамиде. Ако је ивица коцке $2\,\mathrm{cm}$, површина омотача пирамиде је:

A) $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; B) $6\,\mathrm{cm}^2$; C) $9\,\mathrm{cm}^2$; D) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; E) $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

5. Основа четворостране пирамиде је правоугаоник страница $a = 18\,\mathrm{cm}$ и $b = 10\,\mathrm{cm}$. Висина пирамиде је $H = 12\,\mathrm{cm}$. Ако је подножје висине пресек дијагонала основе, површина пирамиде је:

A) $580\,\mathrm{cm}^2$; B) $600\,\mathrm{cm}^2$; C) $544\,\mathrm{cm}^2$; D) $564\,\mathrm{cm}^2$; E) $1032\,\mathrm{cm}^2$.

6. Основа пирамиде је троугао са страницама 6 cm, 5 cm и 5 cm. Све бочне стране нагнуте су према равни основе под углом од 45°. Запремина ове пирамиде (у cm^3) је:

A) 3; B) $5\sqrt{3}$; C) 6; D) $5\sqrt{2}$; E) 18.

7. Правилни тетраедар површине $6\sqrt{3}$ има запремину:

A) $18\sqrt{2}$; B) 6; C) $\sqrt{3}$; D) $3\sqrt{2}$; E) $3\sqrt{3}$.

8. Висина правилне шестостране пирамиде износи 8 cm. На растојању 3 cm од врха конструисана је раван паралелна основи. Површина добијеног пресека је $4\,\text{cm}^2$. Запремина пирамиде је:

A) $\frac{4096}{27}\,\text{cm}^3$; B) $\frac{1024}{27}\,\text{cm}^3$; C) $\frac{2048}{9}\,\text{cm}^3$; D) $\frac{1024}{9}\,\text{cm}^3$; E) $\frac{2048}{27}\,\text{cm}^3$.

9. Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су $a = 6$ и $b = 3$, а површина омотача једнака је збиру површина основа. Запремина ове зарубљене пирамиде је:

A) $30\sqrt{3}$; B) $24\sqrt{3}$; C) 126; D) 42; E) 14.

10. Бочна страна правилне зарубљене тростране пирамиде гради са равни основе оштар угао α. Ако је β угао између висине и бочне ивице пирамиде, тада важи:

A) $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$; B) $\operatorname{ctg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$; C) $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{ctg}\alpha$; D) $\operatorname{ctg}\beta = 2\operatorname{ctg}\alpha$; E) $\operatorname{ctg}\alpha = 4\operatorname{tg}\beta$.

9.3. Обртна тела

1. У правилну четворострану призму запремине $128\,\text{cm}^3$ уписан је кружни ваљак. Запремина тог ваљка (у cm^3) је:

A) 16π; B) $\frac{128}{3}\pi$; C) 36π; D) 32π; E) 28π.

2. Правоугли троугао ABC чије су катете $a = 3$ cm и $b = 4$ cm ротира око праве која садржи теме C правог угла и паралелна је хипотенузи. Запремина добијеног тела (у cm^3) је:

A) $28{,}8\pi$; B) $9{,}6\pi$; C) $20{,}32\pi$; D) $8{,}2\pi$; E) $19{,}2\pi$.

3. Угао између изводнице и висине купе је 60°. Ако је изводница за 1 cm дужа од висине, запремина те купе је (у cm^3):

A) π; B) $\frac{4\pi}{3}$; C) $\frac{3\pi}{2}$; D) $\pi\sqrt{3}$; E) 2π.

4. Правоугли трапез, чије су основице 20 cm и 8 cm а краћи крак 5 cm, ротира прво око дуже а затим око краће основице. Однос запремина тако добијених тела је:

A) 1 : 1; B) 1 : 2; C) 2 : 3; D) 3 : 4; E) 1 : 3.

5. Полупречници основа зарубљене купе су 3 cm и 6 cm, а изводница је 5 cm. Запремина ове зарубљене купе (у cm^3) је:

A) 72π; B) 42π; C) 168π; D) 90π; E) 84π.

6. Лопта је уписана у коцку. Однос површина лопте и коцке је:

A) $\frac{8\pi}{3}$; B) $\frac{2\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{12}$; E) $\frac{5\pi}{12}$.

7. У купу полупречника основе 2 cm уписана је лопта полупречника 1 cm. Запремина те купе је:

A) $4\pi\,\mathrm{cm}^3$; B) $\frac{32}{9}\pi\,\mathrm{cm}^3$; C) $\frac{16}{5}\pi\,\mathrm{cm}^3$; D) $\frac{35}{8}\pi\,\mathrm{cm}^3$; E) $6\pi\,\mathrm{cm}^3$.

8. Две паралелне равни, које су на међусобном растојању 2, секу сферу полупречника R по круговима полупречника 6 и 8, при чему центар сфере није између тих равни. Тада је R једнако:

A) $6\sqrt{3}$; B) 9; C) 10; D) 12; E) 16.

9. Развијањем омотача купе добија се кружни исечак са централним углом α. Ако је φ угао при врху осног пресека те купе, тада важи:

A) $\sin\varphi = \frac{\alpha}{2\pi}$; B) $\cos\varphi = \frac{\alpha}{2\pi}$; C) $\sin\varphi = \frac{\alpha}{\pi}$; D) $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\pi}$; E) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\pi}$.

10. У зарубљену купу полупречника основа r_1 и r_2 уписана је лопта. Однос запремина зарубљене купе и лопте је:

A) $\frac{(r_1+r_2)^2}{r_1r_2}$; B) $\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{2r_1r_2}$; C) $\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{r_1r_2}$; D) $\frac{(r_1+r_2)^2}{2r_1r_2}$;
E) $\frac{r_1^2-r_1r_2+r_2^2}{2r_1r_2}$.

9.4. Детерминанте и системи линеарних једначина и неједначина

1. Вредност детерминанте $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ је:

A) 0; B) $\cos 2\alpha$; C) $-\cos 2\alpha$; D) 1; E) $\sin 2\alpha$.

2. Вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 11 & -7 \end{vmatrix}$ је:

A) 0; B) 1; C) -3; D) 12; E) 5.

3. Ако је $x+y+z=6$, $2x-y+z=3$, $3x+2y+3z=13$, онда је $x-y+z$ једнако:

A) -1; B) 3; C) 0; D) 2; E) 4.

4. Систем једначина $ax+2z=2$, $5x+2y=1$, $x-2y+6z=3$ је немогућ (нема решења) ако и само ако је вредност параметра a једнака:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 2; E) таква вредност не постоји.

5. Решење једначине $\begin{vmatrix} x+7 & x+1 \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix} = 1$ је број:

A) 3; B) 4; C) 1; D) 0; E) $\dfrac{19}{5}$.

6. Систем једначина $ax+y+z=0$, $x+3y+z=0$, $x+6y+z=0$ има бесконачно много решења ако и само ако вредност параметра a припада интервалу:

A) $(-\infty,-2)$; B) $(-2,0)$; C) $(0,2)$; D) $(2,4)$; E) $(4,+\infty)$.

7. Колико целих бројева задовољава неједначину $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 \\ x & 10 \end{vmatrix} \geqslant 0$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

8. Систем једначина $2x+y=4$, $ax+y=a+2$, $x-3y=-5$:

A) нема решења; B) има бесконачно много решења за $a=0$; C) има јединствено решење само за $a=2$; D) има бесконачно много решења за $a\neq 0$; E) има јединствено решење за све a.

9. Површина четвороугла одређеног неједначинама $3x+y-18\leqslant 0$, $x+5y-20\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ износи:

A) 15; B) 16; C) 18; D) 19; E) 21.

10. Максимум функције $f(x,y)=2x+5y$ при условима $x+y\leqslant 24$, $3x+y\leqslant 21$, $x+y\leqslant 9$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ износи:

A) 33; B) 27; C) 42; D) 30; E) 35.

9.5. Вектори

1. Ако су $\overrightarrow{AB}=(1,5,-5)$ и $\overrightarrow{AC}=(3,1,-3)$ вектори страница троугла ABC, тада је збир координата вектора $\overrightarrow{AA_1}$, који одговара тежишној дужи тог троугла, једнак:

A) -2; B) -1; C) 0; D) 1; E) 2.

2. Вектори $\vec{a}=(2,p,3)$ и $\vec{b}=(q,-3,9)$ су колинеарни. Производ pq једнак је:

A) -6; B) 12; C) 6; D) 0; E) -12.

3. Дате су тачке $A(x,-1,-1)$ и $B(3,-3,1)$. $|\overrightarrow{AB}|=3$ ако и само ако је координата x једнака:

A) 1 или 2; B) 2 или 3; C) -2 или -3; D) 2 или 4; E) -2 или -4.

4. Дати су вектори $\vec{a}=(-1,2,3)$ и $\vec{b}=(5,y,-1)$. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су узајамно ортогонални ако и само ако је y једнако:

A) 0; B) 3,5; C) 4; D) 3; E) 4,5.

5. Дате су тачке $A(1,3,0)$, $B(2,3,-1)$, $C(1,2,-1)$. Угао између вектора $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ једнак је:

A) $60°$; B) $45°$; C) $90°$; D) $0°$; E) $30°$.

6. Ако је $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, тада је интензитет вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ једнак:

A) 5; B) $\sqrt{28}$; C) $\sqrt{19}$; D) 7; E) $2\sqrt{3}$.

7. Ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$, тада је $|\vec{a} \times \vec{b}|$ једнак:

A) 24; B) 18; C) 12; D) 9; E) 6.

8. Дијагонале паралелограма су $\vec{d_1} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$, при чему је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$. Површина тог паралелограма је:

A) $\sqrt{3}$; B) $\frac{3}{2}$; C) 3; D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; E) $3\sqrt{3}$.

9. Вектори $\vec{a} = (x-1, x+4, x-5)$, $\vec{b} = (x+2, x-4, x)$ и $\vec{c} = (x-3, x+2, x-1)$ су компланарни ако и само ако је x једнако:

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{3}{2}$; C) 0; D) 1; E) $-\frac{1}{2}$.

10. Запремина паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = (2,1,-2)$, $\vec{b} = (1,0,-2)$ и $\vec{c} = (0,-3,2)$ је:

A) 12; B) 18; C) 2; D) 8; E) 6.

9.6. Аналитичка геометрија у равни (I)

1. Странице троугла припадају правим $x+y-4=0$, $x-y+2=0$ и $3x-y-8=0$. Површина тог троугла је:

A) 16; B) $16\sqrt{2}$; C) 32; D) $27\sqrt{3}$; E) 8.

2. Ако тачка $M(x_0, y_0)$ припада правој $8x+3y-15=0$ и ако је једнако удаљена од тачака $A(8,2)$ и $B(2,4)$, тада је производ x_0y_0 једнак:

A) 9; B) 0; C) 6; D) 12; E) -9.

3. Једначина праве p која садржи пресек правих $x-3y+1=0$ и $2x+5y+13=0$ и ортогонална је на праву $2x+y-3=0$ је:

A) $x-2y+3=0$; B) $x+2y+2=0$; C) $2x+y-1=0$; D) $x-2y+2=0$; E) $2x+2y-1=0$.

4. Два наспрамна темена квадрата $ABCD$ су тачке $A(-1,3)$ и $C(5,1)$. Једначина праве одређене дијагоналом BD је:

A) $3x-y-4=0$; B) $x+3y-8=0$; C) $2x+y-1=0$; D) $x-2y-3=0$; E) $x-2y+7=0$.

5. Права l сече праву $y = 2x - 2$ у тачки A, а праву $y = x + 1$ у тачки B. Ако је тачка $M(1, 1)$ сердиште дужи AB, тада је једначина праве l:

A) $y = x$; B) $y = 2x - 1$; C) $x = 1$; D) $y = 2 - x$; E) $y = 1$.

6. У троуглу који образују координатне осе Ox и Oy и права $\sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\,y = 2\sqrt{3}$, висина која одговара хипотенузи има дужину:

A) 1,5; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{2{,}2}$; D) $\sqrt{2{,}4}$; E) 1,55.

7. Површина четвороугла ограниченог графицима функција $y = x + 1$ и $y = -x + 5$ и координатним осама (у првом квадранту) једнака је:

A) $\frac{11}{2}$; B) 6; C) $\frac{13}{2}$; D) 7; E) $\frac{17}{2}$.

8. Ако је тачка $B(x_0, y_0)$ симетрична тачки $A(8, 15)$ у односу на праву $y = 7x+9$, одан је збир $x_0 + y_0$ једнак:

A) -11; B) 11; C) 12; D) -10; E) 13.

9. Ако су тачке $A(1, 4)$ и $B(-5, 0)$ темена, а $T(-2, 1)$ тежиште троугла ABC, онда је једначина праве одређене страницом BC:

A) $x + 3y + 5 = 0$; B) $x - 3y + 5 = 0$; C) $x + 2y + 5 = 0$; D) $x + 5 = 0$; E) $2x + 3y + 10 = 0$.

10. Тачке $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ и $C(4, m)$ припадају једној правој ако и само ако је m једнако:

A) 3; B) 2; C) 5; D) 7; E) 8.

9.7. Аналитичка геометрија у равни (II)

1. Ако је центар круга $x^2 + y^2 + ax + by + 2 = 0$ тачка $(4, -8)$, онда је $a + b$ једнако:

A) -4; B) 4; C) 8; D) -8; E) 24.

2. Који од следећих кругова додирује праву $3x - 4y = 10$?

A) $x^2+y^2 = 2$; B) $x^2+y^2 = 3$; C) $x^2+y^2 = 4$; D) $x^2+y^2 = 5$; E) $x^2+y^2 = 10$.

3. Угао под којим се круг $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ види из тачке $P(-1, 3)$ је:

A) $30°$; B) $45°$; C) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$; D) $\operatorname{arctg} 3\sqrt{3}$; E) $60°$.

4. Збир свих вредности параметра p таквих да круг $(x-p)^2 + y^2 = 18$ додирује праву $x + y + 1 = 0$ је:

A) 0; B) 5; C) 2; D) -2; E) -7.

5. Ако су праве $4x+5y-25 = 0$ и $9x+20y-75 = 0$ тангенте елипсе $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$, тада је $a^2 - b^2$ једнако:

A) 16; B) 14; C) 20; D) 18; E) 24.

6. Под којим углом се секу елипса $3x^2+4y^2=84$ и хипербола $3x^2-4y^2=12$?

A) $60°$; B) $90°$; C) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$; D) $45°$; E) $\operatorname{arctg} 7$.

7. Дужина тетиве хиперболе $x^2-2y^2=2$ коју она одсеца на правој $3x-4y=2$ износи:

A) $8\sqrt{2}$; B) 10; C) $6\sqrt{2}$; D) 8; E) 5.

8. Ако тачка $M(x_0,y_0)$ припада четвртом квадранту и тангента параболе $y^2=16x$ у тачки M гради угао од $135°$ са x-осом, тада је x_0+y_0 једнако:

A) -6; B) -2; C) -4; D) -10; E) -8.

9. Једначина геометријског места средишта кругова који споља додирују круг $(x-4)^2+y^2=25$ и додирују праву $x+3=0$ је:

A) $y^2=16(x+2)$; B) $y^2=48(x+2)$; C) $y^2=24(x+\frac{1}{2})$; D) $y^2=24(x+1)$; E) $y^2=24(x+2)$.

10. Колико заједничких тачака имају елипса $3x^2+4y^2-6x+8y-5=0$ и парабола $(x-2)^2=4(y+2)$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

9.8. Елементарна теорија бројева. Низови

1. Остатак при дељењу броја $(116+17^{17})^{22}$ са 8 је:

A) 0; B) 4; C) 7; D) 5; E) 1.

2. Ако је $a_{n+1}=a_{n-1}+2a_n$, $n\geqslant 2$ и $a_1=a_2=1$, тада је a_5 једнако:

A) 7; B) 41; C) 11; D) 21; E) 17.

3. Збир свих троцифрених бројева дељивих са 11 је:

A) 43 450; B) 43 560; C) 44 440; D) 44 000; E) 44 550.

4. Дат је низ $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=11$, $a_5=18$, ... , такав да разлике његових изастопни чланова образују аритметички низ. У том низу је a_{501} једнако:

A) 250 001; B) 250 002; C) 250 000; D) 125 251; E) 249 999.

5. Ако је у аритметичком низу $a_n=m$, $a_m=n$ $(m\geqslant n)$, тада је члан a_{m-n} једнак:

A) $2m-2$; B) $2n-2$; C) $2m$; D) $2n$; E) 0.

6. Реални бројеви b_1, b_2, b_3 су прва три члана једног геометријског низа. Ако је $b_1b_2b_3=343$ и $b_2-b_1=5$, тада је збир $b_1+b_2+b_3$ једнак:

A) 7; B) 40; C) 35; D) $\dfrac{67}{2}$; E) 62.

7. Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sin\frac{2n\pi}{3}}{n+2}$ је једнака:

A) $+\infty$; B) 0; C) не постоји; D) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$; E) $-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

8. Гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{2n+1}-\dfrac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2}\right)$ једнака је:

A) $-\dfrac{1}{2}$; B) $\dfrac{3}{2}$; C) $\dfrac{1}{4}$; D) 0; E) $+\infty$.

9. Скуп решења неједначине $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots<2$ је:

A) $(-\infty,\frac{1}{2})$; B) $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$; C) $(-1,\frac{1}{2})$; D) $\varnothing$; E) $\{0\}$.

10. У правилни шестоугао странице a уписан је круг, у њега је уписан правилни шестоугао, а у тај шестоугао поново круг итд. Збир површина свих шестоуглова је:

A) $6a^2\sqrt{3}$; B) $2a^2\sqrt{3}$; C) $6a^2$; D) $8a^2$; E) $12a^2$.

9.9. Комплексни бројеви. Полиноми

1. Вредност израза $(1-i)^{98}-(1+i)^{98}$ је:

A) $-2^{50}i$; B) $-16i$; C) $2^{50}i$; D) $16i$; E) 0.

2. Реални део комплексног броја $z=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{17}}{(1-i)^{22}}$ једнак је:

A) $-2^{26}\sqrt{3}$; B) $-2^6\sqrt{3}$; C) $2^6\sqrt{3}$; D) $-2^5\sqrt{3}$; E) $2^{26}\sqrt{3}$.

3. Вредност израза $\dfrac{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^5(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})^3}{(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})^2}$ једнака је:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; B) 1; C) -1; D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; E) i.

4. Нека је $n\in\mathbf{N}$, $n>1$. Збир свих решења једначине $z^n=2$ $(z\in\mathbf{C})$ је:

A) $\sqrt[n]{2}$; B) 0; C) $n\sqrt[n]{2}$; D) $-n\sqrt[n]{2}$; E) $-\sqrt[n]{2}$.

5. Остатак при дељењу полинома $x^{99}+x^3+10x+5$ са x^2+1 је:

A) $8x+5$; B) 5; C) $5x+8$; D) $8x-5$; E) $5x-8$.

6. Збир квадрата решења једначине $x^3+px^2+q=0$ једнак је

A) $-q^2$; B) 0; C) p^2; D) $-2p$; E) $2q$.

7. Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $27x^3+64=0$, онда је вредност израза $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$ једнака:

A) 0; B) $\dfrac{27}{64}$; C) $\dfrac{64}{27}$; D) $-\dfrac{27}{64}$; E) $-\dfrac{64}{27}$.

8. Ако је полином x^4+ax^2+b дељив полиномом x^2+4x+6, тада је $a+b$ једнако:

A) 12; B) 24; C) 32; D) 36; E) 40.

9. Ако је $3x^3-x^2+12x-4=(x-2i)(3x-1)Q(x)$ за све x, онда је $Q(x)$ једнако:

A) $x-2$; B) $x+2$; C) $x-2i$; D) $x+2i$; E) $x+i$.

10. Нека је $p(x)$ полином степена n, $n\geqslant 3$. Ако је остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x-1$ једнак 3, а остатак при дељењу полинома $p(x)$ са x^2+1 једнак $2x+5$, онда је остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $(x-1)(x^2+1)$ једнак:

A) $-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$; B) x^2+3x+1; C) $-2x^2+2x+3$; D) $2x+2$; E) $x+1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I – Површина геометријских фигура у равни

1. 1,2 m и 2,5 m. **2.** $x = 2\,\mathrm{cm}$, $y = 8\,\mathrm{cm}$. **3.** $O \approx 32{,}78\,\mathrm{cm}$, $P = 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. **4.** Из $a-b = 6$ и $(a-2)(b+5) = ab+32$ налазимо $a = 10$, $b = 4$. **5.** $P = 2{,}4(50+62{,}4) = 269{,}76\,\mathrm{m}^2$. **6.** $x = 9\,\mathrm{cm}$, $y = 2\,\mathrm{cm}$. **7.** $O = 16\,\mathrm{cm}$, $P = 16\,\mathrm{cm}^2$.

8. Нека је $b = a + \dfrac{10}{100}a = \dfrac{11}{10}a$. Тада је $O_1 = 4b = \dfrac{11}{10}O$, па је обим повећан за 10%, а површина је $P_1 = b^2 = \dfrac{121}{100}a^2 = \dfrac{121}{100}P$, дакле, површина је повећана за 21%. **9.** $O_k = 40\,\mathrm{cm}$, $O_p = 41\,\mathrm{cm}$. **10.** $\alpha = 30^\circ$. **11.** $d_1 = 4\,\mathrm{cm}$, $d_2 = 8\,\mathrm{cm}$, $a = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. **12.** $a = 6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 30^\circ$. **13.** $h = 6\sqrt{3}$, $d_1 = 12\sqrt{3}$, $P = 72\sqrt{3}$.

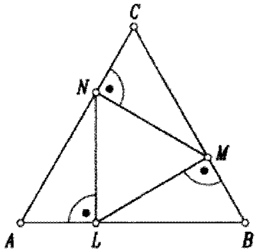
14. Из $\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$ имамо $d_1^2 + d_2^2 = 100$. Како је $d_1 + d_2 = 14$, то је $d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 196$, па је $P = \dfrac{d_2d_2}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$. **15.** $P = 35{,}28\,\mathrm{cm}^2$, $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 150^\circ$. **16.** $h = 12\,\mathrm{cm}$.

17. Краћа страница паралелограма и дијагонала образују једнакокраки троугао чија је висина у исто време и висина паралелограма. По Питагориној теореми (нацртати слику) имамо $h = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28\,\mathrm{cm}$, па је површина $P = 42 \cdot 28 = 1176\,\mathrm{cm}^2$. **18.** $h = \dfrac{32}{3}\,\mathrm{cm}$. **19.** $P = 12\,\mathrm{cm}^2$. **20.** $h_a = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $h_b = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $P = 24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. **21.** $\angle A = \angle C = 70^\circ$, $\angle B = \angle D = 110^\circ$. **22.** $a = 8\,\mathrm{cm}$, $b = 11\,\mathrm{cm}$. **23.** $P = 12\,\mathrm{cm}^2$. **24.** $O = 36\,\mathrm{cm}$.

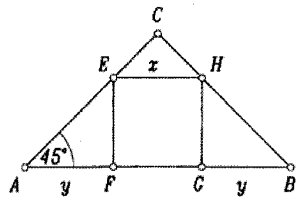
25. Како је (нацртати слику) $t_a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b^2$, $t_b^2 = a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, биће $c^2 = a^2 + b^2 = \dfrac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2) = 42$, одакле је $c = 2\sqrt{13}$. **26.** $P = \dfrac{16}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

27. Нека су дужине страница троугла $5t$, $6t$ и $5t$. Тада је обим $O = 5t + 6t + 5t = 16t = 80$, одакле је $t = 5$, па су странице дужине 25 mm, 30 mm и 25 mm. Користећи Питагорину теорему (нацртати слику) налазимо да је висина овог једнакокраког троугла $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 20$ mm, па је површина $P = \dfrac{AB \cdot CD}{2} = 300\,\mathrm{mm}^2$.

28. Имамо да је (в. слику) $AN = 2AL = \dfrac{2a}{3}$, па је $NL = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $P_{\triangle ALN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$ и $P_{\triangle NLM} = P_{\triangle ABC} - 3P_{\triangle ALN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.



Сл. уз зад. 28



Сл. уз зад. 39

29. а) 288; б) $\frac{7}{5}$; в) $\frac{x\sqrt{3}}{4}\sqrt{x^2-4y^2}$.

30. Површина сличног троугла је, по Хероновој формули $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=252$, тј. четири пута већа од површине траженог троугла. Дакле, његове странице ће бити два пута краће — дужине 22,5, 20 и 6,5.

31. Ако тежишну дуж CE продужимо преко E за њену дужину: $ED=CE$, добијамо троугао BCD који има једнаку површину као и троугао ABC (јер је $\triangle ACE \cong \triangle DBE$). Површина троугла BCD се израчунава по Хероновој формули и једнака је 420.

32. По Хероновој формули је

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{24\cdot(24-10)(24-17)(24-21)}=84.$$

Како је $P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$, налазимо $h_a=\frac{2P}{a}=16{,}8$, $h_b=\frac{2P}{b}=\frac{168}{17}$, $h_c=\frac{2P}{c}=8$. **33.** $O=24\,\mathrm{cm}$, $P=24\,\mathrm{cm}^2$, $r=2\,\mathrm{cm}$ и $R=5\,\mathrm{cm}$. **34.** $R=8{,}5\,\mathrm{cm}$.

35. По Хероновој формули површина посматраног троугла је $P=10\sqrt{2}$, јер је $s=\frac{a+b+c}{2}=10$, а полупречник описаног круга је $R=\frac{abc}{4P}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$.

36. Имамо да је полуобим троугла $s=18$, а површина $P=48$, па је $r=\frac{P}{s}=\frac{8}{3}$ и $R=\frac{abc}{4P}=\frac{25}{3}$. Означимо са C_1 средиште основице AB троугла. Тада је $CC_1=6$, па, како је $CS=R=25/3$ и $CO=CC_1-r=10/3$, то је $OS=CS-CO=5$.

37. Хипотенуза датог троугла је $c=10\,\mathrm{cm}$. Површина троугла је $\frac{1}{2}rs=12r$, а с друге стране $P=\frac{6\cdot 8}{2}=24$, па је $r=2\,\mathrm{cm}$. Полупречник описаног круга је $R=\frac{c}{2}=5\,\mathrm{cm}$. Тражени односи су $O_u:O_o=4\pi:10\pi=2:5$, $P_u:P_o=4\pi:25\pi=4:25$.

38. Нека је a страница квадрата, а b троугла. Из $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ налазимо $b=6$, а из $4a=3b$, да је $a=\frac{9}{2}$, па је дијагонала квадрата $a\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

39. Нека је x страница квадрата, $y=AF=GB$, в. слику. Како је $\angle A=45^\circ$, правоугли троугао AFE је једнакокрак, па је $x=y$. Из $10\sqrt{2}=AB=3x$ добијамо $x=10\sqrt{2}/3$ и $P=200/9\,\mathrm{cm}^2$. **40.** $30\,\mathrm{m}$ и $24\,\mathrm{m}$.

41. Нека је $E\in AB$ тачка таква да је $CE\parallel AD$. Површина троугла CEB је, по Хероновој формули, 84, а висина $h=\frac{2P}{EB}=11{,}2$. Површина трапеза је 140.

42. Висина трапеза је $h = 2r = 3\,\text{cm}$, а збир основица $a+b = \dfrac{2P}{h} = 10\,\text{cm}$. Дијагонала трапеза је $d = \sqrt{h^2 + \left(a - \dfrac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{34}\,\text{cm}$.

43. $d = 6\,\text{cm}$, $P = 96\,\text{cm}^2$. **44.** $P = 1260\,\text{cm}^2$. **45.** $P = 9{,}72\,\text{cm}^2$. **46.** $h = 4{,}8\,\text{cm}$.

47. Нека је E тачка основице AB таква да је $AE = BE = AD = DC$. Због $AE = EC = EB$ троугао ABC је правоугли, а због $EB = CD$ и $EB \parallel CD$ четвороугао $AECD$ је ромб. Површина трапеза $ABCD$ је

$$P = P_{ABC} + \frac{1}{2}P_{AECD} = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{2} = \frac{3}{4}xy.$$

48. Нека је $ABCD$ дати трапез и M и N пројекције тачака C и D на праву AB, тако да је $AN = x$, $BM = y$. Висина трапеза је $h = x\,\text{tg}\,45^\circ = y\,\text{tg}\,30^\circ$. Из ове једначине и услова $x + y = a - b = 4$ налазимо да је $h = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}}$. Површина трапеза је

$$P = \frac{a+b}{2}\cdot h = 12(\sqrt{3}-1).$$

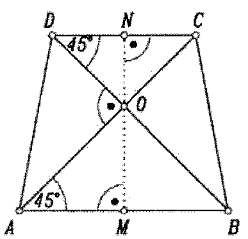
49. $32/3\,\text{cm}^2$ (најпре показати да су краци једнаки већој основици). **50.** $h^2\sqrt{3}$.

51. Дијагонале трапеза су $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$, збир основица је $2a$, а висина је $h = a$.

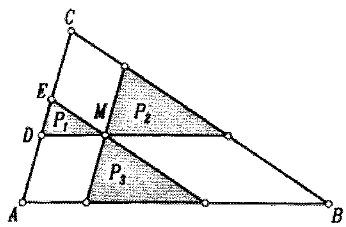
52. Нека је $ABCD$ дати трапез и O пресек његових дијагонала. Како је $AB : CD = 3 : 1$, то је $OB : OC = 3 : 1$. Ако је дијагонала трапеза d, онда за $\triangle OBC$ важи $BC^2 = \left(\dfrac{3}{4}d\right)^2 + \left(\dfrac{d}{4}\right)^2$, односно $\dfrac{5}{8}d^2 = 20$, одакле је $d^2 = 32$. Површина трапеза је $P = \dfrac{d^2}{2} = 16$.

53. Како је трапез једнакокраки и дијагонале се секу под правим углом у тачки O (слика) то је $\angle OAB = 45^\circ$, па је $OM = AM = \dfrac{a}{2}$. На исти начин закључујемо да је $\angle ODN = 45^\circ$ и $ON = DN = \dfrac{b}{2}$. Површина трапеза је

$$P = \frac{a+b}{2}h = (AM + DN)h = (OM + ON)h = h^2.$$



Сл. уз зад. 53



Сл. уз зад. 57

54. Из $m+h = 6$, $mh = 6$ налазимо $m_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$, $h_{1,2} = 3 \mp \sqrt{3}$. Ако је ψ угао између дијагонале и дуже основице трапеза, биће $\text{tg}\,\psi = \dfrac{h}{m} = 2 - \sqrt{3}$, па је $\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\,2\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

и тражени угао $\varphi = 30°$. (Друго решење $h = 3 + \sqrt{3}$, $m = 3 - \sqrt{3}$ даје $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\varphi = 150°$.)

55. Унутрашњи угао правилног n-тоугла једнак је $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Решења једначине

$$\frac{n \cdot 180°}{n+2} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} + 9°$$

су $n_1 = 8$ и $n_2 = -10$. Долази у обзир само решење n_1.

56. Како је $c^2 = a^2 + b^2$ и $ch_c = ab$, то је $c^2 + 2ch_c = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = s^2$. Из једначине $c^2 + 2ch_c - s^2 = 0$ налазимо $c_{1,2} = -h_c \pm \sqrt{h_c^2 + s^2}$, па како је $c > 0$, то је $c = \sqrt{h_c^2 + s^2} - h_c$.

57. Како су сва три троугла слична са датим троуглом (в. слику), то је

$$\sqrt{\frac{P_2}{P}} = \frac{AD}{AC}, \quad \sqrt{\frac{P_3}{P}} = \frac{EC}{AC}, \quad \sqrt{\frac{P_1}{P}} = \frac{DE}{AC}.$$

Ако саберемо ове једнакости, добијамо

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{AD + DE + EC}{AC} = 1,$$

одакле је $\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = 1 + 2 + 3 = 6$, односно $P = 36$.

58. Имамо да је $ch_c = ah_a = bh_b$ $(= 2P_{\triangle ABC})$. Одавде је $\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c}$ и $\frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c}$, па је $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{h_a + h_b}{h_c} = 1$. Дакле, $c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$, па је $c = \frac{ab}{a+b}$.

59. Коришћењем формуле за површину троугла $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, добијамо да је $\sin\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. Како је γ туп угао, то је $\cos\gamma = -\sqrt{1 - \sin^2\gamma} = -\frac{1}{7}$. По косинусној теореми $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 8$.

60. Нека је $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ и $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \alpha$. Тада је

$$\begin{aligned} P_{\triangle OAB} \cdot P_{\triangle OCD} &= AO \cdot BO \cdot \sin\alpha \cdot CO \cdot DO \cdot \sin\alpha \\ &= AO \cdot DO \cdot \sin(180° - \alpha) \cdot BO \cdot CO \cdot \sin(180° - \alpha) = P_{\triangle ODA} \cdot P_{\triangle OBC}, \end{aligned}$$

јер је $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

61. Нека је $DD_1 = CC_1 = h$, $AD_1 = x$, в. слику. Тада је

$$d_1^2 = (b + x)^2 + h^2 \quad \text{и} \quad d_2^2 = (a - x)^2 + h^2.$$

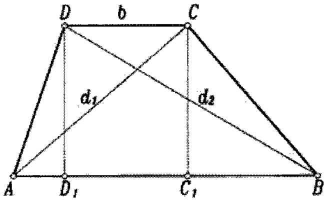
Одузимањем ових једначина, а затим решавањем по x, добијамо

$$x = \frac{a^2 - b^2 + d_1^2 - d_2^2}{2(a+b)}.$$

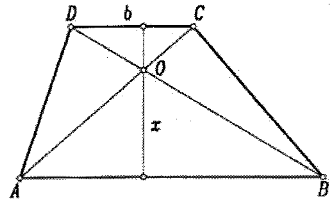
Заменом добијене вредности x у првој једначини добијамо

$$h^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(d_1^2 - d_2^2)^2}{4(a+b)^2}.$$

У задатку је $a = 6$, $b = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 8$, па је $h = \frac{8\sqrt{5}}{3}$; површина трапеза је $P = \frac{a+b}{2}h = 12\sqrt{5}$.



Сл. уз зад. 61



Сл. уз зад. 62

62. *Прво решење.* Нека је $AB = a$, $CD = b$, в. слику. Означимо са h висину трапеза и са x одстојање тачке O од основице AB. Тада је

$$P_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\,h = \frac{a(h-x)+ax+b(h-x)+bx}{2} = \frac{a(h-x)+bx}{2} + p^2 + q^2. \qquad (1)$$

Из сличности троуглова ABO и CDO имамо да је

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{h-x}, \qquad (2)$$

одакле је $bx = a(h-x)$, па из (1) налазимо

$$P_{ABCD} = bx + p^2 + q^2. \qquad (3)$$

Како је $q^2 = \dfrac{b(h-x)}{2}$, то је

$$h - x = \frac{2q^2}{b}. \qquad (4)$$

Ако (4) заменимо у (2), добијамо $\dfrac{a}{b}\cdot 2q^2 = bx$, тј. $x\cdot\dfrac{a}{b}\cdot 2q^2 = bx^2$, односно $4p^2q^2 = b^2x^2$, одакле је $bx = 2pq$. Ако ово заменимо у (3), добићемо

$$P_{ABCD} = 2pq + p^2 + q^2 = (p+q)^2.$$

Друго решење: Из односа $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ следи $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{h_1}{h_1+h_2} = \dfrac{p}{p+q}$, па је $\dfrac{a\cdot h_1/2}{(a+b)\cdot h/2} = \dfrac{p^2}{(p+q)^2}$, односно $P = (p+q)^2$.

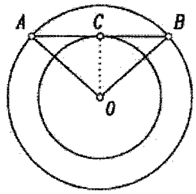
63. $\alpha \in \{60°, 270°, 150°, 280°\}$; $l \in \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{18}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right\}$. **64.** а) $\varphi = 45°$; б) $P = 2\pi\,\mathrm{cm}^2$.

65. $r = 6$, $P = 12\pi - 9\sqrt{3} \approx 22{,}09\,\mathrm{cm}^2$. **66.** $\alpha = 36°$. **67.** $\beta = 12°$. **68.** а) $l = \dfrac{1}{8}\pi r \approx 0{,}707\,\mathrm{m}$; б) $71{,}6\,\mathrm{cm}$; в) $\dfrac{\pi r\alpha}{180} = r$, $\alpha = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57{,}295° \approx 57°17'45''$.

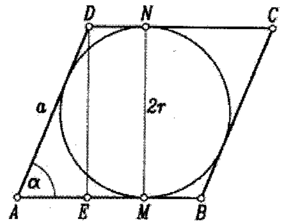
69. Нека је C тачка додира тетиве AB дужине a (в. слику). Површина прстена је $P = \pi AO^2 - \pi OC^2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi AC^2$, по Питагориној теореми из правоуглог троугла AOC. Пошто је $AC = \dfrac{1}{2}AB = 2$ cm, то је $P = 4\pi$ cm^2.

70. $P = 21\pi\,\mathrm{cm}^2$. **71.** $P_r = 12\pi\,\mathrm{cm}^2$, $P_R = 16\pi\,\mathrm{cm}^2$. **72.** Два пута.

73. Нека су a и b ($a > b$) основице трапеза. Његова висина једнака је пречнику уписаног круга, па је $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + 15^2 = 17^2$, одакле се добија да је $a - b = 16$ $(*)$. Како је трапез тангентни то је $a+b = 2\cdot 17 = 34$ $(**)$. Из $(*)$ и $(**)$ добијамо $a = 25$ и $b = 9$. $P = 255\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 69



Сл. уз зад. 76

74. Површина троугла је $S = 6\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$ (Херонова формула), а може се израчунати и као $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br$. Дакле, $r = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{12\sqrt{6}}{11}$. Површина круга је $\dfrac{864}{121}\pi \approx 22{,}433\,\mathrm{cm}^2$.

75. Ако су a и b основице, а c крак тог трапеза, његова висина је $h = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}$. Оштар угао α тог трапеза налазимо из релације $h = c\sin\alpha$. Одатле добијамо $\alpha = 60^\circ$. Центар круга описаног око тог трапеза је тада средиште веће основице, а полупречник му је $6\,\mathrm{cm}$. $P = 36\pi\,\mathrm{cm}^2$.

76. Имамо да је, в. слику,

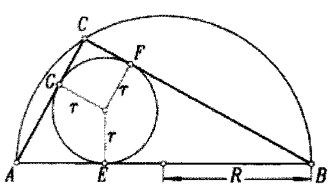
$$\sin\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{MN}{AD} = \frac{2r}{a}. \tag{1}$$

Пошто је $Q = 2ra$ и $S = \pi r^2$, то је $\dfrac{S}{Q} = \dfrac{\pi r}{2a}$, па је $\dfrac{2r}{a} = \dfrac{4S}{\pi Q}$, одакле, заменом у (1), налазимо $\sin\alpha = \dfrac{4S}{\pi Q}$.

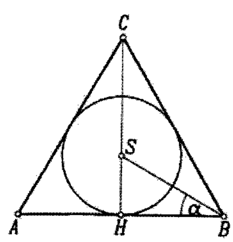
77. $a^2\left(\dfrac{5\pi}{72} - \dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)$. **78.** $\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}2284\,\mathrm{cm}$.

79. Дијагонала A_1A_3 је страница квадрата $A_1A_3A_5A_7$ уписаног у круг полупречника r, па је $A_1A_3 = \dfrac{2r}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

80. На основу особине тангентних дужи следи (в. слику) $s = 24$, па је $P = \frac{1}{2}rs = 24$.



Сл. уз зад. 80



Сл. уз зад. 82

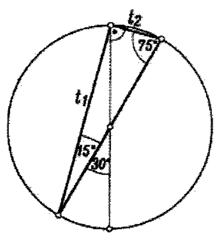
81. Како је $AB = a$, $AC = BC = \dfrac{a}{2}\sqrt{5}$, заменом у $R = \dfrac{abc}{4P}$, добијамо да је $R = \dfrac{5}{8}a$.

82. Нека је ABC дати троугао, $AB = 30\,\mathrm{cm}$, S центар уписаног круга и H средиште странице AB (слика). Ако је $\angle HBS = \alpha$, тада је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{SH}{HB} = \dfrac{7{,}5}{15} = \dfrac{1}{2}$ и

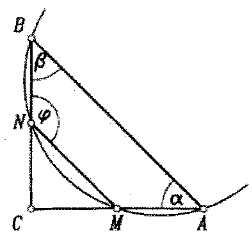
$$CH = HB \operatorname{tg} 2\alpha = HB \cdot \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3}\cdot 15\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}.$$

Површина троугла износи $P = \dfrac{1}{2}AB\cdot CH = 300\,\mathrm{cm}^2$.

83. $t_1 = 2r\sin 75^\circ$, $t_2 = 2r\sin 15^\circ$ (слика). $t_1 - t_2 = 2r(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) = 4r\cos 45^\circ \sin 30^\circ$, односно $4r\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 2\sqrt{2}$, па је $r = 2$. $P = 4\pi$.



Сл. уз зад. 83



Сл. уз зад. 86

84. Како је трапез тангентни, то је $AB + CD = AD + BC$, па је, због $AD = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$ и $BC = \dfrac{2R}{\sin\beta}$,

$$Q = \frac{AB+CD}{2}h = (AD+BC)R = 2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Одавде је $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$.

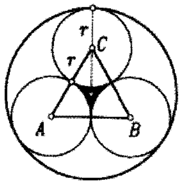
85. Доказати да је $m = s-a$, $n = s-b$, $p = s-c$ и применити Херонову формулу.

86. Означимо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle BNM = \varphi$, в. слику. Четвороугао $ABNM$ је тетивни трапез, па је $\alpha + \varphi = 180^\circ$ и $\beta + \varphi = 180^\circ$, одакле је $\alpha = \beta$. Пошто су α и β оштри углови правоуглог троугла, то је $\alpha = \beta = 45^\circ$ и $AC = BC = \sqrt{2}$. Сада добијамо $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{2 + 1/2} = \sqrt{5/2}$, па из синусне теореме за троугао BMA налазимо $2R = \dfrac{BM}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{5/2}}{\sqrt{1/2}}$, одакле је $R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. $P = \dfrac{5}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

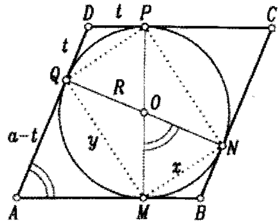
87. $\dfrac{2\sin 2\alpha\sin^2\alpha}{\pi}$. **88.** $r^2\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

89. Ако су полупречници малих кругова r, тада је $CO = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$, в. слику, па је $r + \dfrac{2}{3}r\sqrt{3} = R$, одакле $r = (2\sqrt{3}-3)R$. Површина фигуре ограничене малим круговима је

$$P = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}r^2\pi = (2\sqrt{3}-3)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)R^2 \approx 0{,}034733R^2.$$



Сл. уз зад. 89



Сл. уз зад. 90

90. Означимо $MN = QP = x$ и $MQ = NP = y$ странице правоугаоника површине S, дужи $DQ = DP = BM = BN = t$ и страницу ромба са a. Тада су слични троуглови AMQ и OMN, а такође и троуглови MBN и MOQ. Одавде је

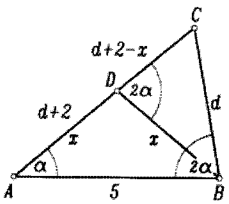
$$\frac{a-t}{R} = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \frac{t}{R} = \frac{x}{y}.$$

Из последње две релације налазимо $\dfrac{a}{R} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$, па је $a = R \cdot \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{4R^3}{S}$, јер је $x^2 + y^2 = (2R)^2$ и $xy = S$.

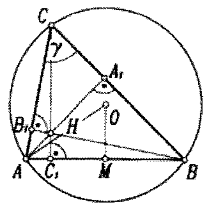
91. Нека је BD симетрала већег угла, в. слику. Тада је $\triangle ABD$ једнакокраки, а $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$ су слични. Дакле,

$$\frac{a+2-x}{x} = \frac{a}{5} \quad \text{и} \quad \frac{a+2}{a} = \frac{a}{a+2-x}.$$

Из прве једначине добијамо $x = \dfrac{5(a+2)}{a+5}$, а из друге $x = \dfrac{4(a+1)}{a+2}$. Изједначавањем налазимо $a = 4$. Странице троугла су 4 cm, 6 cm и 5 cm, а његова површина $P = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 91



Сл. уз зад. 92

92. Докажимо да је $AO \perp B_1C_1$, в. слику. Пошто је $\angle AOM$ половина централног угла над AB, биће $\angle AOM = \gamma = \angle ACB$, одакле

$$\angle OAM = 90^\circ - \gamma. \tag{1}$$

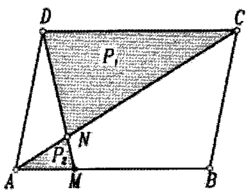
Четвороугао AC_1HB_1 је тетивни (јер има два наспрамна права угла), па је $\angle B_1C_1A = \angle B_1HA$, а како је $B_1H \perp AC$, $HA \perp BC$, биће $\angle B_1HA = \angle ACB = \gamma$, дакле

$$\angle B_1C_1A = \gamma. \tag{2}$$

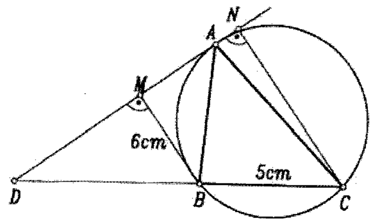
Из (1) и (2) следи да је $AO \perp B_1C_1$. Према томе, површина четвороугла AC_1OB_1 је $\dfrac{1}{2}AO \cdot B_1C_1$; слично се доказује да су површине четвороуглова BA_1OC_1 и CB_1OA_1, редом, $\frac{1}{2}BO \cdot A_1C_1$ и $\frac{1}{2}CO \cdot A_1B_1$. Сабирањем добијамо површину троугла

$$P = \frac{R}{2}(B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1) = sR.$$

93. Троуглови AMN и DNC су слични (слика), па за њихове површине важи $\frac{P_1}{P_2} = \frac{AM^2}{DC^2} = \frac{1}{9}$. Површина троугла ACD једнака је $\frac{1}{2}$, а површина троугла AND је $\frac{1}{2} - P_2$. Троугао AMD има површину $\frac{1}{6}$, јер има исту висину као паралелограм. Дакле, имамо да је $\frac{1}{6} = P_1 + \frac{1}{2} - P_2 = P_1 + \frac{1}{2} - 9P_1$. Одавде се добија да је $P_1 = \frac{1}{24}$.



Сл. уз зад. 93



Сл. уз зад. 94

94. Означимо $BD = x$ (слика). Тада је $AD^2 = BD \cdot CD$, тј. $x(5+x) = 150$, одакле је $x = 10\,\text{cm}$. Из сличности троуглова DCN и DBM следи $BM : BD = CN : CD$, па је $CN = 9\,\text{cm}$. Пошто је $MD = \sqrt{BD^2 - BM^2} = 8\,\text{cm}$ и $MN : BC = MD : BD$, то је $MN = 4\,\text{cm}$, а тражена површина је $30\,\text{cm}^2$.

95. а) $4r^2\sqrt{3}$; б) $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$; в) $r^2\left(4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}\right)$.

96. Нека је α угао под којим се страница правилног n-тоугла види из његовог центра ($\alpha = 360°/n$). Полупречници описаног и уписаног круга су, редом, $R = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}$ и $r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а површина прстена је $S = (R^2 - r^2)\pi = \frac{a^2\pi}{4}$.

97. Ако је $AC = a$, $CB = b$, тада је површина Архимедовог српа $ab\pi/4$, а дужина дужи CD (која се лако добија из сличности троуглова ACD и DCB) биће $\sqrt{ab}$.

98. Нека су a и b катете троугла. Тада је збир површина полумесеца једнак разлици збира површине троугла и површине полукругова над катетама и површине полукруга описаног око троугла:

$$P = P_\triangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4}\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{4}\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4}\pi = P_\triangle,$$

јер је $a^2 + b^2 = c^2$.

99. Прва формула следи из $\frac{a/2}{R} = \sin\alpha$ и $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, а друга се добија из $P = P_{OAB} + P_{OBC} + P_{OCA}$ и $P_{OAB} = \frac{1}{2}cr$, $P_{OBC} = \frac{1}{2}ar$, $P_{OCA} = \frac{1}{2}br$, где је O центар уписаног круга троугла.

100. Нека је $BC = a$ највећа страница троугла ABC, $AD = h_a$ његова висина и $BD = x$. Тада из $h_a^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$ најпре следи $x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$, а затим $h_a^2 = c^2 - \dfrac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$. Дакле,

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4}a^2h_a^2 = \frac{1}{16}(4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2) = \frac{1}{16}(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \frac{1}{16}2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c), \end{aligned}$$

односно $P = \sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)}$.

101. Нека су одсечци на које су подељене дијагонале m, n, p и q. Како је $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, добијамо

$$P = \frac{1}{2}(mp + np + mq + nq)\sin\varphi = \frac{1}{2}(m+n)(p+q)\sin\varphi = \frac{1}{2}ef\sin\varphi.$$

Напомена. Ако су дијагонале четвороугла међу собом нормалне, као на пример код ромба, делтоида, тада је његова површина $P = \dfrac{1}{2}ef$.

102. $P = \dfrac{ar}{2} + \dfrac{br}{2} + \dfrac{cr}{2} + \dfrac{dr}{2} = \dfrac{r}{2}\cdot 2s = rs$ (нацртати слику).

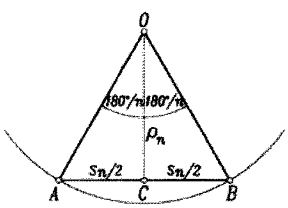
103. Ако се $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (синусна теорема) замени у $a + b + c = 2s$, добија се $a = \dfrac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$, јер је $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Слично се изражава страница b. Увршавањем у $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$ добија се тражена формула.

104. Површина правилног многоугла налази се помоћу његовог карактеристичног троугла, в. слику.

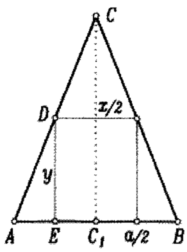
а) Применом формуле $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ на троугао ABO добија се формула а)

б) Како је $\dfrac{s_n}{2} = \rho_n \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$ и $P_{ABO} = \dfrac{1}{2}s_n\rho_n$, то је $P = n\rho_n^2 \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$.

в) $P = n\cdot\dfrac{s_n}{2}\cdot\dfrac{s_n}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180°}{n} = \dfrac{ns_n^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{180°}{n}$.



Сл. уз зад. 104



Сл. уз зад. 105

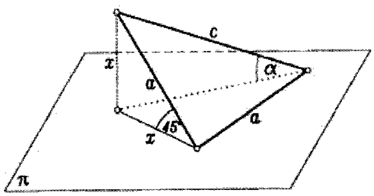
105. Означимо странице правоугаоника са x и y (слика). Из сличности троуглова ADE и ACC_1,

$$y : \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) = h : \frac{a}{2},$$

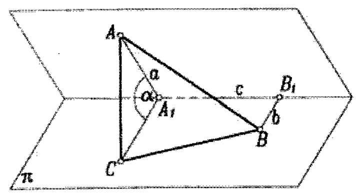
одакле је $y = \dfrac{h}{a}(a-x)$, па је површина правоугаоника $P = xy = \dfrac{h}{a}x(a-x)$. Квадратна функција $f(x) = x(a-x)$ има минимум за $x = \dfrac{a}{2}$. Непосредно се налази да је $y = \dfrac{h}{2}$.

Глава II – Полиедри

106. Тражени угао означимо са α, а удаљеност темена датог троугла (које не припада датој равни) од дате равни са x. Катете датог троугла означимо са a, а хипотенузу са c, в. слику. Како катета заклапа са датом равни угао од $45°$, биће $x = a/\sqrt{2}$. Тада је $\sin\alpha = x/c = 1/2$, односни $\alpha = 30°$.



Сл. уз зад. 106



Сл. уз зад. 111

107. $a\left(1+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$. **108.** $d = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3}a\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{a}{3}\sqrt{22}.$

109. Могућа су два случаја: (1) Тачке B и C су са исте стране равни α. Тада је центар ромба на удаљености $\dfrac{1}{2}(b+c)$ од равни α, а теме D на удаљености $b+c$.

(2) Тачке B и C су са разних страна равни α. Тада је тачка D на удаљености $|b-c|$ од α.

110. Ако је x тражено растојање, R полупречник описаног круга и P површина датог троугла, важи

$$x = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{abc}{4P}\right)^2} = \sqrt{d^2 - \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}.$$

111. а) Нека је C подножје нормале из A на другу страну диедра, в. слику. Тада су $\triangle ACA_1$ и $\triangle ACB$ правоугли, а из $AC \perp BCA_1B_1$ и $AA_1 \perp A_1B_1$ следи (на основу теореме о три нормале) да је $CA_1 \perp A_1B_1$. Дакле, $\angle AA_1C = \alpha$, па је $AC = a\sin\alpha$, $A_1C = a\cos\alpha$. Коначно,

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = AC^2 + (BB_1 - CA_1)^2 + A_1B_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha.$$

б) Из претходне формуле и $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$, $AB = 7$ следи $\alpha = 60°$.

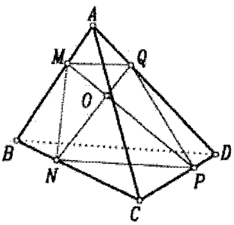
112. $AB = 2a$. **113.** $5\,\mathrm{dm}$.

114. Нека је P произвољна тачка праве a и нека су α и β равни које садрже тачку P и праву b, односно тачку P и праву c. Пресек равни α и β је тражена права p.

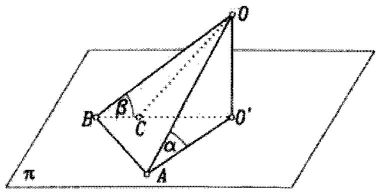
115. Четвороугао $MNPQ$ је трапез, в. слику, при чему за његове основице MQ и NP важи

$$\frac{MQ}{BD}=\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AM+MB}=\frac{k}{1+k} \quad \text{и} \quad \frac{NP}{BD}=\frac{NC}{BC}=\frac{NC}{BN+NC}=\frac{1}{1+k}.$$

Дакле, $MQ/NP=k$, а дијагонале MP и NQ се секу у тачки O која их дели у истом односу у коме стоје и основице.



Сл. уз зад. 115



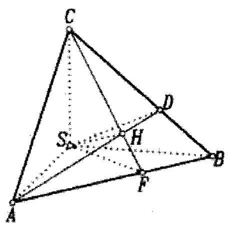
Сл. уз зад. 116

116. Нека је $\beta>\alpha$, в. слику, и нека је C тачка на дужи $O'B$ таква да је $O'A=O'C$. Тада је $\angle BOC=\beta-\alpha$. Троуглови BCO и ABO имају две странице подударне, а треће различите: $AB>BC$ јер је $\angle ACB$ туп. Дакле, $\angle AOB>\angle BOC=\beta-\alpha$.

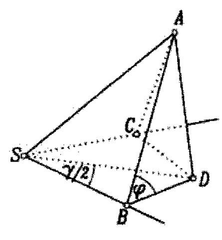
117. а) $CS\perp ABS$ (јер $SC\perp AS$ и $CS\perp BS$). Ако је CF висина троугла ABC, тада на основу теореме о три нормале следи да је $SF\perp AB$, према томе раван CSF је нормална на праву AB, дакле и на раван ABC. Слично се доказује да је раван ASD нормална на раван ABC, па је и пресечна права SH равни CSF и ASD такође нормална на раван ABC, в. слику.

б) Како сва три троугла имају заједничку основицу AB, довољно је доказати да је $SF^2=HF\cdot CF$, а то следи из сличности троуглова CSF и SHF (оба правоугла, заједнички угао код F).

в) Добија се сабирањем једнакости $P_{SAB}^2=P_{HAB}P_{CAB}$ са одговарајућим једнакостима за P_{SBC} и P_{SCA}.



Сл. уз зад. 117



Сл. уз зад. 118

118. Нека је A произвољна тачка на ивици триедра наспрам угла γ, в. слику, D подножје нормале из A на раван угла γ, а B и C подножја нормала из D на краке угла γ. Тада је, на основу теореме о три нормале, $AB\perp SB$, $AC\perp SC$, па је $\angle ABD=\angle ACD=\varphi$, а $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ су подударни, одакле следи да је $BD=CD$, дакле и $\angle BSD=\angle CSD=\gamma/2$. Ако је $AB=AC=a$, тада

$$AD=a\sin\varphi,\quad BD=a\cos\varphi,\quad SD=\frac{a\cos\varphi}{\sin\frac{\gamma}{2}},\quad SB=a\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

па је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{SB} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{AD}{SD} = \operatorname{tg}\varphi \sin\frac{\gamma}{2}.$$

119. Нека је N подножје нормале из M на AB, где је M произвољна тачка траженог ГМТ. Тада је $MA^2 = MN^2 + NA^2$ и $MB^2 = MN^2 + NB^2$, па је $MA^2 - MB^2 = NA^2 - NB^2$. Према томе, положај тачке N не зависи од M и одређен је релацијом $NA^2 - NB^2 = l^2$. Лако се добија да је удаљеност тачке N од тачке A (у правцу тачке B) једнака

$$AN = \frac{AB}{2} + \frac{l^2}{2\,AB}. \tag{1}$$

Исто тако, ако је M произвољна тачка у простору за коју је $MN \perp AB$, N одређена релацијом (1), биће $MA^2 - MB^2 = l^2$.

Тражено ГМТ је пресечна права дате равни α и равни кроз N нормалне на AB.

120. $3n$, $2n$, $n+2$, $n(n-3)$.

121. $\sqrt{(a^2+b^2-c^2)/2}$, $\sqrt{(a^2-b^2+c^2)/2}$, $\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)/2}$. **122.** $200\,\mathrm{cm}^2$ и $300\,\mathrm{cm}^2$. **123.** Друга дијагонала основе је $2\sqrt{13}$ и већа је од дате. Бочна ивица је $4\sqrt{3}$, а дијагонале паралелепипеда су $10\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$.

124. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **125.** $2a^2$. **126.** $2a$, $a\sqrt{5}$; $a^2\sqrt{5}$, $2a^2$. **127.** $12\,\mathrm{cm}$.

128. Нека је $a > b$. Дијагонале основе су

$$d_1^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - ab + b^2, \quad d_2^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 + ab + b^2.$$

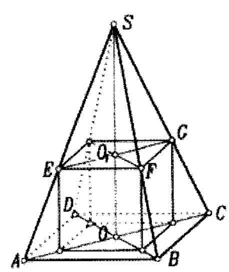
Резултати: а) $D_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5a^2 - 2ab + 5b^2}$, $D_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$; б) $D_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $D_2 = a + b$.

129. $3\,\mathrm{cm}$. **130.** $\dfrac{8}{7}S$. **131.** $3\sqrt{5}$.

132. Посматрајмо правоугли троугао чије су катете висина пирамиде и две трећине висине основе, а хипотенуза бочна ивица a пирамиде. Тада је $\cos\alpha = \dfrac{\frac{2}{3}h}{a} = \dfrac{\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, па је тражени угао $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

133. Како је $AB = a$, то је $AC = a\sqrt{2}$, в. слику. Ако $EF = OO_1$ обележимо са x, следи да је $EG = x\sqrt{2}$. $SO = \sqrt{s^2 - a^2/2}$ добијамо из правоуглог троугла SOA. На основу претходног је $SO_1 = \sqrt{s^2 - a^2/2} - x$. Из сличности троуглова ACS и EGS имамо $\dfrac{AC}{EG} = \dfrac{SO}{SO_1}$, тј.

$$\frac{a\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{s^2 - a^2/2}}{\sqrt{s^2 - a^2/2} - x}, \quad x = \frac{60}{5 + 6\sqrt{2}}.$$



Сл. уз зад. 133

134. $\dfrac{c^2b^2}{(2b-a)a}$ и $\dfrac{b^2c^2}{(2b-a)a} - c^2$. **135.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, гледано од врха пирамиде.

136. $P_1 : P_2 = 16 : 169$. **137.** $(c^2 \pm a^2 \pm b^2)/2c$.

138. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

139. $a^2\sqrt{3}/6$ (пресек је делтоид чије су дијагонале $a\sqrt{3}/2$ и $2a/3$). **140.** $3aH/16$.

141. Ако се пирамида пресече равни која је паралелна с основом, онда се површине пресека и основе односе као квадрати њихових растојања од врха, па је $a^2 : f(x) = P : P_1 = H^2 : (H-x)^2$, одакле је $f(x) = \frac{a^2}{H^2}(H-x)^2$, где је $P = a^2$ површина основе.

142. $\frac{1}{4}(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})^2$. **143.** $\frac{2a^2(\sqrt{2}+1)m^2}{(m+n)^2}$.

144. $c = 18{,}65\,\text{cm}$, $P \approx 421\,\text{cm}^2$. **145.** $12\,\text{m}^2$. **146.** $P = 2B+M = 2\cdot168+1080 = 1416$.

147. $170\,\text{cm}^2$. **148.** $H = \frac{2P - a^2\sqrt{3}}{6a} = \sqrt{3}\,\text{cm}$. **149.** $P = 5a^2\sqrt{3}$.

150. Нека су $a = 17x$, $b = 10x$, $c = 9x$ основне ивице и $s = 18x$ полуобим основе. Тада је $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 36x^2$ и $M = 16\cdot 36x = 576x$, па је $1440 = 72x^2 + 576x$. Одавде налазимо $x_1 = 2$, а како је $x_2 < 0$, то је $a = 34$, $b = 20$, $c = 18$.

151. $P = ab + H(a+b+c) = 180\,\text{cm}^2$, где је $c = \sqrt{a^2+b^2} = 13\,\text{cm}$. **152.** $3\,\text{cm}$.

153. $\frac{abM}{4(a+b)}$. **154.** $60\,\text{cm}^3$. **155.** $96\,\text{cm}^3$. **156.** $V = 6\sqrt{6}\,\text{cm}^3$. **157.** $\sqrt{P_1P_2P_3}$.

158. С обзиром да је призма тространа и правилна, њена основа је једнакостранични троугао чија је површина одређена формулом $B = a^2\sqrt{3}/4$, па је $V = BH$, односно $a^3\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}H/4$, одакле је $H = 4a$.

159. Површина основе је $B = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, па је $V = BH = 6a^3\sqrt{3}$. **160.** $\frac{9d^3}{64}$.

161. $P_1 = 216\,\text{cm}^2$, $P_2 = 96\,\text{cm}^2$, $V_1 = 216\,\text{cm}^3$, $V_2 = 64\,\text{cm}^3$.

162. $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10$, $P = 2B + M = 2\cdot\frac{d_1d_2}{2} + 4a^2 = 592$, $V = B\cdot H = 960$.

163. $P = 14\,712\,\text{cm}^2$, $V = 112\,320\,\text{cm}^3$.

164. $H = 8\,\text{cm}$, $P = 612\,\text{cm}^2$. **165.** $P = 7488\,\text{cm}^2$, $V = 25743{,}86\,\text{cm}^3$. **166.** $P = 48\sqrt{3}+360 \approx 443{,}14\,\text{cm}^2$, $V = 360\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

167. $656\,\text{cm}^2$, $18\sqrt{61}\,\text{cm}^2$. **168.** $ab(1+\sqrt{2})$.

169. Омотач је састављен од три трапеза. Дакле,

$$P = \frac{a(m+n)}{2} + \frac{a(n+p)}{2} + \frac{a(p+m)}{2} = a(m+n+p).$$

170. pl.

171. $D = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $D_1 = 2(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}$, $a_1 = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}$, $V_1 = a_1^3 = 8\left(2+\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)\text{cm}^3$. **172.** Дужа дијагонала основе је $d = a\sqrt{21}$, $H = 2a$, $V = 4a^3\sqrt{3}$.

173. $V_1 = 405\,\text{dm}^3$, $V_2 = 1800\,\text{dm}^3$. **174.** $18\sqrt{2}\,\text{dm}^3$. **175.** $V = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.
176. $4\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

177. Из $aH = 9$, $bH = 10$, $cH = 17$ се добија $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18}{H}$. Заменом у Херонову формулу налазимо $H = 3\,\text{cm}$. Запремина је $V = 12\,\text{cm}^3$. **178.** $\frac{1}{2}(S_1+S_2)d$.

179. Из $S_1 = d_1H$, $S_2 = d_2H$, $B = d_1d_2/2$ добијамо $H = \sqrt{\frac{S_1S_2}{2B}}$, па је $V = BH = \sqrt{BS_1S_2/2}$.

180. Уочимо правоугли троугао коме је D хипотенуза, ивица основе a једна катета, а дијагонала d бочне стране друга катета. Како је $\angle(d, D) = \alpha$, биће $a = D\sin\alpha$ и $H = \sqrt{d^2 - a^2} = D\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. Запремина је $V = D^3 \sin^2\alpha\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

181. Дијагонале основе су $\sqrt{17}$ и $\sqrt{65}$. Ако је α оштар угао између основица a и b, онда је $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 17$ и $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = 65$, одакле је $a^2 + b^2 = 41$. Како је $a + b = 9$, и ако је $a > b$, онда је $a = 5\,\mathrm{cm}$ и $b = 4\,\mathrm{cm}$. $P = 104\,\mathrm{cm}^2$, $V = 64\,\mathrm{cm}^3$.

182. Стране су правоугаоници, па се њихове површине односе као $ab : ac : bc = 4 : 3 : 1$, одакле је $\frac{b}{c} = \frac{4}{3}$, $\frac{a}{b} = \frac{3}{1} = \frac{12}{4}$, тј. $\frac{a}{12} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = k$, односно $a = 12k$, $b = 4k$, $c = 3k$. Како је $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, то заменом добијамо $k = 6$, $a = 72$, $b = 24$, $c = 18$, па је $P = 2(ab + bc + ca) = 6912\,\mathrm{cm}^2$, $V = abc = 31104\,\mathrm{cm}^3$.

183. $2l\sin\alpha\sqrt{2S + l^2\cos^2\alpha}$. **184.** $P = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 4b^2}$. **185.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.

186. Бочна ивица која гради углове од 45° са суседним ивицама основе мора садржати теме оштрог угла основе (зашто?). Површина основе је $B = a^2\sqrt{3}/2$. Висина паралелепипеда се добија из $(a/\sqrt{2})^2 + (a/\sqrt{6})^2 + H^2 = a^2$; $H = a/\sqrt{3}$, па је $V = a^3/2$.

187. $\frac{a^3}{8} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$ $(B = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha,\ H = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sin\alpha}{1 + \cos\alpha})$. **188.** $\frac{4s^2\sin 2\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$.

189. Дијагонале основе су $d_1^2 = (a - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 = a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2$ и слично $d_2^2 = a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2$. Како је $D_1^2 = d_1^2 + H^2 = d_2^2$, биће $H = 2\sqrt{ab\cos\alpha}$. Запремина паралелепипеда је $V = BH = 2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}$.

190. Нека су M и N управне пројекције темена A_1 на раван ABC, односно ивицу AB датог паралелепипеда. Према теореми о три нормале биће и $MN \perp AB$. Како је $\angle BAA_1 = \angle DAA_1$, биће M на симетрали угла BAD, па је $\angle BAM = \pi/6$. Из правоуглих троуглова ANA_1 и ANM имамо

$$AN = AA_1\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad MN = AN\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad AM = \frac{AN}{\cos\pi/6} = \frac{2a}{\sqrt{6}},$$

а из правоуглог троугла AMA_1 добијамо $A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2} = a/\sqrt{3}$. Површина основе је $AB \cdot AD\sin\frac{\pi}{3} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је тражена запремина $V = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}$.

191. Означимо основне ивице са a и b. Тада је $a + b = 2$, па је запремина квадра $V = 5ab = 5a(2 - a) = 10a - 5a^2$, $0 < a < 2$. Функција $V(a) = 10a - 5a^2$ постиже максимум за $a = 1\,\mathrm{cm}$. Тада је и $b = 1\,\mathrm{cm}$.

192. Нека је H висина призме, h висина бочне стране и α нагибни угао бочних ивица према равни основе. Тада је $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}/2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па је $\alpha = 45°$, $H = a\sqrt{2}/2$ и

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad V = a^2H = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad P = 2a^2 + 4ah = 2a^2(1 + \sqrt{3}).$$

193. а) Применом косинусне теореме налазимо страницу a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 15^2 + (21 - a)^2 - 2 \cdot 15 \cdot (21 - a) \cdot \frac{1}{2}$, одакле је $a = 13$, па је $c = 8$. Површина основе је $B = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = 30\sqrt{3}$. $V = BH = 120\sqrt{3}$, $P = 2B + (a + b + c)H = 60\sqrt{3} + 144$.

б) Упутство. Странице основе израчунавамо из помоћног троугла BCD, тако да је $AD = b$ и $BD = b+c$, па применимо синусну теорему, одакле добијамо да је $\sin(\gamma + 30°) = \frac{7\sqrt{19}}{36}$

и $\cos(\gamma + 30^\circ) = \dfrac{3\sqrt{57}}{38}$. Даље је $\sin\gamma = \sin((\gamma + 30^\circ) - 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{57}}{19}$, $c = 2$ и $b = 5$. $V = 10\sqrt{3}$, $P = 5\sqrt{3} + 4(7 + \sqrt{19})$.

194. $P = a^2 + ah + a\sqrt{a^2 + h^2} = 1400\,\mathrm{cm}^2$. **195.** $P = 8(1 + \sqrt{3}) \approx 21{,}86\,\mathrm{cm}^2$. **196.** $P = 800\,\mathrm{cm}^2$. **197.** $P = 564\,\mathrm{cm}^2$. **198.** $P = 96\,\mathrm{cm}^2$. **199.** $a = 9\,\mathrm{cm}$, $H = 20\,\mathrm{cm}$. **200.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **201.** $9\,\mathrm{cm}^3$.

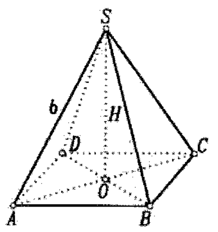
202. Висина пирамиде је $H = \sqrt{s^2 - \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = 4\,\mathrm{cm}$, па је њена запремина $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

203. Површина дијагоналног пресека је $P = \dfrac{1}{2}dH$, где је d дијагонала основе. Одатле је $d = 16\,\mathrm{m}$, па је основна ивица $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\,\mathrm{m}$. Запремина је $V = \dfrac{1}{3}a^2H = 640\,\mathrm{m}^3$.

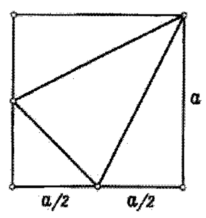
204. Најкраћа бочна ивица (висина пирамиде) једнака је дијагонали основе и има дужину $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Основна ивица је $4\,\mathrm{cm}$, а запремина $\dfrac{64}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

205. Ако површину основе пирамиде означимо са B, висину бочне стране са h, а површину омотача са M, биће $P = B + M = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6\cdot\dfrac{ah}{2}$. Заменом датих вредности за P и a добија се $h = 3\sqrt{3}$. Ако означимо $r = OM$, биће $r = 2\sqrt{3}$, па је из троугла OMS, $H = OS = \sqrt{h^2 - r^2} = \sqrt{15}$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{1}{3}BH = 24\sqrt{5}$.

206. Код ове пирамиде основа је квадрат чија је површина одређена формулом $B = a^2$. Висину одређујемо из правоуглог троугла AOS, чија хипотенуза је b, а катете OS и OA имају дужине H и $a\sqrt{2}/2$, в. слику, па је $H^2 = b^2 - (a\sqrt{2}/2)^2$, одакле је $H = \sqrt{(2b^2 - a^2)/2}$. Заменом добијених вредности за B и H у формулу за запремину пирамиде налазимо да је $V = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{a^2}{6}\sqrt{2(2b^2 - a^2)}$.



Сл. уз зад. 206



Сл. уз зад. 207

207. $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a/2\cdot a/2}{2}\cdot a = \dfrac{a^3}{24}$, в. слику. **208.** а) $\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$; б) $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2 - a^2)}$.

209. $h = a$, $H = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, $P = 3a^2$, $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **210.** $H = 12\,\mathrm{cm}$, $h_a = 15\,\mathrm{cm}$, $h_b = 13\,\mathrm{cm}$, $P = 564\,\mathrm{cm}^2$, $V = 720\,\mathrm{cm}^3$. **211.** $H = 4{,}5\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, $h_a = \sqrt{64{,}75}\,\mathrm{m}$, $h_b = 9\,\mathrm{m}$,

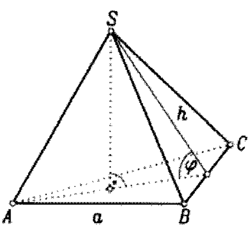
$P \approx 144{,}42\,\mathrm{m}^2$, $V = 54\sqrt{3}\,\mathrm{m}^3$. **212.** $P = (64\sqrt{3} + 144)\,\mathrm{cm}^2$, $V = \dfrac{128}{3}\sqrt{11}\,\mathrm{cm}^3$ или $P = (36\sqrt{3} + 144)\,\mathrm{cm}^2$, $V = 24\sqrt{39}\,\mathrm{cm}^3$.

213. $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\,\dfrac{ah_a}{2} = 9(\sqrt{3} + 4)\,\mathrm{cm}^2$, $H = \sqrt{13}\,\mathrm{cm}$, $V = 3\sqrt{39}\,\mathrm{cm}^3$. **214.** $H = \sqrt{69}\,\mathrm{cm}$, $h = 12\,\mathrm{cm}$, $P = 30(12 + 5\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$, $V = 150\sqrt{23}\,\mathrm{cm}^3$. **215.** $a = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $H = 4\,\mathrm{cm}$, $V = 24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$. **216.** $S = \dfrac{a^2}{2}(1 + \sqrt{7})\,\mathrm{cm}^2$, $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{cm}^3$.

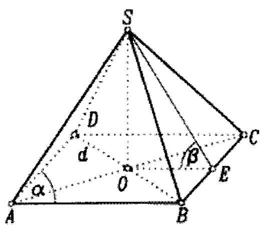
217. Подножје висине је средиште уписаног круга чији је полупречник $r = 5\,\mathrm{cm}$. Бочне висине (апотеме) су $h = 10\,\mathrm{cm}$ а површина $P = 630\,\mathrm{cm}^2$.

218. Нека је S врх пирамиде, A_1, B_1, C_1 – подножја апотема на BC, AC и AB, а O подножје висине пирамиде. Како су стране пирамиде нагнуте под истим углом, то су троуглови SA_1O, SB_1O и SC_1O подударни. Дакле, O је центар уписаног круга троугла ABC и све апотеме су једнаке h. Биће површина основе $B = 84\,\mathrm{cm}^2$, полупречник уписаног круга $r = \dfrac{B}{s} = 4\,\mathrm{cm}$, $h = r/\cos\dfrac{\pi}{3} = 8\,\mathrm{cm}$ и $P = B + \dfrac{a+b+c}{2}h = 252\,\mathrm{cm}^2$.

219. Нека је φ тражени угао, h висина бочне стране, a ивица основе. Тада је пројекција висине h на основу једнака $h\cos\varphi$ и трећини висине основе. Дакле, $h\cos\varphi = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, в. слику. Површина омотача пирамиде је $3\cdot\dfrac{a}{2}h$, а основе $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Дато је $\dfrac{3ah/2}{a^2\sqrt{3}/4} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$. Одатле је $\dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{2}$, па је $\cos\varphi = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{a}{h}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **220.** $\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{14}$. **221.** $\dfrac{3a^2}{2}$.



Сл. уз зад. 219



Сл. уз зад. 237

222. И дужине ивица пирамида односе се као $1 : 2$, па је ивица веће пирамиде једнака $2\sqrt{6}$, а њена површина $P = 4\dfrac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$.

223. Нека је D средиште хипотенузе AB. Како је $AS = BS = CS$, то су троуглови ADS, BDS и CDS подударни и тачка D је подножје висине пирамиде. Биће $AB = 15\,\mathrm{cm}$, $AD = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, $SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = 18\,\mathrm{cm}$ и $V = \dfrac{AC\cdot BC}{2}\cdot\dfrac{SD}{3} = 324\,\mathrm{cm}^3$.

224. Нека је S врх пирамиде и D подножје висине пирамиде. Како су бочне ивице пирамиде једнаке, то су троуглови SAD, SBD и SCD подударни, па је D центар описаног круга троугла ABC. Површина троугла ABC је $B = 12\,\mathrm{cm}^2$, а полупречник описаног круга $R = \dfrac{abc}{4B} = \dfrac{25}{6}\,\mathrm{cm}$, па је виисна пирамиде $H = \sqrt{AS^2 - R^2} \approx 7{,}98\,\mathrm{cm}$, а запремина $V \approx 31{,}92\,\mathrm{cm}^3$. **225.** $a = 24\,\mathrm{cm}$, $H_1 = 9\,\mathrm{cm}$, $H_2 = 5\,\mathrm{cm}$, $V_1 - V_2 = 768\,\mathrm{cm}^3$.

226. $\dfrac{1}{12}d^3\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. **227.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\,l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. **228.** $S\sqrt{S}/3\sqrt[4]{3}$.

229. $V = 80\,\mathrm{cm}^3$. **230.** $V = \dfrac{2H^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. **231.** $a = \sqrt[3]{3V\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}$, $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$.

232. $\cos\varphi = \dfrac{B}{M}$. **233.** $\dfrac{Q}{\cos\varphi}$. **234.** $a^2(\sqrt{3}+\sqrt{15})/4$. **235.** $H = \dfrac{a}{6}$.

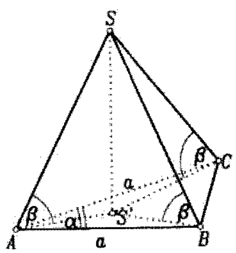
236. Ивица основе је $a = 2R\sin 18°$, па је $H = R(1+\sin 18°)$, а висина бочне стране је $h = \sqrt{H^2 + R^2\cos^2 18°} = R\sqrt{2(1+\sin 18°)}$. Површина омотача је $M = 10ah/2 = 10R^2\sin 18° \cdot \sqrt{2(1+\sin 18°)} = 5R^2$.

237. Како је $SE = \dfrac{OE}{\cos\beta}$, в. слику, биће $P_{SBC} = \dfrac{1}{2}BC\cdot SE = \dfrac{1}{2}BC\cdot OE\cdot\dfrac{1}{\cos\beta} = \dfrac{P_{OBC}}{\cos\beta}$. Исто важи и за остале три стране пирамиде, па је површина омотача $M = \dfrac{B}{\cos\beta}$, а површина пирамиде $P = B\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}\right)$. Дужина друге дијагонале је $d\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, па је $P = \dfrac{d^2}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}\right)$.

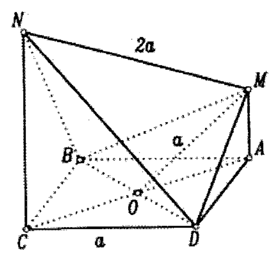
238. Ако је висина призме x, онда је основна ивица призме $a\left(1-\dfrac{x}{H}\right)$, па из $M = 3ax\left(1-\dfrac{x}{H}\right)$, односно $45 = 24x - 2{,}4x^2$, добијамо $x = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ или $x = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Ако је $x = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, однос запремина је $27:64$, а ако је $x = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, тај однос је $9:64$.

239. $V = 80\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$. **240.** $\dfrac{\sqrt{3}\,l^3\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+4\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}$.

241. Троуглови ASS', BSS' и CSS' су подударни, в. слику, па је $AS' = BS' = CS'$, тј. S' је центар описаног круга око основе. Према синусној теореми је полупречник тог круга $R = \dfrac{a}{2\sin(90° - \frac{\alpha}{2})} = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Висина пирамиде је $H = R\operatorname{tg}\beta$, површина основе $B = \dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$, а запремина пирамиде $V = \dfrac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6}$.



Сл. уз зад. 241



Сл. уз зад. 246

242. $\dfrac{a^3}{12}$. **243.** $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{2}$. **244.** $\dfrac{c^3}{32}$. **245.** $\dfrac{a^2b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.

246. а) Права MN је нормална на раван DMB ако је нормална на две праве у тој равни. Доказаћемо да је $MN \perp MB$, а на потпуно исти начин се доказује да је $MN \perp MD$, в. слику. Троугао OBM је правоугли, па је

$$MB^2 = BO^2 + OM^2 = \frac{3}{2}a^2. \qquad (1)$$

Троугао MAB је правоугли, па је $AM^2 = MB^2 - AB^2 = \frac{1}{2}a^2$. Трапез $ACNM$ је правоугли, па је $(NC - AM)^2 + CA^2 = MN^2$, одакле $NC = AM + \sqrt{MN^2 - CA^2} = 3a/\sqrt{2}$. Троугао NBC је правоугли, па је

$$NB^2 = NC^2 + CB^2 = \frac{11}{2}a^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $NB^2 = BM^2 + MN^2$, односно да је $MN \perp MB$.

б) $V_{MABD} = \frac{1}{3}\frac{AB \cdot AD}{2}AM = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$, $V_{NCBD} = \frac{1}{3}\frac{CB \cdot CD}{2}CN = \frac{a^3}{2\sqrt{2}}$, $V_{NMBD} = \frac{1}{3}\frac{BD \cdot OM}{2}MN = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

247. Основа пирамиде је правилни петоугао, полупречник круга описаног око тог петоугла је $R = \frac{a}{2\sin 36^\circ}$, а полупречник круга уписаног у тај петоугао је $r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 36^\circ$. Површина основе је $B = 5 \cdot \frac{ar}{2} = \frac{5}{4}a^2 \operatorname{ctg} 36^\circ$. Висина пирамиде је $H = \sqrt{a^2 - R^2} = \frac{a\sqrt{4\sin^2 36^\circ - 1}}{2\sin 36^\circ}$, па је њена запремина

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{5a^3}{24}\frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\operatorname{sim} 36^\circ}\sqrt{3\sin^2 36^\circ - \cos^2 36^\circ} = \frac{5a^3}{24}\operatorname{ctg} 36^\circ\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 36^\circ},$$

односно $V \approx 0{,}30150\,a^3$.

248. Ако са H означимо висину дате пирамиде, из формуле за њену запремину, на основу датих вредности, налазимо $H = 6$. Ако затим обележимо са d_1 и d_2 дијагонале основа (веће и мање), а са D просторну дијагоналу, биће $d_1 = 4$, $d_2 = 2$ и $D^2 = \left(d_1 - \frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 + H^2 = 45$, па је $D = 3\sqrt{5}$.

249. $V = 5792\,\text{cm}^3$. **250.** $P = 2720\,\text{cm}^2$, $V = 8576\,\text{cm}^3$. **251.** $P = 2464\,\text{cm}^2$, $V = 5504\,\text{cm}^3$.

252. Нека је h апотема пирамиде. Из услова задатка добијамо да је $h = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)}$, а тражена висина $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \frac{ab}{a+b}$.

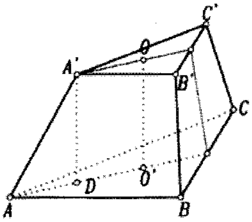
253. $h = 4\,\text{cm}$, $H = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}\,\text{cm}$, $P = \left(\frac{45\sqrt{3}}{2} + 72\right)\text{cm}^2$, $V = \frac{39\sqrt{39}}{4}\,\text{cm}^3$.

254. $V = 468\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

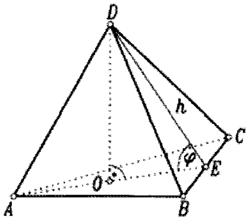
255. Висина пирамиде је $H = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)\operatorname{tg}\alpha$, а запремина $V = \frac{1}{12}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$.

256. Основе су једнакостранични троуглови, па је $B_1 = a^2\sqrt{3}/4$, $B_2 = b^2\sqrt{3}/4$. Да бисмо одредили висину H те пирамиде, облежимо са O и O' средишта основа ABC и $A'B'C'$, а са D подножје нормале из темена A' мање основе на равни ABC, в. слику. Према томе, тачка D је између тачака O и A, па је растојање x између тачака A и D одређено формулом $x = (a-b)\sqrt{3}/3$. Применом Питагорине теореме налазимо да је $H = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}$. На тај начин добијамо да је

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + ab + b^2)\sqrt{c^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}.$$



Сл. уз зад. 256



Сл. уз зад. 266

257. $\sqrt{3a^2 - 4P/\sqrt{3}}$.

258. Из $V = \dfrac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$ и $B_1 = k^2 B_2$ следи $B_1 = \dfrac{3k^2 V}{(k^2+k+1)H} = 50\,\mathrm{m}^2$ и $B_2 = \dfrac{3V}{(k^2+k+1)H} = 128\,\mathrm{m}^2$.

259. Висина бочне стране је $h = a - b$, па је осни пресек пирамиде који је нормалан на један пар ивица сваке основе једнакокраки трапез основица a и b и крака h. Висина H осног пресека је уједно и висина пирамиде и једнака је $H = \sqrt{h^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2} = \dfrac{a-b}{2}\sqrt{3}$. Запремина пирамиде је

$$V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{6}(a^3 - b^3).$$

260. Запремина пирамиде је већа за $\dfrac{H}{12}(a-b)^2$. **261.** $0{,}515\,\mathrm{m}^3$.

262. Нека су x и y одстојања поменутих равни од врха пирамиде ($x > y$). Тада је $x - y = h$ и $\dfrac{x^3}{H^3}\cdot\dfrac{1}{3}BH - \dfrac{y^3}{H^3}\cdot\dfrac{1}{3}BH = v$, одакле добијамо $3x^2 - 3xh + h^2 = \dfrac{3H^2 v}{Bh}$. Дакле,

$$x = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{12H^2 v - Bh^3}}{2\sqrt{3Bh}}.$$

Решење за x мора бити веће од h, па је $x = \dfrac{h}{a} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{12H^2 v - Bh^3}{3Bh}} = 16\,\mathrm{m}$. Одстојање доње равни од основе пирамиде је $H - x = 34\,\mathrm{m}$.

263. Посматрајмо осни пресек који садржи две бочне ивице: то је једнакокраки трапез основица $2R$ и $2r$ са оштрим углом од 60°. Висина тог трапеза је уједно висина зарубљене пирамиде и једнака је $H = (R - r)\sqrt{3}$. Површина правилног дванаестоугла уписаног у круг полупречника r је $B = 12 \cdot \dfrac{1}{2} r^2 \sin 30^\circ = 3r^2$. Запремина зарубљене пирамиде је $V = \dfrac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) = (R^3 - r^3)\sqrt{3}$.

264. $3\sqrt{2}$. **265.** $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

266. С обзиром на то да је тетраедар правилан, његова основа је једнакостранични троугао чија је површина одређена формулом $B = a^2\sqrt{3}/4$. Подножје висине из четвртог темена D тог тетраедра поклапа се са средиштем O његове основе. Ако дужину те висине обележимо са H, а дужину дужи OA са r, из правоуглог троугла OAD, в. слику, налазимо да је $H = \sqrt{a^2 - r^2} = a\sqrt{6}/3$, па је

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{6} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

267. $a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$, $S = \sqrt{3}\sqrt[3]{4V^2}$. **268.** $\frac{d}{\sqrt{3}}$, $54°44'$. **269.** а), б) и в) може; г) не може.

270. $P = 2a^2\sqrt{3}$, $V = a^3\sqrt{2}/3$. **271.** $1:9$, $1:27$. **272.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \approx 70°32'$.

273. $3:1$. **274.** $8\sqrt{3}$. **275.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

276. Нека је тражено одстојање x, а y и z одсечци на које подножје одстојања дели дијагоналу. Тада је $y + z = a\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = 2a^2$, одакле налазимо $x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (и $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{2a}{\sqrt{3}}$).

277. $V = 9\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3$. **278.** $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi \approx 109°28'$. **279.** $4{,}5\,\mathrm{cm}^3$. **280.** Како је $a^2\sqrt{3} = 2b^2\sqrt{3}$, то је $a : b = \sqrt{2} : 1$. **281.** $\frac{8}{27}r^3\sqrt{3}$.

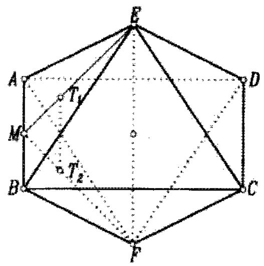
282. Нека је $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ и V_1 запремина квадра, а V_2 запремина тетраедра. Тада је $V_2 = V_1 - V_3$, где је V_3 део квадра који не припада тетраедру. Он се састоји од четири тростране пирамиде са базом $\frac{ab}{2}$ и висином c, па је $V_2 = abc - \frac{abc}{6} \cdot 4 = \frac{1}{3}abc$ и $V_2 : V_1 = 1 : 3$.

283. Означимо са b крак, а са h висину једнакокраког троугла који се добија у пресеку. По косинусној теореми, $b^2 = a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a}{3}\cos 60°$, одакле је $b = \frac{a\sqrt{7}}{3}$ и $h = \frac{a\sqrt{19}}{6}$, па је $P = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{19}}{12}$.

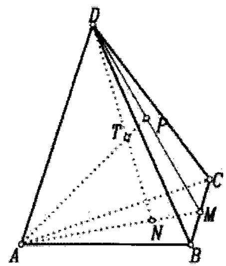
284. Одстојање је једнако висини (на крак) једнакокраког троугла са страницама a, $a\sqrt{3}/2$, $a\sqrt{3}/2$. Висина на основу тог троугла је $a/\sqrt{2}$, а висина на крак је $\frac{a \cdot a/\sqrt{2}}{a\sqrt{3}/2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

285. Ако ивицу октаедра означимо са a, онда је $EF = a\sqrt{2}$ (дијагонала квадрата $BEDF$), в. слику. Запремина V_0 октаедра је $V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Ивица коцке је једнака $\frac{1}{3}EF = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, јер је $T_1T_2 : EF = MT_1 : ME = 1 : 3$. Запремина коцке је $V_k = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$. Одатле је $V_k : V_0 = 2 : 9$.

286. Одстојање од центра до темена правилног петоугла ивице a је $r = \frac{a}{2\cos 54°}$, па је површина тог петоугла $S = 5 \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin 72° = \frac{5a^2}{8}\frac{\sin 72°}{\cos^2 54°}$. Површина додекаедра ивице a је $P = 12S = \frac{15a^2\sin 72°}{2\cos^2 54°}$. Према томе, $a = \sqrt{\frac{2P\cos^2 54°}{15\sin 72°}} \approx 0{,}24109\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 285



Сл. уз зад. 290

287. а) Лако се види да се на описани начин добија полиедар састављен од 20 троуглова (по један „иза“ сваког темена додекаедра) и то тако да се у сваком темену добијеног полиедра састаје пет тих троуглова. Све ивице добијеног полиедра су међусобно једнаке (као основице једнакокраких троуглова чији краци су одстојања центра страна од ивица додекаедра, а угао међу крацима је угао диедра уз ивицу додекаедра), па су свих 20 троуглова правилни и, према томе, добијени полиедар је правилни икосаедар.

б) Слично, најпре се установи да се добија полиедар састављен од 12 петоуглова, а затим да су ти петоуглови правилни.

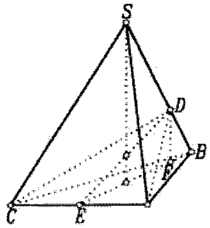
288. Нека је E средиште ивице CC_1 (нацртај слику!). Тада је $NC \parallel ME$, па је довољно израчунати $\angle DME$. Из $\triangle MDD_1$: $MD^2 = MD_1^2 + D_1D^2 = MA_1^2 + A_1D_1^2 + D_1D^2 = (a/2)^2 + a^2 + a^2 = 9a^2/4$. Слично се добија $ME^2 = 6a^2/4$ (из $\triangle EMC_1$) и $DE^2 = 5a^2/4$. Површина троугла MED је, на основу Херонове формуле, $P = a^2\sqrt{29}/8$, па је висина из E тог троугла једнака $h = 2P/MD = a\sqrt{29}/6$. Коначно, $\sin\angle DME = h/ME = \sqrt{29}/3\sqrt{6} \approx 0{,}73283$ и $\angle DME \approx 47°7'$.

289. Тачка M се налази на SA; SM налазимо из сличности троуглова ABS и AMM_1 (M_1 је подножје нормале из M на AB, $SM = MM_1$): $SM = 1$. Тачка N се налази на симетрали угла BSC (јер је једнако удаљена од правих SB и SC), а пошто је једнако удаљена од BA и BS, N мора бити четврто теме квадрата $CSBN$; према томе, $SN = \sqrt{6}$. Коначно, $MN^2 = SM^2 + SN^2$ и $MN = \sqrt{7}$.

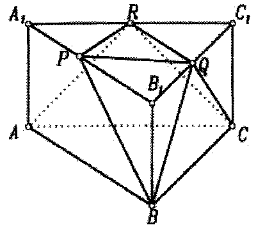
290. Нека су N и P тежишта страна ABC и BCD тетраедра $ABCD$, в. слику. Дужи AP и DN се налазе у равни ADM, па се секу у некој тачки T. Пошто је $TN : TD = TP : TA = NP : AD = MN : MA = 1 : 3$, тачка T дели те дужи у односу $3 : 1$. На исти начин се доказује да и дужи које спајају темена B и C са тежиштима страна ACD и ABD секу дуж DN у тачки која дели DN у односу $3 : 1$, дакле у тачки T.

291. Нека је E средиште ивице AC, в. слику. Тражени угао је $\angle BED$. Пошто је $V_{DABC} = \dfrac{1}{4}V_{SABC}$, биће висина из D тетраедра $DABC$ четири пута мања од висине из S тетраедра $SABC$. Дакле, $DF = \dfrac{1}{4}SE = \dfrac{1}{4}a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Даље, $FB = \dfrac{1}{4}EB = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}EB = \dfrac{1}{6}EB$, па је $EF = \dfrac{5}{6}EB = \dfrac{5}{6}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Коначно, $\operatorname{tg}\angle BED = \dfrac{DE}{EF} = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}28284$ и $\angle BED \approx 15°48'$.

292. а) Дати полиедар добија се када се од правилне тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ висине $a/2$ одсеку тростране пирамиде $BPQB_1$, $CQRC_1$ и $ARPA_1$, в. слику. Према



Сл. уз зад. 291



Сл. уз зад. 292

томе, запремина полиедра је

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(a/2)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{32}.$$

Површина је $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\dfrac{a^2}{4} + 3P_1$, где је P_1 површина једнакокраког троугла (нпр. $\triangle BPQ$) основице $\dfrac{a}{2}$ и крака $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Дакле, $P_1 = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{16}$, па је $P = \dfrac{a^2}{16}(5\sqrt{3}+12+3\sqrt{7})$.

б) Пресечни полигон је шестоугао који се добија кад се од једнакостраничног троугла странице a (паралелног пресека тростране призме) одсеку три једнакостранична троугла странице d. Дакле, површина пресечног полигона је $M = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3d^2\sqrt{3}}{4}$.

293. Из сличности троуглова MOS и EAS, в. слику, добијамо

$$p : \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}, \tag{1}$$

а из сличности троуглова KOS и ESL,

$$q : \frac{h}{2} = \frac{a}{2} : \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}, \tag{2}$$

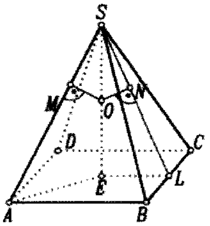
где су a и h редом страница основице и висина пирамиде. Услови (1) и (2) се, после квадрирања могу написати у облику

$$\frac{1}{p^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{h^2}, \qquad \frac{1}{q^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{4}{h^2},$$

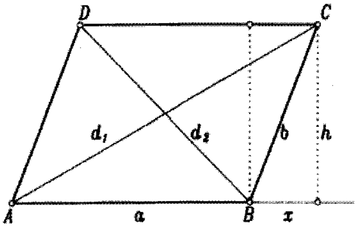
одакле добијамо

$$a^2 = \frac{8p^2q^2}{p^2 - q^2}, \qquad h^2 = \frac{4p^2q^2}{2q^2 - p^2}.$$

Запремина пирамиде је $V = \dfrac{a^2h}{3} = \dfrac{16p^3q^3}{3(p^2-q^2)\sqrt{2q^2-p^2}}$.



Сл. уз зад. 293



Сл. уз зад. 296

294. Нека је H врх пирамиде, K пресек висине пирамиде и равни и $x = HK$. Тада је $P_{ACH} = P_{AKH} + P_{KCH}$, тј. $\frac{ac}{2}\sin 2\alpha = \frac{ax}{2}\sin\alpha + \frac{cx}{2}\sin\alpha$, где је α угао који висина пирамиде образује са њеним бочним ивицама. Дељењем са $(acx\sin\alpha)/2$ добијамо

$$\frac{\sin 2\alpha}{x\sin\alpha} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}. \tag{1}$$

Слично, из $P_{BDH} = P_{BKH} + P_{KDH}$ добијамо

$$\frac{\sin 2\alpha}{x\sin\alpha} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи тражена релација. **295.** $3al + a^2$.

296. Дијагонале основе паралелепипеда су $d_1 = \sqrt{D_1^2 - l^2} = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$ и $d_2 = \sqrt{D_2^2 - l^2} = \sqrt{15}\,\text{cm}$. Ако је основа паралелограм $ABCD$, в. слику, биће

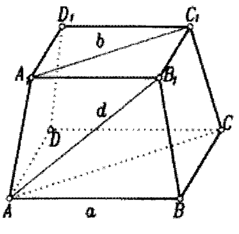
$$(a+x)^2 + h^2 = d_1^2, \quad (a-x)^2 + h^2 = d_2^2,$$

одакле, сабирањем и коришћењем $b^2 = x^2 + h^2$, добијамо $2(a^2+b^2) = d_1^2 + d_2^2$, а одузимањем $4ax = d_1^2 - d_2^2$. Из прве од тих релација и $a+b = s$ налазимо $a = \frac{1}{2}(s + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - s^2}) = 6\,\text{cm}$, $b = \frac{1}{2}(s - \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - s^2}) = 3\,\text{cm}$, а затим $x = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4a} = \frac{5}{2}\,\text{cm}$ и, коначно, $h = \sqrt{b^2 - x^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}\,\text{cm}$.

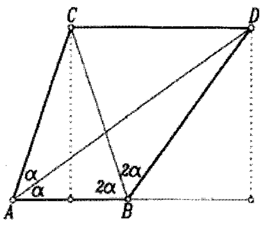
Површина паралелепипеда је $P = 2ah + 2sl = 6\sqrt{11} + 90\,\text{cm}^2 \approx 109{,}90\,\text{cm}^2$, а запремина $V = ahl = 15\sqrt{11}\,\text{cm}^3 \approx 49{,}749\,\text{cm}^3$.

297. Нека је $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $AB_1 = d$, в. слику. Тада је ACC_1A_1 једнакокраки трапез висине H, основица $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$, и угла од $60°$ при већој основици. Из $\frac{H}{(a\sqrt{2} - b\sqrt{2})/2} = \operatorname{tg} 60°$ и $\frac{H}{AA_1} = \sin 60°$ добијамо $a - b = \frac{H\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $AA_1 = \frac{2H}{\sqrt{3}}$. Пошто је $\frac{H}{AB_1} = \sin 30°$, биће $d = AB_1 = 2H$. Посматрајмо сада једнакокраки трапез ABB_1A_1: висина тог трапеза је $h = \sqrt{AA_1^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = H\sqrt{\frac{2}{3}}$, а средња линија $m = \sqrt{d^2 - h^2} = H\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Површина омотача је $M = 4mh = \frac{8H^2\sqrt{5}}{3}$.



Сл. уз зад. 297



Сл. уз зад. 298

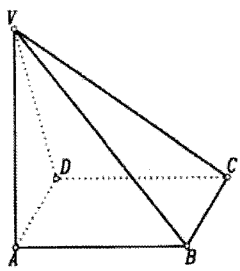
298. Посматрајмо пресеке пирамиде са равнима које садрже висину пирамиде, а паралелне су ивицама основе. Ти пресеци су троуглови исте основице a (= ивица основе), исте висине (= висина пирамиде) од којих један при основи има углове α и 4α, а други

2α и 2α. Та два трогула можемо поставити у положај као на слици. Пошто је $AB \parallel CD$, биће $\angle CDA = \angle DAB = \alpha$, па је $\triangle ACD$ једнакокраки, дакле $AC = CD$.

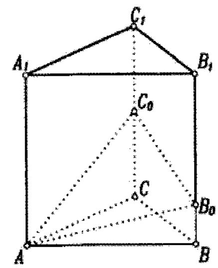
Слично се доказује да је $BD = CD$. Дакле, четвороугао $ABCD$ је или ромб или једнакокраки трапез. Трапез сс може бити јер је $\angle CAB = 2\alpha \neq \angle DBA$. Ромб са угловима 2α и 4α је могућ само ако $2\alpha + 4\alpha = 180°$, дакле $\alpha = 30°$.

299. Нека су бочне стране VAB и VAD нормалне на основу $ABCD$ пирамиде $ABCDV$, и нека су бочне стране VBC и VCD нагнуте према основи под угловима α и β, редом, в. слику. Из $VAB \perp ABCD$, $VAD \perp ABCD$ и $VAB \cap VAD = VA$ следи $VA \perp ABCD$. Из $VA \perp ABCD$ и $AB \perp BC$ следи (на основу теореме о три нормале) да је $VB \perp BC$, па одатле и из $AB \perp BC$ следи да је $\angle VBA = \alpha$ (дефиниција угла диедра). Слично се показује да је $\angle VDA = \beta$.

Из $AB = VA \operatorname{ctg}\alpha$ и $AD = VA \operatorname{ctg}\beta$ следи да је $S = AB \cdot AD = VA^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$, па је $VA = \sqrt{S \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. Дакле, запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}S \cdot VA = \frac{1}{3}S\sqrt{S \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.



Сл. уз зад. 299



Сл. уз зад. 304

300. $\frac{H^3}{3} \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

301. Основа пирамиде је уписана у круг полупречника $\sqrt{l^2 - H^2}$, где је H висина, а l бочна ивица пирамиде.

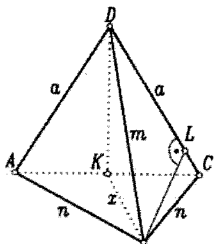
302. Површина основе је $B = sr$. Пошто све бочне ивице граде исти угао са равни основе, подножје висине пирамиде је једнако удаљено од ивица основе; дакле, подножје висине је центар круга уписаног у основу. Висина пирамиде је тада $H = r \operatorname{tg}\alpha$, а висине свих бочних страна (без обзира колико их има) су $h = \frac{r}{\cos\alpha}$. Површина пирамиде је $P = B + M = sr\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$, а запремина $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}sr^2 \operatorname{tg}\alpha$. **303.** $2S_1S_2/3a$.

304. Омотач остатка се састоји од три трапеза, сваки са висином a. Дакле, $P = a\left(\frac{H+H-2}{2} + \frac{H-2+H-1}{2} + \frac{H-1+H}{2}\right) = 3a(H-1)$. Запремина целе призме је $V_1 = a^2H\sqrt{3}/4$. Одбачени део BB_0C_0CA је четворострана пирамида са основом BB_0C_0C, која је трапез, и висином $a\sqrt{3}/2$. Запремина тог дела је $V_2 = \frac{a}{3}\frac{1+2}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Дакле, запремина остатка је $V = V_1 - V_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(H-1)$.

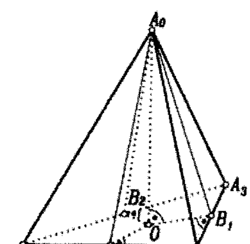
305. Нека је ивица основе пирамиде a, а њена висина H. Запремина призме је $V_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3H = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{16}$. Пресек призме и пирамиде се добија када се од пирамиде

„одсеку“ њени делови који се налазе ван призме: три подударне тростране пирамиде са основом једнакостраничним троуглом странице a и висином $3H/4$. Запремина пресека призме и пирамиде је $V_2 = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}H - 3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{3}{4}H = \frac{7a^2H\sqrt{3}}{192}$. Дакле, ван пирамиде се налази $\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{29}{36}$ запремине призме. **306.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a^3}{8}$.

307. Нека је DK висина троугла BCD из темена D, в. слику. Троугао BCD је једнакостраничан (јер $BD = CD = a$, $\angle CDB = 60°$) па је $DK = a\sqrt{3}/2$. Права DK припада равни DBC која је нормална на раван ABC, а сама је нормална на пресечну праву BC тих равни, па је нормална и на раван ABC, одакле следи да је нормална на све праве те равни, па и на праву KA. Из подударности троуглова ABD и ACD следи $AC = AB$, а из подударности троуглова ABK и ACK добијамо $AK \perp BC$. Нека је $KA = x$, $DA = m$ и $AB = n$. Из правоуглог троугла DKA следи $x^2 = m^2 - \frac{3}{4}a^2$, а из правоуглог троугла AKB: $x^2 = n^2 - \frac{a^2}{4}$, одакле следи $m^2 - n^2 = \frac{a^2}{2}$. Ако је L подножје висине из A правоуглог троугла ABD, биће $DL^2 - LB^2 = (m^2 - AL^2) - (n^2 - AL^2) = \frac{a^2}{2}$, па је, због $DL + LB = a$, $DL - LB = \frac{a}{2}$; дакле, $DL = \frac{3a}{4}$, $LB = \frac{a}{4}$. Коначно, из $\frac{DL}{m} = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $m = 2DL = \frac{3a}{2}$ и $x = \sqrt{m^2 - \frac{3}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. запремина тетраедра је $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}x = \frac{a^3}{4\sqrt{2}}$.



Сл. уз зад. 307



Сл. уз зад. 308

308. Правоугли троуглови A_0OB_1, A_0OB_2, A_0OB_3 су подударни, одакле следи да је подножје O висине пирамиде из A_0 истовремено центар круга уписаног у $\triangle A_1A_2A_3$, в. слику (S_i је површина стране наспрам темена A_i). Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}S_0H$, где је $H = A_0O = \sqrt{h^2 - r^2}$, $h = A_0B_1 = A_0B_2 = A_0B_3$, $r = OB_1 = OB_2 = OB_3$. Пошто је $A_1A_2 = \frac{2S_3}{h}$, $A_2A_3 = \frac{2S_1}{h}$, $A_3A_1 = \frac{2S_2}{h}$, биће, на основу Хероновог обрасца, $S_0^2 = \frac{16S(S-S_1)(S-S_2)(S-S_3)}{h^4}$, где је $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3)$. Одатле је $h = \frac{2\sqrt[4]{S(S-S_1)(S-S_2)(S-S_3)}}{\sqrt{S_0}}$. Полупречник уписаног круга налазимо из $S_0 = \frac{2S}{h}r$, дакле $r = \dfrac{S_0}{2S}h$. Даље, $H = h\sqrt{1 - \dfrac{S_0^2}{4S^2}}$ и коначно

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{S_0(4S^2 - S_0^2)}\sqrt[4]{\left(1 - \frac{S_1}{S}\right)\left(1 - \frac{S_2}{S}\right)\left(1 - \frac{S_3}{S}\right)}.$$

309. Нека је M тачка у којој DO продире раван ABC, а N тачка у којој ивица AB продире раван COD. Довољно је доказати да

$$\angle AOM + \angle BOM + \angle COM < \angle AOB + \angle BOC + \angle COA \qquad (1)$$

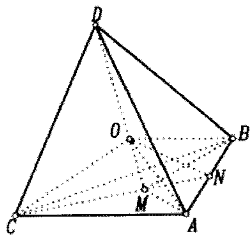
(тражена неједнакост се добија када се изврши замена $\angle AOM = \pi - \angle AOD$, $\angle BOM = \pi - \angle BOD$, $\angle COM = \pi - \angle COD$). Пошто је, у сваком триедру, збир два ивична угла већи од трећег, биће

$$\begin{aligned}\angle BOM + \angle COM &< \angle BON + \angle NOM + \angle COM &&\text{(триедар } OBMN)\\ &= \angle BON + \angle NOC\\ &< \angle BON + \angle NOA + \angle AOC &&\text{(триедар } OACN)\\ &= \angle AOB + \angle AOC.\end{aligned}$$

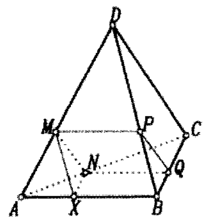
Слично се доказују и неједнакости

$$\angle COM + \angle AOM < \angle BOC + \angle BOA, \qquad \angle AOM + \angle BOM < \angle COA + \angle COB.$$

Сабирањем последње три неједнакости добија се (1).



Сл. уз зад. 309



Сл. уз зад. 312

310. Означимо са T_i тежиште стране тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ наспрам темена A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Тада је $T_1T_2 = \dfrac{1}{3}A_1A_2$ (троуглови MT_1T_2 и MA_1A_2 су слични са коефицијентом сличности $1/3$, где је M средиште ивице A_3A_4). Слично се доказује да и за остале ивице важи $T_iT_j = \dfrac{1}{3}A_iA_j$. Дакле, тетраедри $A_1A_2A_3A_4$ и $T_1T_2T_3T_4$ су слични са коефицијентом $1/3$, па се њихове запремине односе као кубови њихових одговарајућих елемената, дакле $V_T : V_A = 1 : 27$.

311. Нека је MNP пресек пирамиде $A_1A_2A_3A_4$ који је паралелан основи $A_2A_3A_4$ и садржи средиште H висине A_1T. Тада су троуглови MNP и $A_2A_3A_4$ слични са коефицијентом сличности $1/2$, па је $S_1 = P_{MNP} = \dfrac{1}{4}P_{A_2A_3A_4}$, односно $P_{A_2A_3A_4} = 4S_1$.

Нека је QRS пресек пирамиде $A_1A_2A_3A_4$ који је паралелан страни $A_1A_2A_3$ и садржи H. Удаљеност тачке H од стране $A_1A_2A_3$ је половина удаљености тачке T од исте равни, а удаљеност T је трећина висине из A_4, дакле H је 6 пута ближа равни $A_1A_2A_3$ него тачка

A_4. Дакле, троуглови QRS и $A_1A_2A_3$ су слични са коефицијентом сличности $\dfrac{QR}{A_1A_2} = \dfrac{5}{6}$, па је $S_4 = P_{QRS} = \dfrac{25}{36}P_{A_1A_2A_3}$, односно $P_{A_1A_2A_3} = \dfrac{36}{25}S_4$.

Слично се доказује да $P_{A_1A_3A_4} = \dfrac{36}{25}S_2$ и $P_{A_1A_2A_4} = \dfrac{36}{25}S_3$, па је површина пирамиде $S = 4S_1 + \dfrac{36}{25}(S_2 + S_3 + S_4)$.

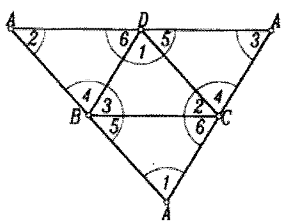
312. Како су углови над подударним тетивама у подударним круговима и сами подударни, биће

$$\angle BAC = \angle BDC = \angle 1, \qquad \angle BAD = \angle BCD = \angle 2,$$
$$\angle CAD = \angle CBD = \angle 3, \qquad \angle ABD = \angle ACD = \angle 4,$$
$$\angle ABC = \angle ADC = \angle 5, \qquad \angle ACB = \angle ADB = \angle 6$$

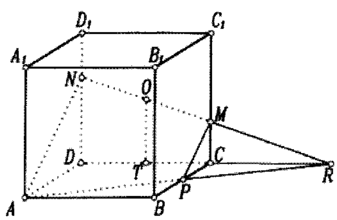
(в. слику где су стране ABC, ABD, ACD „оборене“ у раван стране BCD). Имамо $(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+(\angle 1+\angle 5+\angle 6) = (\angle 2+\angle 4+\angle 6)+(\angle 3+\angle 4+\angle 5)$, одакле $\angle 1 = \angle 4$. Слично је $\angle 2 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$. Дакле, троуглови ABC, BAD, CDA, DCB имају одговарајуће углове подударне, а међусобно су подударни на основу става „угао-страница-угао“ о подударности троуглова.

313. Нека је $V_{ABCD} = V$, $V_{ABMNPQ} = V_1$, в. слику, и нека је X тачка ивице AB, таква да је $AX : XB = k$. Тада је $V_{AXMN} = k^3V$. $XMNBPQ$ је призма. Ако са S означимо површину стране тетраедра, онда основа посматране призме има површину $S_1 = k^2S$. Висина H_1 призме једнака је одстојању основе MNX од BCD, тј. $H_1 = H - kH = (1-k)H$, где је H висина тетраедра. Имамо

$$V_{XMNBPQ} = S_1H_1 = k^2(1-k)SH = 3k^2(1-k)V,$$
$$V_1 = (k^3 + 3k^2(1-k))V = k^2(3-2k)V.$$



Сл. уз зад. 313



Сл. уз зад. 315

314. Како је тачка M једнако удаљена од равни ABC и ABD, биће $P_{ABC} : P_{ABD} = V_{ABCM} : V_{ABDM}$. Ако су CC' и DD' висине тетраедра $ABCM$ и $ABDM$ (тј. $C'D'$ нормална пројекција дужи CD на раван ABM), биће $V_{ABCM} : V_{ABDM} = CC' : DD'$. Правоугли троуглови $CC'M$ и $DD'M$ су слични, па је $CC' : DD' = CM : DM$.

315. Нека раван APQ сече праву CD у тачки R. Из сличности троуглова ARD и PRC следи $RC : RD = CP : AD = 1 : 2$, одакле добијамо $RC = CD = a$. Ако су M и N тачке у којима раван APQ сече ивице CC_1 и DD_1, тада је $CM = \dfrac{1}{2}DN$ (из $\triangle CMR \sim \triangle DNR$) и $CM + DN = 2QT = a$ (QT је средња линија трапеза $NDCM$).

Одавде се добија $DN = 2a/3$ и $CM = a/3$. Запремина зарубљене пирамиде $ADNPCM$ је

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{2a}{3} \cdot 2a - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot a = \frac{7a^3}{36},$$

а запремина преосталог дела коцке је $V_2 = a^3 - V_1 = \dfrac{29}{36}a^3$. Тражени однос је $V_1 : V_2 = 7 : 29$.

316. Висина пирамиде је $H = \sqrt{l^2 - (d/2)^2}$, где је $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ дијагонала основе, дакле $H = \dfrac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$. Раван дели висину у односу $(1/2)^{1/3} : 1 - (1/2)^{1/3}$, па је тражено одстојање $\dfrac{\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}}{2^{4/3}}$.

Глава III — Обртна тела

317. $H = 5\pi\,\mathrm{cm}$. **318.** За r.

319. Површина омотача се не мења, а запремина се двоструко увећава.

320. $P = 264\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = 576\pi\,\mathrm{cm}^3$. **321.** $P = 170\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = 300\pi\,\mathrm{cm}^3$.

322. $V = 324\pi\,\mathrm{cm}^3$.

323. Како су висине ова два тела једнаке, биће $V_v/V_p = r^2/a^2 = \pi/4$, одакле је $V_v = \dfrac{\pi}{4} \cdot 128\,\mathrm{cm}^3 = 32\pi\,\mathrm{cm}^3$.

324. $P_1 = 292{,}5\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V_1 = 675\pi\,\mathrm{cm}^3$; $P_2 = 252\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V_2 = 540\pi\,\mathrm{cm}^3$.

325. Из $H = 2r$ следи $V = \pi r^2 H = 2\pi r^3$, па из $V = 54\pi$ добијамо $r = 3$ и $H = 6$.

326. $\dfrac{3}{2}\pi Q$. **327.** $V = 64\pi\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$. **328.** $M = 80\pi$, $V = 160\pi$.

329. $32^2 : 65^2$. **330.** $4 : 1$.

331. Висина ваљка је $H = \sqrt{d^2 - 4r^2}$, ивица основе призме је $r\sqrt{3}$. Површина призме је $P = 3r\sqrt{3}\left(\dfrac{r}{2} + \sqrt{d^2 - 4r^2}\right) = 144\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $V = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{d^2 - 4r^2} = 135\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

332. Упутство: трапез је тангентни, па је $a + b = 2c$. $P = 62{,}5\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = 62{,}5\pi\,\mathrm{cm}^3$.

333. Ако су полупречник основе и висина првог ваљка редом једнаки x и y, онда из $S = 2\pi x(x + y) + 2\pi y(y + x)$, $V = \pi x^2 y + \pi y^2 x$ добијамо

$$x + y = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}, \qquad xy = V\sqrt{\frac{2}{\pi S}},$$

односно $x + y = 5\,\mathrm{cm}$, $xy = 6\,\mathrm{cm}$. Дакле, $x = 2\,\mathrm{cm}$, $y = 3\,\mathrm{cm}$ или $x = 3\,\mathrm{cm}$, $y = 2\,\mathrm{cm}$. Површине тих ваљака су $20\pi\,\mathrm{cm}^2$ и $30\pi\,\mathrm{cm}^2$, а запремине $12\pi\,\mathrm{cm}^3$ и $18\pi\,\mathrm{cm}^3$.

334. $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}^2$. **335.** $\pi\,\mathrm{cm}^3$. **336.** $r^2 H\left(\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

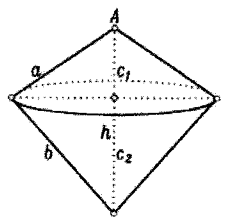
337. Полупречник основе ваљка је $r = \dfrac{b}{2\sin(\beta/2)}$. Висину ваљка добијамо из правоуглог троугла O_1O_2M (O_1 и O_2 центри основа, M средиште тетиве b, $O_2M = \dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$, $\angle O_1MO_2 = \alpha$): $H = \dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Запремина ваљка је $V = \dfrac{\pi b^3 \cos\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{8\sin^3\frac{\beta}{2}}$.

338. Нека је $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ висина тетраедра. Из $\frac{r}{\frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{h-2r}{h}$ налазимо да је $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}+1)$, па је $P = a^2\pi(3-2\sqrt{2})$, $V = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{18}(5\sqrt{2}-7)$.

339. Упутство: $H^3 - 96H + 256 = H^3 - 64H - 32H + 256 = 0$, итд. $H_1 = 8$, $R_1 = 2$; $H_2 = 4(\sqrt{3}-1)$, $R_2 = 2\sqrt{\sqrt{3}+1}$. **340.** $P = (2m+n)\sqrt[3]{\frac{2\pi V^2}{m^2 n}}$.

341. Да би омотач ваљка био подељен на два једнака дела, раван мора да садржи и неку тачку друге основе. Ако је пречник основе $2R$, висина је $H = 2R\sqrt{3}$. Из $P = 2R^2\pi + 2RH\pi = 2\pi(1+2\sqrt{3})$ следи $R = 1$ и $H = 2\sqrt{3}$. Запремина ваљка је $V = 2\pi\sqrt{3}$.
342. 45°.

343. $V = 96\pi\,\mathrm{cm}^3$. **344.** $P = 5\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = \frac{\pi\sqrt{15}}{3}\,\mathrm{cm}^3$. **345.** $P = 81\pi(1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$, $V = 243\pi\,\mathrm{cm}^3$.



Сл. уз зад. 346

346. По Питагориној теореми (в. слику) $c = \sqrt{a^2+b^2} = 25$. Како је $c \cdot h = a \cdot b$, то је $h = \frac{ab}{c} = 12$. Тражена запремина је $V = V_1 + V_2 = \frac{h^2\pi c_1}{3} + \frac{h^2\pi c_2}{3} = \frac{h^2\pi(c_1+c_2)}{3} = \frac{h^2\pi c}{3} = 1200\pi$.
347. Осни пресек представља једнакостранични троугао. Висина купе једнака је висини троугла, па је $H = r\sqrt{3}$. Користећи формулу за запремину купе налазимо да је $V = \frac{1}{3}\pi H r^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

348. $H = 4\,\mathrm{cm}$. **349.** $\pi r^2 = P - M$, $r = 3$; $s = 5$, $H = 4$, $V = 12\pi$.

350. $r = \frac{s}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $H = \frac{s}{2} = 10\,\mathrm{cm}$, $P = r^2\pi + r\pi s = 100\pi(3+2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^3$, а $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = 1000\pi\,\mathrm{cm}^3$.

351. $\frac{a^3\pi}{4} - \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{12}\pi a^3$. **352.** $\left(\frac{Rd}{H}\right)^2\pi$. **353.** $\frac{l^2}{2}\sin\alpha$.

354. Из формуле $l = \frac{a\pi\alpha}{180^\circ}$ за дужину лука полупречника a и централног угла α и $l = 2R\pi$ за обим основе кружне купе добија се $\frac{a\pi 36^\circ}{180^\circ} = 2R\pi$, а одатле $a = 10R$. Замењујући у формулу $S = \frac{Rl}{2} = Ra\pi$ за површину омотача купе, добијамо $R = \sqrt{\frac{S}{10\pi}}$.

355. $8\,\mathrm{cm}$. **356.** $\frac{25\pi}{\sqrt{3}}$. **357.** Из $2 \cdot \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + 6a^2 = 6 + 3\sqrt{3}$ налазимо да је $a = 1$, па је $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$.

358. $4\pi S$. **359.** $\sqrt{5} : 5$. **360.** $V_6 : V_3 = 2 : 1$. **361.** $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **362.** $\frac{\pi h^2}{3}(a+2b)$.
363. $h = 9\sqrt[3]{7}\,\mathrm{cm}$.

364. $V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3}\frac{10 \cdot 24}{2} \cdot 15 = 600\,\mathrm{cm}^3$. Страница ромба је дужине $a =$

$\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 13\,\text{cm}$. Како је површина ромба $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot h = a \cdot 2r$, имамо да је $r = \frac{d_1 \cdot d_2}{4a} = \frac{60}{13}\,\text{cm}$. Запремина купе је $V_k = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}\left(\frac{60}{13}\right)^2 \pi \cdot 15\,\text{cm}^3$, па је тражена разлика $V_p - V_k \approx 265{,}56\,\text{cm}^3$.

365. Ако је r полупречник основе купе, њена изводница је $2r/\sqrt{3}$, а висина $r/\sqrt{3}$.

366. $180°$. **367.** $V = \frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **368.** $V = \frac{2\pi s^3\sqrt{2}}{81}$. **369.** $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$. **370.** $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

371. $2:9$. **372.** $\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$. **373.** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{360°}$. **374.** $P_1 = P_2 = \frac{4a^2\pi}{3\sqrt{3}}$, $V_1 = V_2 = \frac{2a^3\pi}{27}$.

375. $P = a^2\pi\sin\beta(1 + \operatorname{tg}\beta) \approx 185{,}73$, $V = \frac{a^3\pi\sin^2\beta}{3\cos\beta} \approx 196{,}25$. **376.** $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{9\sqrt{3}}$.

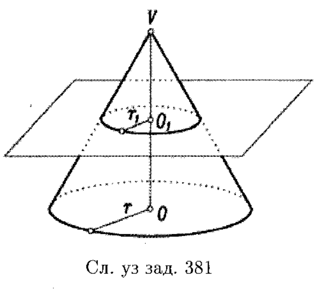
377. Добијено тело се може описати као ваљак из кога су одбачене две купе чије основе су основе ваљка, а врх им је заједнички. Полупречник основе ваљка је једнак висини троугла, $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а висине купа су једнаке одсечцима на које висина троугла дели хипотенузу, $h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $h_2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $P = ab\pi\left(2 + \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $V = \frac{2a^2b^2\pi}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

378. Висина купе је $H = \frac{r}{\sqrt{3}}$, а изводница $s = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, па је површина њеног омотача $M_k = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{3}}$. Ако је висина ваљка x, онда је полупречник његове основе $y = \sqrt{3}(H - x) = r - x\sqrt{3}$, па је површина омотача ваљка $M_v = 2xy\pi = 2\pi(rx - x^2\sqrt{3})$. Из $M_k = 4M_v$ добијамо $12x^2 - 4rx\sqrt{3} + r^2 = 0$, одакле $x = \frac{r}{2\sqrt{3}}$. Запремина купе је $V_k = \frac{r^3\pi}{3\sqrt{3}}$, а запремина ваљка је $V_v = y^2x\pi = \frac{r^3\pi}{8\sqrt{3}}$, па је $V_v = \frac{3}{8}V_k$.

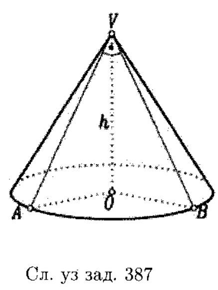
379. Ако троугао ротира око странице a, запремина је $V_a = \frac{1}{3}h_a^2 a\pi = \frac{4\pi S^2}{3a}$, јер је површина троугла $S = \frac{1}{2}ah_a$. Слично, $V_b = \frac{4\pi S^2}{3b}$ и $V_c = \frac{4\pi S^2}{3c}$, па је $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

380. Видети решење претходног задатка.

381. Пошто је однос запремина целе купе и дела купе изнад равни $2:1$, однос полупречника њихових основа је $r : r_1 = \sqrt[3]{2} : 1$, в. слику. Дакле, $r_1 = r/\sqrt[3]{2}$ и $VO_1 = r_1\sqrt{3} = r\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$.



Сл. уз зад. 381



Сл. уз зад. 387

382. Пресек је једнакокраки троугао (основица тог троугла је тетива купе на удаљености 15 од центра основе) површине 500.

383. $R = \dfrac{a\varphi}{2\pi}$, $H = a\sqrt{1 - \dfrac{\varphi^2}{4\pi^2}}$, $P = a^2\varphi\left(\dfrac{\varphi}{2\pi} + 1\right)$, $V = \dfrac{a^3\varphi^3}{6}\sqrt{1 - \dfrac{\varphi^2}{4\pi^2}}$.

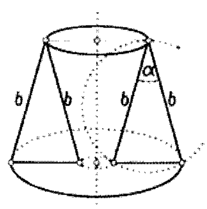
384. Ако се постави раван кроз осу купе и дијагоналу коцке, добија се у пресеку правоугаоник страница a и $a\sqrt{2}$ уписан у једнакокраки троугао основице $2r$ и висине $H = r\sqrt{2}$. Из сличности троуглова добија се $\dfrac{a}{r\sqrt{2}} = \dfrac{r - \frac{a}{2}\sqrt{2}}{r}$, одакле је $a = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Однос запремина купе и коцке је

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}r^2\pi H}{a^3} = \frac{4\pi}{3}.$$

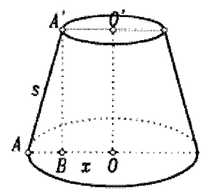
385. а) $a = \dfrac{2rh}{2r + h\sqrt{2}}$; б) $\pi : 9(\sqrt{6} - 2)^3 \approx 3{,}844$. **386.** $\dfrac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}$.

387. Пошто изводнице VA и VB деле омотач у односу $1 : 2$, тачке A и B деле круг основе у истом односу, па је $\angle AOB = 120°$, в. слику. Ако је $AB = x$, онда је $OA = x/\sqrt{3}$ и $VA = x/\sqrt{2}$, па из $h^2 = VA^2 - OA^2$ следи $x = h\sqrt{6}$. Дакле, полупречник основе купе је $OA = h\sqrt{2}$, а њена запремина $V = 2h^3\pi/3$. **388.** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2n - m}{2m - n}$.

389. $V = \dfrac{H\pi}{3}\left[\left(R + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(R + \dfrac{a}{2}\right)R + R^2\right] - \dfrac{H\pi}{3}\left[\left(R - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(R - \dfrac{a}{2}\right)R + R^2\right] = aHR\pi$, в. слику. Заменом $H = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $R = \dfrac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ и $a = 2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$ добија се $V = b^3\pi\cos\dfrac{\alpha}{2}$. **390.** $h/\sqrt{2}$.



Сл. уз зад. 389



Сл. уз зад. 391

391. Из правоуглог троугла ABA', в. слику, налазимо да је $s^2 = (r_1 - r_2)^2 + H^2$, тј. $s = 13$, па је $P = B_1 + B_2 + M = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s = 216\pi$.

392. $AO = r_1$, $A'O' = r_2$, $x = r_1 - r_2 = 3$, в. слику уз претходни задатак, па је $H = A'B = \sqrt{s^2 - x^2} = 4$ и $V = \dfrac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = 124\pi$.

393. Из $\pi r^2 = 4\pi\,\mathrm{cm}^2$ и $\pi R^2 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2$ следи $r = 2\,\mathrm{cm}$, $R = 5\,\mathrm{cm}$. Из $M = \pi s(R + r) = 35\pi\,\mathrm{cm}^2$ следи $s = 5\,\mathrm{cm}$. Из $H^2 = s^2 - (R - r)^2$ следи $H = 4\,\mathrm{cm}$. Запремина купе је $V = 52\pi\,\mathrm{cm}^3$. **394.** $H = 8\,\mathrm{cm}$, $V = 1376\pi\,\mathrm{cm}^3$.

395. Из $(R+r)\pi s = R^2\pi + r^2\pi$ следи да је $s = \dfrac{R^2 + r^2}{R + r}$, $H = \dfrac{2Rr}{R + r} = 4\,\mathrm{cm}$, $V = 84\pi\,\mathrm{cm}^3$.

396. $V = 104\,\mathrm{cm}^3$. **397.** $P = 308\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = 620\pi\,\mathrm{cm}^3$.

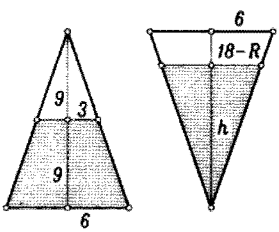
398. Површина омотача је $M = \pi s(R + r)$, а површина осног пресека је $Q = h(R + r)$. Пошто је $h = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$, биће $M = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}h(R + r) = \dfrac{2\pi Q}{\sqrt{3}}$.

399. Осовински пресек је трапез (нацртати слику) са паралелним страницама 40 cm и 12 cm. Висина трапеза је истовремено и висина купе, и израчунава се по Хероновој формули из троугла чије су странице 80 cm, 60 cm и $2R-2r=28$ cm. Површина троугла је 672 cm^2, а из $P=\dfrac{(2R-2r)H}{2}$ добијамо висину $H=48$ cm. Према томе, запремина је

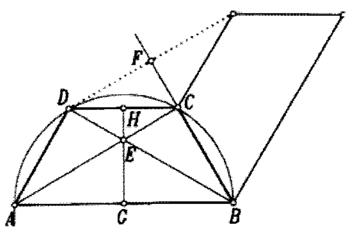
$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)=8896\pi\,\mathrm{cm}^3.$$

400. $P=1296\pi\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$, $V=5832\pi\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3$. **401.** $P=\pi(a+b+\sqrt{a^2+b^2})\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $V=\dfrac{\pi ab}{3\sqrt{2}}(a+b)$. **402.** а) $P=2a^2\pi\sqrt{3}$, $V=\dfrac{a^3\pi}{2}$; б) $P=3a^2\pi$, $V=\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}$.
403. $7V/27$.

404. Запремина воде је $V=\dfrac{1}{3}\cdot 9\pi(6^2+6\cdot 3+3^2)=189\pi$, в. слику. Том водом напунимо купу сличну датој ($h=3r$), чија је запремина $V=\dfrac{1}{3}r^2\pi h=\dfrac{1}{27}h^3\pi$. Из $189\pi=\dfrac{1}{27}h^3\pi$ добијамо $h=9\sqrt[3]{7}\approx 17{,}216$ dm.



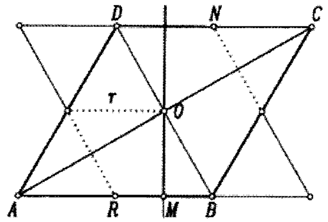
Сл. уз зад. 404



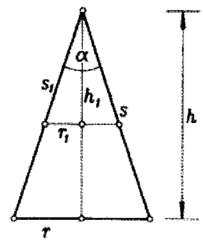
Сл. уз зад. 405

405. Трапез је једнакокраки, јер је тетивни (круг над пречником AB садржи C и D, в. слику). Висина трапеза је $HG=2$ (у $\triangle HCC$ је $CC=2,5$), а краци $BC=AD=\sqrt{5}$.
Купа настала ротацијом $\triangle ABC$ има површину омотача $M_1=10\pi\sqrt{5}$, а запремину $V_1=\dfrac{20}{3}\pi\sqrt{5}$. Зарубљена купа настала ротацијом четвороугла $ACFD$ ($R=AC=2\sqrt{5}$, $r=DF=\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$, $h=CF=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$) има површину омотача $M_2=16\pi$, а запремину $V_2=\dfrac{196\pi\sqrt{5}}{25}$. Купа настала ротацијом $\triangle DCF$ има омотач површине $M_3=\dfrac{18}{5}\pi\sqrt{5}$, а запремину $V_3=\dfrac{36}{25}\pi\sqrt{5}$.
Површина тела је $P=M_1+M_2+M_3=\left(\dfrac{68}{5}\sqrt{5}+16\right)\pi\approx 145{,}80\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $V=V_1+V_2-V_3=\dfrac{196\sqrt{5}}{15}\pi\approx 91{,}791\,\mathrm{cm}^3$.

406. Тело настаје ротацијом ромба $ABCD$ око MN, в. слику, састављено је од две зарубљене купе са заједничком мањом основом. Ивица ромба је (из правоуглог $\triangle ABO$) $AB=12{,}5$ cm, па је полупречник мање основе $r=AB/2=6{,}25$ cm. Висина ромба је $MN=d_1d_2/2AB=6{,}72$ cm, а полупречник веће основе је (из $\triangle AOM$) $R=11{,}52$ cm. Површина насталог тела је $P=487{,}5458\pi\approx 1531{,}7\,\mathrm{cm}^3$, а запремина $V=546{,}051296\pi\approx 1715{,}5\,\mathrm{cm}^3$.



Сл. уз зад. 406



Сл. уз зад. 407

407. Како је $V = 2V_1$, биће $r^2\pi h = 2r_2^2\pi h_1$, тј.

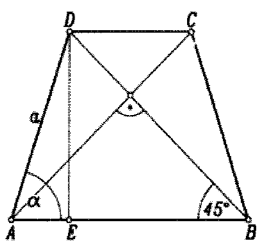
$$h_1 = \frac{h}{2}\cdot\frac{r^2}{r_1^2}. \tag{1}$$

Из пропорције $r : r_1 = h : h_1$ и (1) следи $h_1 = \dfrac{h}{2}\cdot\dfrac{h^2}{h_1^2}$, тј.

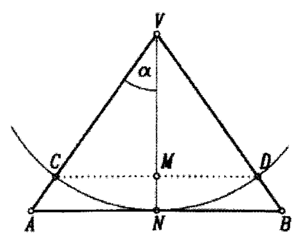
$$r : r_1 = s : s_1 = h : h_1 = \sqrt[3]{2} : 1, \tag{2}$$

в. слику. Површина мање купе је $P_1 = r_1^2\pi + r_1 s_1\pi$, а зарубљене купе $P_0 = r^2\pi + r_1^2\pi + rs\pi - r_1 s_1\pi$. Из $P_1 = P_0$ следи $r(r+s) = 2r_1 s_1$, па се из (2), заменом $r = r_1\sqrt[3]{2}$, $s = s_1\sqrt[3]{2}$, добија $(r_1 + s_1)\sqrt[3]{4} = 2s_1$, односно $r_1 = (\sqrt[3]{2} - 1)s_1$. Дакле, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_1}{s_1} = \sqrt[3]{2} - 1$ и, коначно, $\alpha = 30°8'$.

408. Дијагонале граде углове од по $45°$ са основицама. Ако је дужина дијагонале d, а висина трапеза h, онда је, в. слику, $h = DE = s\sin\alpha = d\sqrt{2}/2$. Даље, $a = AE + EB = s\cos\alpha + d\sqrt{2}/2 = s(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Слично се доказује да је $b = s(\sin\alpha - \cos\alpha)$. Површина трапеза је $P = (a+b)h/2 = s^2\sin^2\alpha$. Користећи формулу за запремину зарубљене купе са $R = a/2$, $r = b/2$ добијамо $V = \dfrac{s^3\pi}{12}\sin\alpha(1 + 2\sin^2\alpha)$.



Сл. уз зад. 408



Сл. уз зад. 418

409. Ако је висина ваљка H_v, а висина купе H_k, из једнакости запремина следи да је $H_k = 3H_v$. Из једнакости површина следи $s = 2H_v + R = \dfrac{2}{3}H_k + R$. Пошто је $s^2 = R^2 + H_k^2$, биће

$$\left(\frac{2}{3}H_k + R\right)^2 = R^2 + H_K^2,$$

одакле $H_k = \dfrac{12}{5}R$, а затим $H_v = \dfrac{4}{5}R$ и $s = \dfrac{13}{5}R$. Део купе који лежи у ваљку је зарубљена купа чија доња основа има полупречник R, а полупречник горње основе налазимо из H_k :

$R = (H_k - H_v) : r$, дакле $r = \dfrac{H_k - H_v}{H_k} R = \dfrac{2}{3} R$. Запремина је $V = \dfrac{\pi H_v}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \dfrac{76\pi R^3}{135}$.

410. Основице трапеза су $a = \dfrac{h}{3}(3+\sqrt{3})$ и $b = \dfrac{h}{3}(3-\sqrt{3})$, крак је $c = \dfrac{2}{3}h\sqrt{3}$, дијагонала $d = h\sqrt{2}$, а тачка пресека дијагонала дели дијагоналу на дужи дужине $m = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{6}(3+\sqrt{3})$ и $n = \dfrac{b\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{6}(3-\sqrt{3})$. Тело је састављено од две зарубљене купе са заједничком основом полупречника d, другом основом полупречника m и висинама n и m, из којих су избачене потпуне купе полупречника основе m и висина n и m (нацртати слику!). $P = \dfrac{4\pi h^2\sqrt{2}}{3}(1+\sqrt{3})$, $V = \dfrac{\pi h^3\sqrt{2}}{9}(9-\sqrt{3})$.

411. $M = \dfrac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}$, $V = \dfrac{\pi}{3}(R^3 - r^3)\operatorname{tg}\alpha$. **412.** $R = 2r$, $s = \dfrac{5}{3}r$, $H = \dfrac{4}{3}r$, $r = \dfrac{\sqrt{Q}}{2}$, $V = \dfrac{7\pi}{18}Q\sqrt{Q}$. **413.** $6:5$. **414.** $R\pi\sqrt{3}$. **415.** $\dfrac{R^2\pi}{4}$. **416.** $3:4$. **417.** $\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{12}}$.

418. Омотач купе CVD једнак је половини омотача купе AVB, в. слику, па је $CV : AV = 1 : \sqrt{2}$. Међутим, $CV : AV = MV : NV = MV : CV = \cos\alpha$, па је $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, дакле $\alpha = 45^\circ$.

419. Запремина ваљка уписаног у сферу је $V(r) = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$. Треба доказати да је, за свако r, $V(r) \leqslant V\left(R\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$. Међутим, неједнакост $2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \leqslant \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$ еквивалентна је, редом, следећим:

$$3\sqrt{3}r^2\sqrt{R^2 - r^2} \leqslant 2R^3, \qquad 27r^4(R^2 - r^2) - 4R^6 \leqslant 0,$$
$$27r^6 - 27R^2r^4 + 4R^6 \geqslant 0, \qquad (3r^2 - 2R^2)^2(3r^2 + R^2) \geqslant 0.$$

Последња неједнакост је тачна за свако r, а једнакост важи ако и само ако је $r = R\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

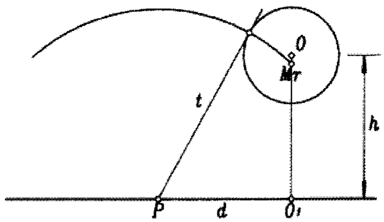
420. Нека су A_1, B_1, C_1 центри тих сфера, а r_a, r_b, r_c њихови полупречници. Тада је ABB_1A_1 правоугли трапез, па је $(r_a - r_b)^2 + c^2 = (r_a + r_b)^2$, односно $4r_ar_b = c^2$. Слично се показује да је $4r_br_c = a^2$ и $4r_cr_a = b^2$. Дакле, $64r_a^2r_b^2r_c^2 = a^2b^2c^2$, односно $8r_ar_br_c = abc$, па је

$$r_a = \frac{r_ar_br_c}{r_br_c} = \frac{\frac{1}{8}abc}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{bc}{2a}$$

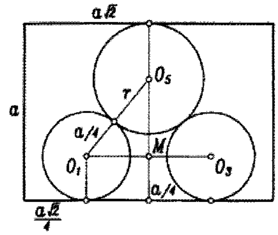
и, слично, $r_b = \dfrac{ac}{2b}$, $r_c = \dfrac{ab}{2c}$.

421. Нека је O_1 нормална пројекција центра O сфере S на раван α и нека је $OO_1 = h$, $PO_1 = d$, в. слику. Тада је $PO_1 = \sqrt{d^2 + h^2}$, полупречник конструисане сфере са центром P је $t = \sqrt{PO_1^2 - r^2} = \sqrt{d^2 + h^2 - r^2}$; та сфера сече дуж OO_1 у тачки M, таквој да је $OM_1 = \sqrt{t^2 - a^2} = \sqrt{h^2 - r^2}$. Дакле, положај тачке M не зависи од P; другим речима све конструисане сфере садрже тачку M. **422.** $\dfrac{rh^2}{(r+h)\sqrt{r^2 + h^2}}$.

423. Центри тих кугли су темена пирамиде чија основа је једнакостранични троугао странице $a = 2R$, бочна ивица $s = R + r$ и висина $H = R - r$ (где је r полупречник четврте кугле). Применом Питагорине теореме на правоугли троугао коме је хипотенуза



Сл. уз зад. 421



Сл. уз зад. 424

бочна ивица пирамиде, а једна катета висина пирамиде, добијамо $(R+r)^2 = (R-r)^2 + (2R\sqrt{3}/3)^2$, односно $r = R/3$.

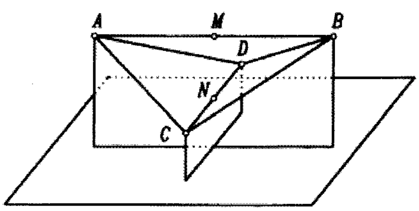
424. Вертикални дијагонални пресек кутије (коцке) изгледа као на слици. Нека је полупречник пете сфере r. Троугао O_1MO_5 је правоугли, па је $O_1M^2 + MO_5^2 = O_1O_5^2$, тј.

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{4} - r\right)^2 = \left(r + \frac{a}{4}\right)^2,$$

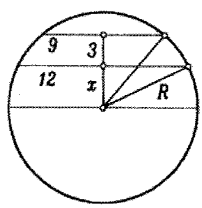
одакле $r = 5a/16$, а сам пречник је $R = 5a/8$.

425. Нека су A, B, C, D и E центри тих лопти (E – центар горње лопте). Лако се види да је $ABCDE$ правилна четворострана пирамида којој су све ивице дужине $2r$. Висина те пирамиде, спуштена из врха E, има дужину $r\sqrt{2}$ (троугао ACE је једнакокраки правоугли, а висина пирамиде је уједно и његова висина). Тачка A је од равни P удаљена за r, тачка E за $r(1+\sqrt{2})$, а највиша тачка горње лопте за $r(2+\sqrt{2})$.

426. Нека су A и B центри лопти полупречника r и C и D центри друге две лопте, в. слику. Тада је $AB = 2r$, $AC = BC = BD = AD = r + x$, $CD = 2x$, а удаљеност тачака A и B, односно C и D, од равни је r, односно x. Ако је M средиште дужи AB, а N средиште дужи CD, онда је $CM^2 = AC^2 - AM^2 = (r+x)^2 - r^2$, $MN^2 = CM^2 - CN^2 = (r+x)^2 - r^2 - x^2 = 2rx$. Међутим, $MN^2 = (r-x)^2$, па из $(r-x)^2 = 2rx$ следи $x = r(2 \pm \sqrt{3})$.



Сл. уз зад. 426



Сл. уз зад. 428

427. Како је $R = a/2$, површина лопте је $P_l = 4R^2\pi = a^2\pi$, а површина коцке је $P_k = 6a^2$, па је површина коцке $6/\pi$ пута већа од површине лопте.

428. Са слике се види да је

$$R^2 = x^2 + 144 \tag{1}$$

и $R^2 = (x+3)^2 + 81$, одакле је $x^2 + 144 = x^2 + 6x + 90$, односно $x = 9$. Кад $x = 9$ заменимо у (1), добијамо да је $R = 15\,\mathrm{cm}$, односно да је површина сфере $P = 900\pi\,\mathrm{cm}^2$.

429. $P = 520\pi\,\mathrm{cm}^2$. **430.** $910\pi\,\mathrm{cm}^2$. **431.** Једнаке су. **432.** $4\pi\,\mathrm{m}^2$. **433.** $12\,\mathrm{cm}$.
434. $2\pi r^2 \dfrac{c-r}{c}$.

435. Осни пресек је тангентни трапез описан око круга чији је полупречник једнак полупречнику лопте, па је $s = R+r$ (где су s, r, R редом дужине изводнице и полупречника двеју основа зарубљене купе). Површина омотача зарубљене купе је $M = \pi S(R+r) = \pi s^2$, а површина лопте је $P = 4\pi a^2$. Пошто је $s \geqslant 2a$ (крак трапеза није мањи од његове висине), биће и $M \geqslant P$.

436. $2\sqrt[3]{3r^2d - 3rd^2 + d^3} \approx 14{,}56\,\mathrm{cm}$.

437. Полупречник лопте једнак је полупречнику круга уписаног у једнакокраки троугао основице $2r = 10\,\mathrm{cm}$ и крака $s = \sqrt{h^2 - r^2} = 13\,\mathrm{cm}$. Површина овог троугла је $P = rh = 60\,\mathrm{cm}^2$, а с друге стране $P = Rr + Rs$. Налазимо да је $R = \dfrac{10}{3}\,\mathrm{cm}$, па је запремина $V = \dfrac{4}{3}R^3\pi = \dfrac{4000\pi}{81}\,\mathrm{cm}^3$.

438. Из релације $4(r+1)^2\pi = 4r^2\pi + 8\pi$ налазимо $r = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Запремина се повећава за $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\pi - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\pi = \dfrac{13}{3}\pi$.

439. а) $2:3:2$; б) $6:9:4$; в) $6:9:4$. **440.** Однос површина је $16:12:9$, а запремина $32 : 12\sqrt{2} : 9$. **441.** $1/2$.

442. Како се средишта описане и уписане сфере правилног тетраедра поклапају са тежиштем тог тетраедра и тежиште тетраедра дели висину у односу $3:1$, то је $R : r = 3:1$.

443. $h_1 = \sqrt[3]{h^3 + \dfrac{4r^3H^2}{R^2}} = 4\sqrt[3]{39} \approx 13{,}565\,\mathrm{cm}$.

444. Нека је x тражени полупречник. Тада

$$\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{4}{3}\pi(R^3 - x^3),$$

тј. $x^6 + x^3R^3 - R^6 = 0$. Дакле, $x^3 = \dfrac{R^3(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$, па је $x = R\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (друго решење не одговара природи задатка).

445. $P = 600\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V = 1000\pi\,\mathrm{cm}^3$. **446.** $2{,}5\,\mathrm{cm}$.

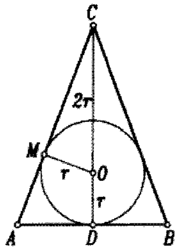
447. $\sqrt{a^2/3 + b^2/4} = \sqrt{7}$. **448.** $3\,\mathrm{cm}$. **449.** $(\sqrt{3}-1)/2$. **450.** $2\pi : 9\sqrt{3}$. **451.** Лопта: $P = \dfrac{a^2\pi}{3}$, $V = \dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{54}$; призма: $P = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $V = \dfrac{a^3}{4}$. **452.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$, $r = \dfrac{9a}{8}$.

453. $25\,\mathrm{cm}$. **454.** $P_V/P_L = 3/2$, $V_V/V_L = 3/2$. **455.** $P = 66\pi\,\mathrm{dm}^2$ или $P = 80\pi\,\mathrm{dm}^2$, $V = 72\pi\,\mathrm{dm}^3$ или $V = 96\pi\,\mathrm{dm}^3$.

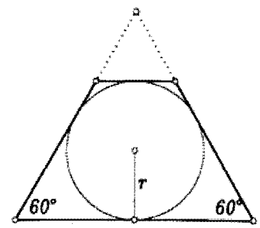
456. Довољно је доказати да је осни пресек купе тангентни трапез, тј. да је збир пречника основа једнак двострукој изводници. Из услова задатка следи да је $s(R+r) = \pi s^2$, дакле биће $R + r = s$. **457.** $1:2$. **458.** $9:16$.

459. Из $\triangle COM$, в. слику, $CM = \sqrt{CO^2 - OM^2} = 2r\sqrt{2}$, а из сличности $\triangle COM$ и $\triangle CAD$, $AD : CD = OM : CM$, односно $AD : 4r = r : 2r\sqrt{2}$, одакле $AD = r\sqrt{2}$. Како је $AD = AM$, биће $CA = AM + MA = 3r\sqrt{2}$. Површина купе је $P = \pi(r\sqrt{2})^2 + \pi(r\sqrt{2})(3r\sqrt{2}) = 8r^2\pi$.

460. $3:4$. **461.** $P = \pi(R+d)(R - d + \sqrt{2R(R-d)})$.



Сл. уз зад. 459



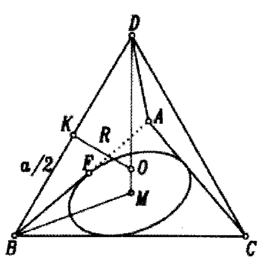
Сл. уз зад. 464

462. За лопту је $V_l = \frac{4}{3}r^3\pi$ и $P_L = 4r^2\pi$, а за ваљак $V_V = 2r^3\pi = \frac{3}{2}V_L$ и $P_V = 6r^2\pi = \frac{3}{2}P_L$. Полупречник основе купе је $r\sqrt{3}$, а њена висина је $3r$, па је $V_K = 3r^3\pi = \frac{9}{4}V_L$ и $P_K = 9r^2\pi = \frac{9}{4}P_L$. **463.** $V_K : V_L = 2 : 1$.

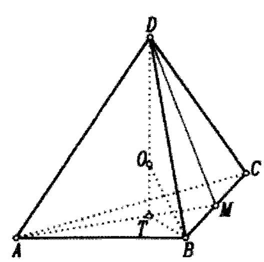
464. Може се сматрати да је описана зарубљена купа настала тако што се од купе K_1 у коју је уписана лопта „одруби“ мања купа K_2 чије изводнице у продужетку додирују лопту, в. слику. Површина M омотача зарубљене купе је $M = M_1 - M_2$, где је M_i површина омотача купе K_i, $i = 1,\ 2$. Нека је полупречник уписане лопте r. Тада је полупречник r_1 основе купе K_1 једнак $r\sqrt{3}$, а дужина l_1 изводнице $2r\sqrt{3}$. Имамо $M_1 = r_1l_1\pi = 6r^2\pi$. Купа K_2 је слична купи K_1, а коефицијент сличности је $1/3$. Дакле, $M_2 = \frac{1}{9}M_1 = \frac{2}{3}r^2\pi$. Одатле,

$$M = M_1 - M_2 = \frac{16}{3}r^2\pi = \frac{4}{3}S.$$

465. Нека је r полупречник сфере, а φ угао између висине и изводнице купе, $0 < \varphi < \pi/2$. Тада је полупречник основе купе $R = r\operatorname{tg}\varphi$, висина купе је $H = r$, а површина $P = r^3\pi\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi})$. Како је површина сфере $4r^3\pi$, тражени угао се добија решавањем једначине $4 = \operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi})$. Резултат: $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$, $\varphi \approx 53°8'$.



Сл. уз зад. 466



Сл. уз зад. 469

466. У пирамиди $ABCD$ којој је основа једнакостранични троугао ABC странице a, тражена сфера ће садржати круг (центра M) уписан у тај троугао. Сфера ће AB додиривати у средишту F, а BD у тачки K, таквој да је $BK = BF = a/2$, в. слику.

Троуглови DOK и DBM су слични, па је $OK : BM = DK : DM$, одакле

$$R = OK = \frac{BM \cdot DK}{DM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(b - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

467. $\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right) : 1.$ **468.** $\frac{S}{3\pi}(14\sqrt{3} + 24).$

469. Нека су углови при врху D пирамиде $DABC$ једнаки α и нека је $OT = x$, где је O центар лопте описане око пирамиде, а T центар основе пирамиде, в. слику. Тада је $TB = \sqrt{R^2 - x^2}$ (из $\triangle OBT$), па је $MB = TB\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - x^2}$ ($\triangle BTM$). Пошто је $DB^2 = DT^2 + TB^2 = (R+x)^2 + R^2 - x^2 = 2R(R+x)$, из

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{BD} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2R(R+x)}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{R-x}}{2\sqrt{2R}}$$

следи $x = R\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ и, коначно, $H = R + x = 2R\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

470. Ако је полупречник лопте R, онда је висина прве купе $H = R + \frac{R}{\sin\alpha/2}$, а висину друге купе изражавамо преко R и $\sin\frac{\alpha}{2}$ на следећи начин: изводница друге купе је $s = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, а висина $h = s\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2R\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Однос запремина ових купа је H^3/h^3, па из

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^3 : 8\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 = 27$$

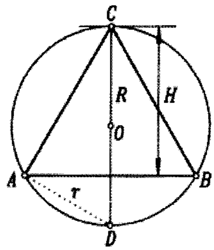
добијамо $\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{6}$, одакле $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{3}}$. Ако $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$, онда $\alpha \approx 104°7'$, а ако $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$, онда $\alpha \approx 24°24'$.

471. Из претпоставке следи да је $\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$, тј. $r^2 H = R^3$. Другу једначину по R и r добијамо из $\triangle ADC$, в. слику: $r^2 = H(2R - H)$. Из те две једначине добијамо $H(2R-H)H = R^3$, тј. $H^3 - 2RH^2 + R^3 = 0$, односно $(R-H)(R^2 + RH - H^2) = 0$. Дакле, $R = H$ или $R = \frac{-H \pm H\sqrt{5}}{2}$. Негативно решење $R = \frac{-H(1+\sqrt{5})}{2}$ не одговара условима задатка, па је запремина лопте

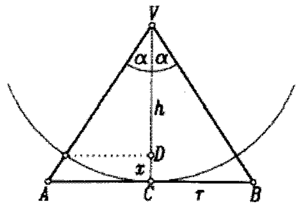
$$V = \frac{4}{3}H^3 \quad \text{или} \quad V = \frac{4}{3}\pi H^3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi H^3(\sqrt{5} - 2).$$

472. $\frac{\pi a^3}{3}(1 + \cos\alpha)^3 \operatorname{ctg}\alpha.$ **473.** $\frac{\pi R^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha}$, $\frac{\pi R^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha}{3}$.

474. Осни пресек такве зарубљене купе је тангентни једнакокраки трапез. Најпре доказати да је $s = R + r$, а затим, применом Питагорине теореме, да је $H = 2\sqrt{Rr}$. Тврђења б) и в) лако следе.



Сл. уз зад. 471



Сл. уз зад. 480

475. Нека је r полупречник лопте, а h висина купе. Тада је $r^2 = h(h-r)$, одакле $h = \frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$. Полупречник основе купе је $R = \sqrt{r^2-(h-r)^2} = r\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. запремина лопте је $V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi$, а купе $V_2 = \frac{1}{3}R^2\pi h = \frac{1}{3}r^3\pi$, па је $V_1 : V_2 = 4 : 1$.

476. $\frac{r^3\pi}{3}(2+3\sqrt{2})$. **477.** $\frac{4}{3}s^3\pi\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}$.

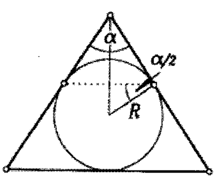
478. Ако су полупречници основа купе R и r, изводница купе је $R+r$, па је површина њеног омотача $M = (R+r)^2\pi$. Полупречник лопте је једнак половини висине h купе, па је површина лопте $S = h^2\pi$. Како је $R+r > h$, биће $M > S$. **479.** $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; $7 : 4$.

480. Запремина купе је $V_1 = \frac{1}{3}r^2h\pi = \frac{1}{3}h^3\pi\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$ (јер $r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, в. слику), а део купе унутар лопте је исечак лопте запремине $V_2 = \frac{2}{3}h^2x\pi = \frac{2}{3}h^3\pi(1-\cos\alpha)$ (јер $x = h - VD = h - h\cos\alpha$). Из $V_2 : V_1 = k$ следи $2(1-\cos\alpha) : \mathrm{tg}^2\,\alpha = k$, одакле се сређивањем добија једначина $2\cos^2\alpha - k\cos\alpha - k = 0$. У обзир долази само позитивно решење, па је угао α одређен релацијом $\cos\alpha = \frac{1}{4}(k+\sqrt{k^2+8k})$.

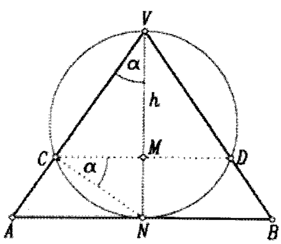
481. Тражена запремина је једнака разлици запремина купе са основом полупречника $r = R\cos\frac{\alpha}{2}$ и висином $H = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = R\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$ и одсечка висине $h = R - R\sin\frac{\alpha}{2}$ лопте полупречника R, в. слику.

$$V = \frac{1}{3}r^2H\pi - \frac{1}{3}h^2(3R-h) = \frac{1}{3}R^3\pi\frac{(1-\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

482. $\frac{36nr^3\pi}{(n+2)^3}$.



Сл. уз зад. 481

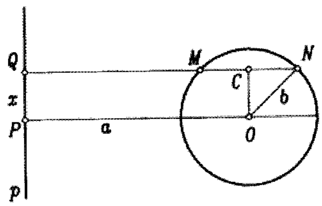


Сл. уз зад. 483

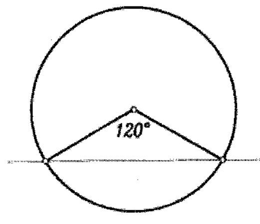
483. Запремина дела лопте унутар купе је $V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2\pi h\sin^2\alpha$, јер је $MN = h\sin^2\alpha$, в. слику. Запремина дела лопте ван купе је $V = \frac{4}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\pi - V_1 = \frac{1}{6}h^3\pi\cos^2\alpha$.

484. $5:27$. **485.** $(2\pi - 3\sqrt{3}) : (10\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1 : 33{,}681$.

486. Нека торус настаје обртањем круга k са центром O и полупречником b око праве p на одстојању $OP = a$ од центра круга, в. слику. Пресек торуса и равни нормалне на p на одстојању x од P је кружни прстен између кругова полупречника $QN = a + \sqrt{b^2 - x^2}$ и $QM = a - \sqrt{b^2 - x^2}$. Његова површина је $S(x) = \pi(QN^2 - QM^2) = 4a\pi\sqrt{b^2 - x^2}$. Пресек исте површине са том равни има и ваљак коме је основа круг k, а висина једнака $2a\pi$ (правоугаоник страница $2a\pi$ и $MN = 2\sqrt{b^2 - x^2}$). На основу Кавалијеријевог принципа запремине торуса и ваљка су једнаке, дакле запремина торуса је $V = b^2\pi \cdot 2a\pi = 2ab^2\pi^2$.



Сл. уз зад. 486



Сл. уз зад. 489

487. $V = \pi R^2 H = \dfrac{\pi R(R+H)}{2} \cdot \dfrac{2RH}{R+H} = \dfrac{P}{4} \cdot \dfrac{2}{(1/H) + (1/R)}$.

488. $AE = \sqrt{\dfrac{d^2 + (d+b)^2}{2}} - d$.

489. Маса истиснуте воде једнака је маси ваљка. Део ваљка под водом има запремину

$$\left(\frac{1}{3}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 \sin 120^\circ\right) h = r^2 h \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

в. слику, па је његова маса изражена истим мерним бројем. Запремина целог ваљка је $r^2\pi h$, па је његова густина

$$\frac{r^2 h(\pi/3 - \sqrt{3}/4)}{r^2 \pi h} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}19550\,\mathrm{g/cm^3}.$$

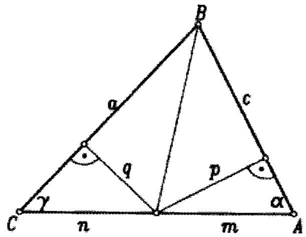
490. Нека је a страница ромба, h његова висина, а d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$) његове дијагонале. Запремина тела добијеног ротацијом око странице је $V_1 = h^2 a\pi$, а запремина тела добијеног ротацијом око мање дијагонале је $V_2 = 2 \cdot \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 \dfrac{d_2}{2}\pi = \dfrac{\pi}{12} d_1^2 d_2$. Како је $ah = d_1 d_2/2$ (= површина ромба), из $V_1 = V_2$ следи $h = d_1/6$. Ако је α оштар угао ромба, онда је $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{h}{d_1} = \dfrac{1}{6}$, одакле $\alpha \approx 19^\circ 11'$.

491. Уведимо ознаке m, n, p, q за одговарајуће дужи као на слици. По услову задатка мора бити $\pi p^2 c/3 = \pi q^2 a/3$, односно

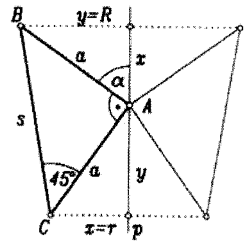
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{a}{c}. \tag{1}$$

Нека је S површина троугла ABC. Тада је $\dfrac{pc}{2S} = \dfrac{m}{m+n}$ и $\dfrac{qa}{2S} = \dfrac{n}{m+n}$, па је

$$\frac{pc}{qa} = \frac{m}{n}. \tag{2}$$



Сл. уз зад. 491



Сл. уз зад. 492

Из (1) и (2) следи $m/n = \sqrt{c/a}$. Дакле, дуж AC треба поделити у односу $AX : XC = \sqrt{c} : \sqrt{a}$.

492. На слици се лако уочава да је $y = R\ (= a\sin\alpha)$, $x = r\ (= a\cos\alpha)$, $s = a\sqrt{2}$ и $H = x + y$. Површина тела које настаје ротацијом је

$$P(\alpha) = \pi a\sqrt{2}(R + r) + \pi aR + \pi ar = \pi a(x + y)(\sqrt{2} + 1).$$

Запремина тела је

$$V(\alpha) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi R^2 x}{3} - \frac{\pi r^2 y}{3} = \frac{\pi}{3}(x + y)(x^2 + y^2).$$

Дакле, $\dfrac{P(\alpha)}{V(\alpha)} = \dfrac{\pi a(x + y)(\sqrt{2} + 1)}{\pi(x + y)(x^2 + y^2)/3} = \dfrac{3(\sqrt{2} + 1)}{a}$, јер је $x^2 + y^2 = a^2$.

493. Тело се састоји од две подударне зарубљене купе и две подударне потпуне купе, в. слику. Полупречник основе потпуне купе је $R = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{12}{5}$, а њена висина ($\triangle EBC$) је $H = EC = 9/5$. Површина омотача и запремина те купе су $M_1 = \dfrac{36}{5}\pi$, $V_1 = \dfrac{432}{125}\pi$.

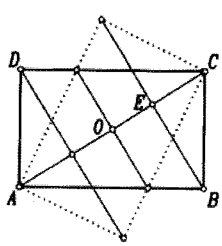
Мањи полупречник основе зарубљене купе је ($\triangle OEF \sim \triangle ABC$) $r = OF = \dfrac{15}{8}$, висина је $h = OE = OC - H = \dfrac{7}{10}$, а изводница (правоугли трапез $OEBF$) је $s = FB = \dfrac{7}{8}$.

Површина омотача и запремина зарубљене купе су $M_2 = \dfrac{1197}{320}\pi$, $V_2 = \dfrac{51429}{16000}\pi$. Површина тела је

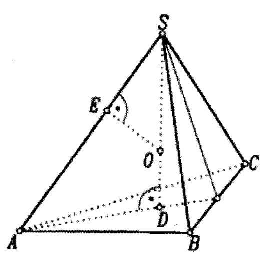
$$P = 2M_1 + 2M_2 = \frac{3501}{160}\pi \approx 68{,}742\,\mathrm{cm}^2,$$

а запремина

$$V = 2V_1 + 2V_2 = \frac{4269}{320}\pi \approx 41{,}911\,\mathrm{cm}^3.$$



Сл. уз зад. 493



Сл. уз зад. 495

494. Центар S лопте налази се у пресеку симетријских равни углова $\angle A'AB$ и $\angle AA'D'$. Те равни, $ADB'C'$ и $A'B'CD$, секу се по дијагонали DB' коцке. Нека је $DS = x$. Користећи Питагорину теорему израчунавамо полупречник r лопте на два начина: прво $r = SM$,

$$r^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2 - \frac{8x}{3\sqrt{3}} + \frac{10}{9},$$

а затим је r једнако одстојању S од AB:

$$r^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2x^2}{3} - \frac{2x}{\sqrt{3}} + 1.$$

Изједначавањем десних страна претходних једнакости добијамо $x = 1/\sqrt{3}$, па је $r = \sqrt{5}/3$.

495. Нека је D подножје висине SD тетраедра $SABC$, тачка O центар сфере и E тачка у којој та сфера додирује SA, в. слику. Тада је $AD = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $SD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $OD = OE = r$. Троуглови SOE и SAD су слични, па је $\frac{SO}{EO} = \frac{SA}{AD}$, односно $\frac{a\sqrt{2/3} - r}{r} = \frac{a}{a/\sqrt{3}}$, одакле је $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}}$.

496. Центар O лопте се налази на висини SD тетраедра и једнако је удаљен од свих ивица тетраедра (ако је M средиште ивице AB, онда је $OM \perp AB$. Зашто?). Према томе, центар лопте је центар тетраедра, а полупречник је једнак одстојању центра тетраедра од средишта ивица $R = 1/2\sqrt{2}$.

497. Тачка O се налази на висини SD тетраедра (или на њеном продужетку). Ако је M тачка у којој лопта додирује SC, троуглови SOM и SCD су слични, па је $\frac{SO}{OM} = \frac{SC}{CD}$, тј. $\frac{SO}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}/3}$, одакле $SO = \sqrt{6}$ (према томе, O је на продужетку висине SD, $OD = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$). Троугао KOD је правоугли, па је $OK^2 = KD^2 + OD^2 = 11/4$, $OK = \sqrt{11}/2$.

498. Полупречник R прве лопте је једнак одстојању центра тетраедра од његове стране, дакле $R = \frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Другу лопту можемо сматрати уписаном у тетраедар који од датог одсеца тангетна раван прве лопте паралелна страни датог тетраедра. Пошто $R = h/4$, тај мањи тетраедар има висину $h - 2R = h/2$, па је полупречник у њега уписане лопте $r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}$. Запремина те лопте је $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{576\sqrt{3}}$.

499. Нека је H центар уписане лопте, а F центар описане лопте, в. слику, и нека је $CD = x$, $AB = y = qx$, $CH = HB = r$ и $AF = DF = r\sqrt{6}$. Троуглови ABH и HCD су слични, па је $AB : BH = HC : CD$, тј. $qx/r = r/x$, одакле $r^2 = qx^2$.

Ако је $FB = z$, онда из троуглова ABF и FCD добијамо

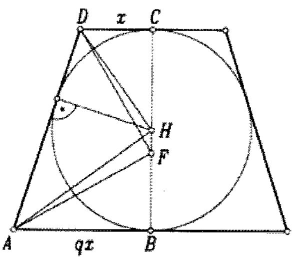
$$q^2x^2 + z^2 = (2r - z)^2 + x^2 = 6r^2.$$

Из прве једначине следи да је $q^2x^2 + z^2 = 4r^2 - 4rz + z^2 + x^2$, односно

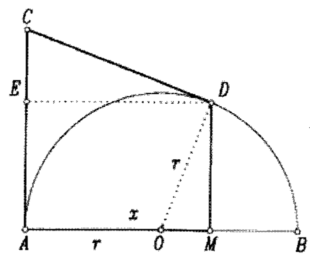
$$z = r + \frac{x^2(1-q^2)}{4r} = r + \frac{r(1-q^2)}{4q}$$

(јер $x^2 = r^2/q$). Заменом добијене вредности z у $qx^2 + z^2 = 6r^2$ следи да је $q^2x^2 + r^2\left(1 + \frac{1-q^2}{4q}\right)^2 = 6r^2$, што због $qx^2 = r^2$ даје $q + 1 + \frac{2(1-q^2)}{4q} + \frac{(1-q^2)^2}{16q^2} = 6$, односно

$q^4 + 8q^3 - 82q^2 + 8q + 1 = 0$. Растављањем на чиниоце: $(q^2 - 6q + 1)(q^2 + 14q + 1) = 0$. Из једначине $q^2 - 6q + 1 = 0$ добија се $q = 3 \pm 2\sqrt{2}$, а једначина $q^2 + 14q + 1 = 0$ нема позитивних решења.



Сл. уз зад. 499



Сл. уз зад. 501

500. Нека су a и b дужине ивица горње и доње основе ($a < b$). Лопта која додирује ивице пирамиде, сече раван бочне стране по кругу уписаном у бочну страну. Из својстава тангентног четвороугла следи да је бочна страна једнакокркаи трапез чији краци имају дужину $\dfrac{a+b}{2}$; одатле се лако добија висина бочне стране $\sqrt{ab}$.
Уписана лопта додирује основе у њиховим центрима, а бочне стране у тачкама које се налазе на осама симетрије тих бочних страна. Посматрајмо пресек пирамиде који садржи центар уписане лопте и осу симетрије једне бочне стране. Тај пресек је трапез чије су основице $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, један крак је $\dfrac{a+b}{2}$, а други $\sqrt{ab}$. У тај трапез „уписан" је круг који додирује обе основице и крак дужине $\sqrt{ab}$, при чему додирне тачке деле основице у односу $1:2$. Лако се добија да је висина тог трапеза $\sqrt{\dfrac{ab}{3}}$ (и да је $a = (5 - \sqrt{24})b$), па је $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, где је α угао између веће основице и крака $\sqrt{ab}$ тог трапеза, тј. угао диедра између доње основе и бочне стране пирамиде. Према томе, $\alpha \approx 35°16'$.

501. Ротацијом трапеза $AMDC$ настаје зарубљена купа висине x и полупречника основа $r_1 = MD = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$ и $r_2 = CA = \dfrac{xr}{r_1}$ ($\triangle EDC \sim \triangle MDO$ и $CD = CA$), дакле запремине

$$V_1 = \frac{1}{3}x\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3}x^2\pi\frac{7r^2 - 5rx + x^2}{2r - x}.$$

Ротацијом дела AMD полукруга настаје одсечак лопте; његова запремина је $V_2 = \dfrac{1}{3}x^2\pi(3r - x)$. Из $V_1 : V_2 = k$ следи $7r^2 - 5rx + x^2 = k(2r - x)(3r - x)$, односно

$$(1-k)x^2 - 5r(1-k)x + (7 - 6k)r^2 = 0,$$

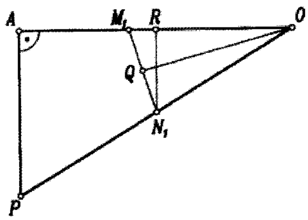
одакле $x = \dfrac{r}{2}\left(5 \pm \sqrt{\dfrac{k+3}{k-1}}\right)$. Како мора бити $0 < x < 2r$, у обзир долази само решење са негативним знаком испред корена, и то кад је $1 < \sqrt{\dfrac{k+3}{k-1}} < 5$, односно кад је $k > 7/6$.

502. Нека су OA и OB изводнице тих купа које се налазе у α, M_1 и N_1 пројекције центара M и N основа тих купа на раван α, в. слику. Продор праве OB кроз раван основе прве купе је тачка P (на OB) таква да је $PA \perp AO$. Угао који треба израчунати је $\angle OPM$, а пошто је $\sin\angle OPM = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{H}{OP}$, где је H висина тих купа, довољно је израчунати PO у функцији H, β и φ.

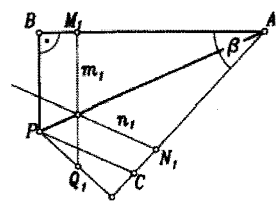
$OM_1 = ON_1 = H\cos\varphi$, $M_1N_1 = MN = 2H\sin\dfrac{\beta}{2}$, затим $OQ^2 = OM_1^2 - M_1Q^2 = H^2(\cos^2\varphi - \sin^2\beta/2)$, па $N_1R = \dfrac{M_1N_1\cdot OQ}{OM_1} = \dfrac{2H\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\dfrac{\beta}{2}}$ и $OR^2 - ON_1^2 - N_1R^2 = \dfrac{H^2}{\cos^2\varphi}\left(\cos^2\varphi - 2\sin^2\dfrac{\beta}{2}\right)^2$. Коначно, $PO = AO\cdot\dfrac{N_1O}{RO} = \dfrac{H\cos\varphi}{|\cos^2\varphi - 2\sin^2\frac{\beta}{2}|}$, јер $AO = \dfrac{H}{\cos\varphi}$. Дакле,

$$\sin\angle OPM = \frac{|\cos^2\varphi - 2\sin^2\frac{\beta}{2}|}{\cos\varphi},$$

чиме је $\angle OPM$ одређен. Ако је $\beta = 60°$, $\varphi = 30°$, онда $\sin\angle OPM = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ и $\angle OPM \approx 16°47'$.



Сл. уз зад. 502



Сл. уз зад. 503

503. Нека су AB и AC изводнице тих купа које се налазе у равни α, в. слику. Тада је продор праве p, чији нагибни угао тражимо, тачка P на симетрали угла BAC таква да је $PB \perp AB$, $PC \perp AC$ (права PB је пресек равни основе купе и равни α, права PC је пресек равни основе купе и равни α).

Кроз центар M основе прве купе конструишемо праву m, $m \parallel BP$; нека је m_1 пројекција те праве на раван α; слично за праву $n \parallel PC$ кроз центар основе N друге купе. Праве m и n се не секу, оне се налазе са разних страна равни α на истом одстојању од те равни. У равни основе друге купе постоји права $q \parallel n$ која сече m: q је симетрична правој n у односу на PC. Нека је Q заједничка тачка правих m и q, а Q_1 њена пројекција на раван α.

Потребно је израчунати $\angle QPQ_1$. Нека је R полупречник основе ових купа. Тада је $QQ_1 = MM_1 = R\cos\varphi$, а пошто је $PQ_1 \perp PA$ (зашто?), биће $\angle Q_1PC = \dfrac{\beta}{2}$, па је $PQ_1 = \dfrac{N_1C}{\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{R\sin\varphi}{\sin\frac{\beta}{2}}$ и, коначно,

$$\operatorname{tg}\angle QPQ_1 = \frac{QQ_1}{PQ_1} = \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\varphi,$$

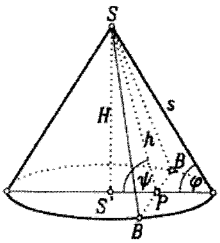
чиме је $\angle QPQ_1$ одређен. Ако је $\beta = 60°$, $\varphi = 30°$, онда $\angle QPQ_1 \approx 40°54'$.

504. Пресек је једнакокраки троугао чија је површина $P = \dfrac{h}{2}BB_1$, в. слику. Како је $H = s\sin\varphi$, $h = \dfrac{H}{\sin\psi} = \dfrac{s\sin\varphi}{\sin\psi}$. Потребно је одредити и дужину тетиве BB_1. Обележимо $S'P = d$ и $BP = B'P = x$. Тада је $d = H\operatorname{ctg}\psi = s\sin\varphi\operatorname{ctg}\psi$. Имамо да је $AP\cdot PA_1 =$

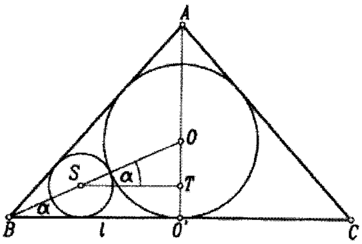
$BP \cdot PB_1$, односно $(R+d)(R-d) = x^2$, тј. $x^2 = R^2 - d^2$. Како је и $R = s\cos\varphi$, то је

$$x = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{s^2\cos^2\varphi - s^2\sin^2\varphi\operatorname{ctg}^2\psi}$$
$$= \frac{s}{\sin\psi}\sqrt{\sin^2\psi\cos^2\varphi - \cos^2\psi\sin^2\varphi} = \frac{s}{\sin\psi}\sqrt{\sin(\psi-\varphi)\sin(\psi+\varphi)}, \quad \psi > \varphi.$$

Површина пресека је $P = xh = \dfrac{s^2\sin\varphi}{\sin^2\psi}\sqrt{\sin(\psi-\varphi)\sin(\psi+\varphi)}$.



Сл. уз зад. 504



Сл. уз зад. 505

505. Посматрајмо пресек ABC купе са равни која садржи осу AO' купе и центар S једне од датих лопти, в. слику. Ако означимо са R полупречник лопте L, а са r полупречнике n малих лопти биће $\sin\alpha = \dfrac{OT}{SO} = \dfrac{R-r}{R+r} = \dfrac{l\operatorname{tg}\alpha - r}{l\operatorname{tg}\alpha + r}$, одакле $r = \dfrac{l(1-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha$. Такође,

$$ST = (R+r)\cos\alpha = \left(l\operatorname{tg}\alpha + \frac{l(1-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha = \frac{2l\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Посматрајмо сада раван која садржи средишта свих n датих лопти. Центри тих лопти образују правилни n-тоугао странице $2r$, а полупречник круга описаног око тог n-тоугла је ST, па важи релација $\dfrac{r}{ST} = \sin\dfrac{\pi}{n}$, одакле заменом добијамо тражену везу $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha}$.

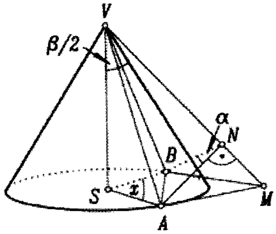
506. Нека је M заједничка тачка тангенцијалних равни и равни основе купе и N (заједничко) подножје нормала из A и B на VM, в. слику. Тада су AM и BM тангенте на основу купе, а $\angle SVA = \angle SVB = \beta/2$, $\angle ANB = \alpha$. Нека је $\angle ASB = x$, а $VA = VB = a$. Из троуглова ASV, ABS и ABN добијамо редом: $SA = VA\sin\dfrac{\beta}{2} = a\sin\dfrac{\beta}{2}$,

$AB = 2SA\sin\dfrac{x}{2} = 2a\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}$ и

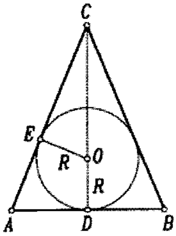
$$AN = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{1}$$

Израчунаћемо AN на други начин: из троуглова SAM и VAM имамо, редом, $AM = SA\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = a\sin\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и $VM^2 = VA^2 + AM^2 = a^2\left(1+\sin^2\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)$, па је

$$AN = \frac{AM\cdot VA}{VM} = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}. \tag{2}$$



Сл. уз зад. 506



Сл. уз зад. 507

Изједначавањем десних страна релација (1) и (2), после сређивања добијамо

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

чиме је угао x одређен.

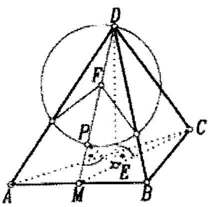
507. Ако са R означимо полупречник лопте, са r полупречник основе купе, а са H висину купе, онда је запремина купе $V_K=\dfrac{\pi Hr^2}{3}$, а запремина лопте $V_L=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, па је $k=\dfrac{V_L}{V_K}=\dfrac{4R^3}{Hr^2}$. Из сличности троуглова COE и CAD следи $\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{EO}{DA}$, односно $\dfrac{H-R}{\sqrt{H^2+r^2}}=\dfrac{R}{r}$, одакле $H=\dfrac{2r^2R}{r^2-R^2}$. Према томе,

$$k=\frac{2R^2(r^2-R^2)}{r^4}=2\frac{R^2}{r^2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right).$$

Како је збир позитивних бројева $\dfrac{R^2}{r^2}$ и $1-\dfrac{R^2}{r^2}$ константан, то је њихов производ највећи када су они једнаки, тј. за $\dfrac{R^2}{r^2}=\dfrac{1}{2}$, па је $k_{\max}=\dfrac{1}{2}$.

508. Пресек сфере и равни ABD је круг пречника DP, где је P подножје нормале из центра E основе ABC на раван ABD, в. слику. Ако је F центар стране ABD, тада је $\dfrac{FM}{EM}=\dfrac{CM}{EM}=3$, одакле $PM=\dfrac{1}{3}FM=\dfrac{1}{9}DM$, односно $DP=\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4a\sqrt{3}}{9}$. Део троугла ABD унутар сфере састоји се од два једнакокрака троугла (краци једнаки $DP/2$, угао међу њима $120°$) и кружног исечка са централним углом $120°$. Његова површина је

$$P_1=\frac{1}{3}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)^2\pi+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)^2\sin 120°$$
$$=\frac{4a^2}{27}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$



Сл. уз зад. 508

а површина дела омотача тетраедра унутар сфере је $P=3P_1=\dfrac{a^2}{27}(4\pi+6\sqrt{3})$.

Глава IV – Детерминанте и системи линеарних једначина и неједначина

509. а) 1; б) −0,053; в) $5\sqrt{6}$; г) 0; д) 1; ђ) 0.

510. а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; б) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $\cos(\alpha+\beta)$; г) 0; д) 1.

511. а) $(a+b)(c+d)-(a+c)(b+d)=(b-c)(d-a)$; б) $4ab$; в) -1; г) $-2b^3$; д) 0.

512. а) $ab-(c+di)(c-di)=ab-c^2-d^2$; б) $a^2+b^2+c^2+d^2$; в) 0; г) $(a-b)^2$.

513. Један начин је, на пример: а) $\begin{vmatrix} a & a \\ d & c \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

514. а) $x-4-8=0$. Решење је $x_1=12$. б) $x_1=2$; в) $x_{1,2}=\pm 2i$; г) $x_1=-1$, $x_2=2$; д) $x_1=-4$, $x_2=-1$; ђ) $x_1=-\dfrac{1}{6}$, $x_2=\dfrac{3}{2}$; е) $x_k=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; ж) $x_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.

515. а) Добијамо $3x-3-2x>0$, тј. $x>3$; б) $x>\dfrac{11}{3}$; в) $-3\le x\le 3$; г) $x<-1$ или $x>7$.

516. Користећи $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$, добија се $M_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}=-12$. Слично, према $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$ је $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 17 \end{vmatrix}=-48$.

517. а) Развијањем детерминанте по трећој врсти добија се:

$$D=8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}-9\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=8(12-5)-9(18-4)+7(15-8)=8\cdot 7-9\cdot 14+7\cdot 7=-21.$$

б) Ако првој врсти додамо елементе друге врсте помножене са три, а другој елементе треће врсте, добија се:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 11 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=11+28=39,$$

где је извршено развијање по елементима друге колоне.

в) Ако се детерминанта израчуна применом алгебарског кофактора $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ тада је:

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}=-2(35-32)=-6.$$

г) 0; д) −10; ђ) 144; е) 72; ж) −29; з) 0.

518. а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{matrix}=2\cdot 4\cdot 9+3\cdot 1\cdot 6+7\cdot 5\cdot 8-7\cdot 4\cdot 6-2\cdot 1\cdot 8-3\cdot 5\cdot 9=51$;

б) 0; в) 6.

519. а) $2a^2(a+x)$; б) $-x(x-1)^2$; в) $(a+1)(7+2a)^2$; г) a^3; д) a^3-3a+2; ђ) $3abc-a^3-b^3-c^3$.

520. а) -2; б) -2; в) $-2i$.

521. а) Добија се једначина $x^2-5x+6=0$ чија су решења $x_1=2$, $x_2=3$; б) $x_1=0$, $x_2=-2$; в) $x_1=-10$, $x_2=2$; г) $x_1=\frac{2}{3}$.

522. а) 1; б) $\sin(\beta-\alpha)$; в) $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$; г) $\sin 2\alpha$.

523. а) Како је коефицијент уз непознату x_2 једнак -1, елиминисаћемо непознату из друге једначине, тј.

$$\begin{aligned} 2x_1 - \ \ x_2 &= -5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= \ \ \ 3 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -5 \\ 7x_1 \qquad &= -7 \end{aligned}$$

одакле је $x_1=-1$ и $x_2=3$. Решење система је уређен пар $(-1,3)$, систем је дакле одређен.

б) „Маркираћемо" непознату x_2 у првој једначини система, тј. елиминисаћемо непознату x_2 из преосталих 5 једначина:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= \ \ \ 3 \\ 2x_1 - \ \ x_2 &= \ \ \ 0 \\ 3x_1 + \ \ x_2 &= \ \ \ 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= \ \ \ 8 \\ 4x_1 + \ \ x_2 &= \ \ \ 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ \ \ 3 \\ 3x_1 \qquad &= \ \ \ 3 \\ 2x_1 \qquad &= \ \ \ 2 \\ -x_1 \qquad &= -1 \\ 3x_1 \qquad &= \ \ \ 3 \\ 5x_1 \qquad &= \ \ \ 5 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 \qquad &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

У другом кораку маркирали смо непознату x_1 у другој једначини, па се систем свео на еквивалентан систем формата 3×2, у коме је једна од једначина нула једначина, па је можемо одбацити. Систем који смо добили је одређен, па је решење полазног система уређен пар $(1,2)$.

в) Како у датом систему имамо само једну једначину, систем је неодређен, па једну од непознатих можемо изабрати за слободну непознату. Нека је на пример $x_2=a$, $a\in\mathbf{R}$. Тада је $x_1=\frac{1}{2}(4+3x_2)=\frac{1}{2}(4+3a)$, па је опште решење система уређен пар $\left(\frac{1}{2}(3a+4),a\right)$.

г) Како је коефицијент уз непознату x_2 у првој једначини једнак -1, елиминисаћемо непознату x_2 из преосталих једначина. Множењем прве једначине са 2 и сабирањем тако добијене једначине са другом, а затим сабирањем прве и треће, добија се еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 5x_1 \qquad + 2x_3 &= \ \ \ 3 \\ 5x_1 \qquad + 5x_3 &= \ \ \ 0. \end{aligned}$$

Одузимањем друге једначине од треће, даље је

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 5x_1 \qquad + 2x_3 &= \ \ \ 3 \\ 3x_3 &= -3. \end{aligned}$$

У другом кораку маркирали смо непознату x_1 коју смо елиминисали из треће једначине, па је систем сведен на еквивалентан систем троугаоног облика. Систем је одређен и његово решење је уређена тројка $(1,0,-1)$.

д) Да бисмо елиминисали променљиву x_1 из друге и треће једначине, прву једначину ћемо помножити са -2, односно са -3, и тако добијене једначине сабрати са другом и трећом, па систем сводимо на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ -3x_2 + 7x_3 &= 7 \\ -3x_2 + 7x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Одузимање друге једначине од треће, систем сводимо на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ -3x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 0 &= 6. \end{aligned}$$

Пошто је једна једначина добијеног система противуречна, то је и систем противуречан, па је и полазни систем противуречан, тј. нема решења.

ђ) „Маркираћемо" непознату x_2 у првој једначини, па добијамо:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 + 3x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Даље је

$-2a$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_3 &= -3 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$x_2 = 3 + 2a - -3-3a$
$x_3 = a \quad x_2 = 6+5a$
$x_1 = -3-3a$

После маркирања непознате x_1 у другом систему, систем се своди на систем у којем је једна једначина *нула једначина*, па је можемо одбацити. Полазни систем се, дакле, своди на еквивалентан систем формата 2×3. Непознату x_3 бирамо за слободну непознату, нпр. са $x_3 = a$, $a \in \mathbf{R}$, па добијамо

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 + 2a \\ x_1 &= -3 - 3a. \end{aligned}$$

Ово је систем формата 2×2 у троугаоном облику чије је решење $(-3 - 3a, 5a + 6)$, па је опште решење полазног система $(-3 - 3a, 5a + 6, a)$.

е) Елиминисањем непознате x_2 из друге једначине полазни систем се своди на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Како је стварни формат система 2×3, изабраћемо непознату x_1 за слободну непознату, тј. $x_1 = a$, $a \in \mathbf{R}$, па добијамо систем у троугаоном облику

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 1 - a \\ x_3 &= 4(a - 1), \end{aligned}$$

чије је опште решење $(a, 7a - 7, 4a - 4)$, а то је и решење задатог система.

524. а) Применом елементарних трансформација полазни систем се своди на еквивалентан систем троугаоног облика

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Систем је одређен па има само тривијално* решење, тј. јединствено решење система је уређена тројка $(0, 0, 0)$.

---

* Систем хомогених линеарних једначина има само тривијално решење ако је детерминанта система различита од нуле. Реч *тривијалан* потиче од латинске речи *trivialis* – општепознат, обичан, свакидашњи.

б) Применом елементарних трансформација полазни систем своди се на еквивалентан систем облика

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Одбацивањем нула једначине и избором непознате x_1 за слободну ($x_1 = a$, $a \in \mathbf{R}$) добија се троугаони систем

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= -2a \\ x_3 &= -3a, \end{aligned}$$

чије је опште решење уређена тројка $(a, -7a, -3a)$. в) $(0,0,0)$.

525. а) $(13t, 2t, 7t)$, $t \in \mathbf{R}$; б) систем нема решења; в) $\left(\frac{3-t}{5}, \frac{1+t}{5}, \frac{t}{5}\right)$, $t \in \mathbf{R}$; г) $(1-p-2q, p, q)$, $p, q \in \mathbf{R}$; д) систем нема решења; ђ) $(p-1, p-1, p)$, $p \in \mathbf{R}$.

526. а) Ако прву једначину помножимо редома са $-1, 1, -2$ и тако помножену додамо редом другој трећој и четвртој једначини, добијамо

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 &= 11, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 &= -3, \\ 7x_1 + 4x_2 \qquad - 2x_4 &= -13, \\ -x_1 - 7x_2 \qquad + 5x_4 &= -35. \end{aligned}$$

Помножимо другу једначину са 7 и са -1 и додамо трећој и четвртој:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 &= 11, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 &= -3, \\ -3x_2 \qquad + 19x_4 &= -34, \\ -6x_2 \qquad + 2x_4 &= -32. \end{aligned}$$

Трећу једначину помножимо са -2 и додамо четвртој:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 &= 11, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 &= -3, \\ -3x_2 \qquad - 19x_4 &= -34, \\ -36x_4 &= 36. \end{aligned}$$

Из последње једначине добија се $x_4 = -1$. Сада се враћамо уназад. Из треће једначине добија се $x_2 = 5$, из друге $x_1 = -5$ и најзад из прве $x_3 = 1$. Дакле, решење система је $(-5, 5, 1, -1)$;

б) $\left(2, -3, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; в) систем нема решења; г) $(6 - 26p + 17q, -1 + 7p - 5q, p, q)$, $p, q, \in \mathbf{R}$.

527. а) Како је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -21, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 28,$$

то је $x_1 = D_1/D = 3$, $x_2 = D_2/D = -4$, па је решење система уређен пар $(3, -4)$.

б) $(0, -1)$. в) $(-2, -3)$.

528. а) Како је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 6,$$

следи да је $x = 5$, $y = 2$, $z = 6$, односно решење је $(5, 2, 6)$.

б) $(-23, 88, -29)$; в) $\left(\frac{4}{9}, \frac{19}{9}, \frac{20}{9}\right)$; г) $(3, 2, 1)$; д) $(7, 8, 9)$; ђ) $\left(-\frac{10}{3}, -3, -\frac{4}{3}\right)$.

529. *Први начин.* Како је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -12 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -12 & -3 \end{vmatrix} = -34, \qquad D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -12 \end{vmatrix} = 32,$$

решење је $x_1 = D_{x_1}/D = (-8)/(-2) = 4$, $x_2 = D_{x_2}/D = 17$, $x_3 = D_{x_3}/D = -16$.

Други начин. Прву једначину помножимо са -1, а другу са -2 и тако добијене једначине саберемо са другом и трећом, па добијамо:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -12 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -6x_2 - 5x_3 &= -22. \end{aligned}$$

Множењем друге једначине са -3 па сабирањем са трећом једначином добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_3 &= -16. \end{aligned}$$

Заменом у другу једначину добијамо $x_2 = 17$, а из прве $x_1 = 4$.

530. а) „Маркираћемо“ непознату x_2 у првој једначини, па систем сводимо на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ (\alpha - 4)x_1 \quad &= 0. \end{aligned}$$

За $\alpha \neq 4$ систем има троугаони облик, па је одређен и решење му је уређен пар $(0, 1)$. Ако је $\alpha = 4$ друга једначина система је нула једначина, па систем добија формат 1×2 и неодређен је. Опште решење система тада је $(a, 1 - 2a)$, $a \in \mathbf{R}$.

б) Применом Гаусовог поступка систем се своди на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= -1 \\ 0 &= \alpha + 2. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha = -2$ одбацивањем добијене нула једначине систем добија троугаони облик и његово решење је уређен пар $(1, -1)$. За $\alpha \neq -2$ последња једначина система је противуречна, па је и систем противуречан, тј. нема решења.

в) Применом Гаусовог поступка систем се своди на еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 5x_1 \qquad - x_3 &= 6 \\ (\alpha - 3)x_1 \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha \neq 3$ систем има троугаони облик, одређен је и има решење $(0, -5, -6)$. Ако је $\alpha = 3$ последња једначина система је нула једначина. Одбацивањем те нуле једначине и избором непознате x_1 за слободну добија се троугаони систем:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 1 + 2a \\ x_3 &= 5a - 6. \end{aligned}$$

Опште решење система је уређена тројка $(a, 7a - 5, 5a - 6)$, $a \in \mathbf{R}$.

г) Применом коначног броја елементарних трансформација на полазни систем, овај се своди на еквивалентан систем

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 \qquad - x_3 &= 6 \\ 0 &= \beta - 7. \end{aligned}$$

Ако је $\beta = 7$, последња једначина система је нула једначина. Одбацивањем те нула једначине и избором непознате $x_1 = a$ за слободну систем добија троугаони облик

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= -1 - 2a \\ x_3 &= 5a - 6, \end{aligned}$$

чије је опште решење $(a, 7a-5, 5a-6)$, $a \in \mathbf{R}$. Ако је $\beta \neq 7$ последња једначина система је противуречна, па је и систем противуречан.

д) Применом коначног броја елементарних трансформација систем се своди на еквивалентан систем

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_2 + \ x_3 &= 0 \\ (\alpha - 1)x_3 &= \beta + 3 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Одбацивањем нуле једначине систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_2 + \ x_3 &= 0 \\ (\alpha - 1)x_3 &= \beta + 3. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha \neq 1$ систем је одређен и има решење $\left(\frac{-3\alpha - 2\beta - 6}{\alpha - 1}, -\frac{\beta + 3}{\alpha - 1}, \frac{\beta + 3}{\alpha - 1}\right)$. Ако је $\alpha = 1$ и $\beta = -3$, последња једначина система је нула једначина. Избором непознате $x_2 = a$ за слободну добијамо опште решење $(2a-3, a, -a)$, $a \in \mathbf{R}$. Ако је $\alpha = 1$ и $\beta \neq -3$, последња једначина система је противуречна, па је и систем противуречан.

ђ) Ако је $\alpha \neq -3$ систем има формат 3×3 и одређен је. Решење је уређена тројка $\left(\frac{\beta - \alpha - 5}{\alpha + 3}, 1, \frac{\beta - 2}{\alpha + 3}\right)$. Ако је $\alpha = -3$ и $\beta = 2$ систем има формат 2×3 и опште решење је $(a-1, 1, a)$, $a \in \mathbf{R}$. За $\alpha = -3$ и $\beta \neq 2$ систем је противуречан.

е) Ако је $\alpha \neq -5$ систем има формат 3×4 и његово опште решење је

$$\left(\frac{a(35 - 3\alpha) - 5\beta - 25}{\alpha + 5}, \frac{(25 + 5\alpha)a - 4\beta - \alpha - 25}{\alpha + 5}, a, \frac{\beta - 5}{\alpha + 5}\right),$$

$a \in \mathbf{R}$. Ако је $\alpha = -5$ и $\beta = 5$ систем има формат 2×4. Опште решење је $\left(\frac{a + b + 4}{3}, \frac{5a - 4b - 1}{3}\right)$, $a, b \in \mathbf{R}$. Ако је $\alpha = -5$, $\beta \neq 5$ – нема решења.

531. Детерминанте система су

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Крамерова теорема у овом случају не даје никакав одговор о решењима система. Међутим, непосредном трансформацијом увиђамо да систем нема решења (противуречан је) јер је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3(x + 2y + 3z) &= 5 \end{aligned}$$

из кога би следило $1 = \frac{5}{3}$. Зато случај када је $D = 0$ у принципу увек треба решавати Гаусовим поступком.

532. а) $D = \begin{vmatrix} 2 & p \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4p = 4(3 - p)$. 1° Ако је $p \neq 3$, онда је $D \neq 0$ и систем има јединствено решење. 2° Ако је $p = 3$, онда је $D = 0$, па треба испитати D_1 и D_2.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & p \\ -q & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -q & 6 \end{vmatrix} = 3(q-2), \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -q \end{vmatrix} = 2(2-q).$$

2°1′ Ако је $q \neq 2$, онда је $D_1 \neq 0$ и $D_2 \neq 0$, па систем нема решења. 2°2′ Ако је $q = 2$, онда систем има бесконачно много решења.

б) Како је $D = 1 - 2a$, $D_1 = -7a$, $D_2 = a(5 - 3a)$, то је

$$x = -\frac{7a}{1-2a}, \quad y = \frac{a(5-3a)}{1-2a}, \qquad \text{за} \quad a \neq \frac{1}{2}.$$

Дакле, за $a \neq \frac{1}{2}$ систем је одређен и решење је уређен пар $\left(-\dfrac{7a}{1-2a}, \dfrac{a(5-3a)}{1-2a}\right)$. Ако је $a = \frac{1}{2}$ систем добија облик

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 3, \end{aligned} \quad \text{односно,} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 0 &= 7. \end{aligned}$$

Друга једначина система је противуречна па је и систем противуречан.

в) Како је $D = m - 2$, $D_1 = -1$, $D_2 = 2m - 2$, то је за $m \neq 2$ систем одређен, па је решење $\left(-\dfrac{1}{m-2}, \dfrac{2(m-1)}{m-2}\right)$.

г) Како је $D = -2mn$, $D_1 = -2m^2n$, $D_2 = -2mn^2$, то је за $m \neq 0$ и $n \neq 0$ систем одређен и има решење (m, n). Ако је $m = 0$ и $n \neq 0$ систем добија облик

$$\begin{aligned} ny &= n^2 \\ -ny &= -n^2, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} y &= n \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

па је решење свака уређена двојка (a, n), где је $a \in \mathbf{R}$. Аналогно за $m \neq 0$ и $n = 0$ решење је свака уређена двојка (m, b), где је $b \in \mathbf{R}$. Ако је $m = 0$ и $n = 0$ систем се своди на две нуле једначине, па је решење свака уређена двојка (p, q), где су p и q реални бројеви.

д) Како је $D = bc(b - c)$, $D_1 = c(b - c)^2$, $D_2 = b(c^2 - b^2)$, то је за $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ систем одређен и има решење $\left(\dfrac{b-c}{b}, \dfrac{b+c}{c}\right)$. Ако је $b = c \neq 0$ систем добија облик:

$$\begin{aligned} bx - by &= 2b \\ b^2x - b^2y &= 2b^2, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} bx - by &= 2b \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

па је опште решење система уређен пар $(a + 2, a)$, $a \in \mathbf{R}$. Ако је $b = c = 0$ систем се своди на две нуле једначина, па је решење система сваки уређен пар (m, n), $m, n \in \mathbf{R}$.

533. а) Како је $D = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$, $D_1 = (\alpha - 1)^2$, $D_2 = (\alpha - 1)^2$, $D_3 = (\alpha - 1)^2$, то је

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{D_i}{D} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha+2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

за $\alpha + 2 \neq 0$ и $\alpha - 1 \neq 0$. Дакле, ако је $\alpha \neq -2$ и $\alpha \neq 1$ систем је одређен и решење је уређена тројка $\left(\dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}\right)$. Ако је $\alpha = 1$ систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0\,, \end{aligned}$$

па је, ако су x_2 и x_3 слободне непознате ($x_2 = a$, $x_3 = b$, $a, b \in \mathbf{R}$) опште решење система $(1 - a - b, a, b)$. Ако је $\alpha = -2$ систем добија облик

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 \qquad + 3x_3 &= 3 \\ 0 &= 3\,. \end{aligned}$$

Пошто је последња једначина овог система противречна, то је и систем противречан.

б) Како је $D = (a-4)(a+3)$, $D_1 = -(a+3)$, $D_2 = a+3$, $D_3 = 6(a+3)(a-4)$, за $a \neq 4$ и $a \neq -3$ систем је одређен и решење је уређена тројка $\left(-\dfrac{1}{a-4}, \dfrac{1}{a-4}, 6\right)$. Ако је $a = 4$ систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 13\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ x_1 + x_2 \qquad &= -\tfrac{1}{3} \\ 0 &= \tfrac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Пошто је последња једначина система противречна, то је и систем противречан. Ако је $a = -3$, систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 &= 13\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -4x_1 + 3x_2 \qquad &= -1 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Одбацивањем нула-једначине и избором непознате $x_1 = a$ за слободну, добија се опште решење система $\left(a, \frac{1}{3}(4a-1), \frac{1}{3}(19-7a)\right)$, $a \in \mathbf{R}$.

в) Како је $D = 2(\alpha - 1)$, $D_1 = -1$, $D_2 = 3(2\alpha - 1)$, $D_3 = 3\alpha - 1$, то је за $\alpha \neq 1$ систем одређен и има решење $\left(-\dfrac{1}{2(\alpha-1)}, \dfrac{3(2\alpha-1)}{2(\alpha-1)}, \dfrac{3\alpha-1}{2(\alpha-1)}\right)$. Ако је $\alpha = 1$ систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 0 &= 1\,. \end{aligned}$$

Како је последња једначина овог система немогућа, то систем нема решења.

г) Како је $D = 2a(a-1)$, $D_1 = a(2a-3)$, $D_2 = a(2a-1)$, $D_3 = a(2-a)$, то је за $a \neq 0$ и $a \neq 1$ систем одређен и решење је $\left(\dfrac{2a-3}{2(a-1)}, \dfrac{2a-1}{2(a-1)}, \dfrac{2-a}{2(a-1)}\right)$. Ако је $a = 0$ систем добија облик

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Одбацивањем нула-једначине и избором $x_1 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, за слободну, а x_2 и x_3 за везане добија се опште решење $\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1-2\alpha)\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Дакле, за $a = 0$ систем је неодређен. Ако је $a = 1$ систем добија облик

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= 1\,, \end{aligned} \quad \text{односно} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ 0 &= 1\,, \end{aligned}$$

па је систем противречан.

д) Систем је одређен за $a \neq \frac{4}{5}$, немогућ за $a = \frac{4}{5}$.

ђ) Систем је одређен за $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -3$. За $\alpha = 0$ и $\alpha = -3$ систем је противречан.

е) За $ab \neq -14$ систем је одређен, за $a = 2$ и $b = -7$ неодређен, за $ab = -14$, $a \neq 2$ или $b \neq -7$ систем је немогућ.

ж) Систем је одређен за $c \neq 0$ и $a \neq 1$, неодређен за $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$, немогућ за $c = 0$ и $a = 1$.

з) Систем је одређен за $ab \neq 12$, неодређен за $a = 3$ и $b = 4$, немогућ за $ab = 12$, $a \neq 3$ и $b \neq 4$.

и) Како је $D = abc - a - b - c + 2$, $D_1 = (b-1)(c-1)$, $D_2 = (a-1)(c-1)$, $D_3 = (a-1)(b-1)$, то је

$$x_1 = \frac{(b-1)(c-1)}{D}, \quad x_2 = \frac{(a-1)(c-1)}{D}, \quad x_3 = \frac{(a-1)(b-1)}{D}$$

за $a \neq 1$, $b \neq 1$ и $c \neq 1$. Тада је систем одређен. Ако је $b = c = 1$ и $a \neq 1$, систем добија облик

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned} \qquad \text{односно} \qquad \begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

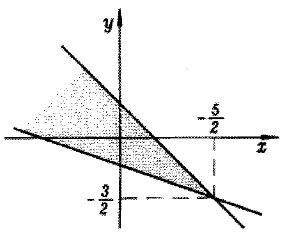
па је систем одређен са општим решењем $(0, 1-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Аналогно, за $a = b = 1$, $c \neq 1$ систем је неодређен са општим решењем $(1-\beta, \beta, 0)$, $\beta \in \mathbf{R}$ и за $a = c = 1$, $b \neq 1$, опште решење је $(\gamma, 0, 1-\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}$. Ако је $a = b = c = 1$ систем добија облик

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

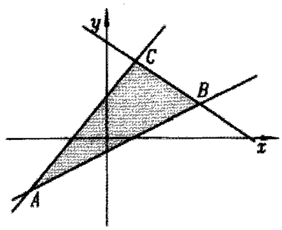
дакле, неодређен је и има опште решење $(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, где су α и β реални бројеви.

534. а) Из прве неједначине је $x \geq -3y - 2$, а из друге $x \leq -y + 1$, па је (видети слику) $-3y - 2 \leq x \leq 1 - y$. Приметимо да је $y \geq -\frac{3}{4}$ из $-3y - 2 \leq 1 - y$.

б) $2 - x \leq y \leq 2x + 1$ и $x \geq \frac{1}{3}$. в) $x \geq \max\{y - 7, 3y + 2\}$.



Сл. уз зад. 534



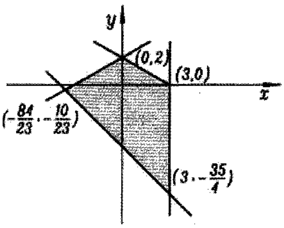
Сл. уз зад. 535

535. Једноставно се одреде координате темена троугла $A(-2,-1)$, $B(4,1)$, $C(1,3)$. Заменом координата тачке C у једначину праве AB: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ добијамо да је тачка C „изнад" праве AB (видети слику). На исти начин тачка B је „испод" праве AC и тачка A „испод" праве BC. Дакле, унутрашњу област троугла одређује следећи систем неједнакости: $x - 3y - 1 < 0$, $2x + 3y - 11 < 0$, $4x - 3y + 5 > 0$.

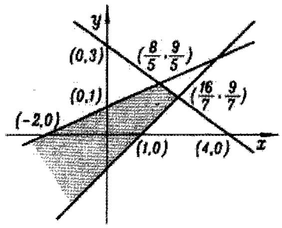
536. а) Решење је осенчена област на слици. б) Решење је осенчена област на слици. в) Систем нема решења.

537. а) За $x \geq 0$, $y \geq 0$ имамо $y \leq 1 - x$ и за $x \leq 0$, $y = 0$ је $y \leq 1 + x$; за $x \leq 0$, $y \leq 0$ је $y \geq 1 - x$; за $x \geq 0$, $y \leq 0$ је $y \geq -1 + x$. Област тачака за чије координате важи $|x| + |y| \leq 1$ приказана је на слици.

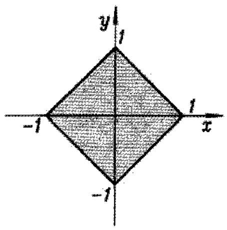
б), в), г) — видети одговарајуће слике.



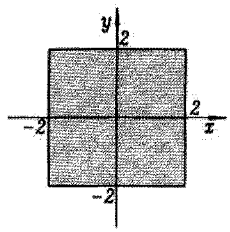
Сл. уз зад. 536 а)



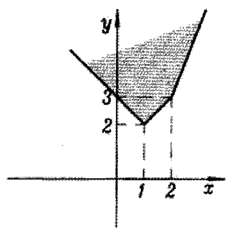
Сл. уз зад. 536 б)



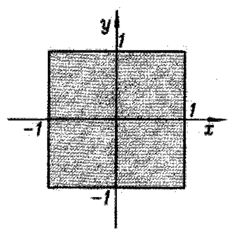
Сл. уз зад. 537 а)



Сл. уз зад. 537 б)



Сл. уз зад. 537 в)



Сл. уз зад. 537 г)

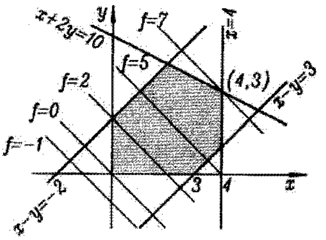
538. Скуп допустивих решења шрафиран је на слици. Функција циља је $f(x,y)$. Од свих правих фамилије $f(x,y)=c$ које секу скуп допустивих решења треба одредити оне c код којих је c максимално, односно минимално. Када c расте, график праве $x+y=c$ се транслаторно помера слева на десно. Максимум функције се достиже када права $x+y=c$ садржи тачку $(4,3)$. Тада је $\max c = 7$. Минимум се достиже кад права $x+y=c$ садржи тачку $(0,0)$, па је $\min c = 0$.

539. Скуп допустивих решења скициран је на слици. Функција f_1 има најмању вредност $\min f_1 = 2$ за $x=2$, $y=0$, док највећу вредност нема. Слично се закључује да функција f_2 нема најмању вредност, а да је највећа вредност $\max f_2 = 3$ за $x=0$, $y=3$.

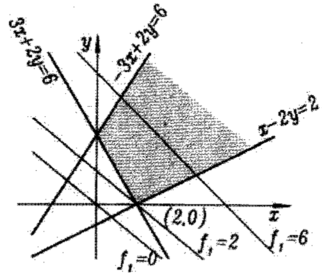
540. Оптимално решење је $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ у тачки $A(1,2)$ пресека правих $x+y=3$ и $y=2$ (видети слику). Минимална вредност функције f је $f_0 = 2x_0 + y_0 = 4$.

541. Допустив скуп приказан је на слици. Како је $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,6)$, $C(4,7)$, $D(0,7)$, то је $\max f = 11$ за $x=5$, $y=6$ или $x=4$, $y=7$ и све остале тачке дужи BC. Ове тачке могу се описати са $(x,y)=(5-t, 6+t)$, $0 \le t \le 1$.

542. Нека је x_1 број израђених јединица модела M на дан, а x_2 број израђених јединица модела N на дан. То значи да је зарада $300x_1 + 500x_2$. Осим овога треба да буде

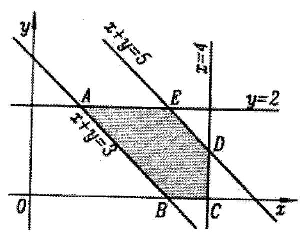


Сл. уз зад. 538

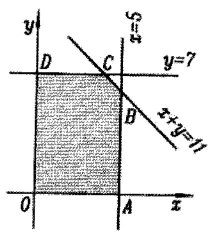


Сл. уз зад. 539

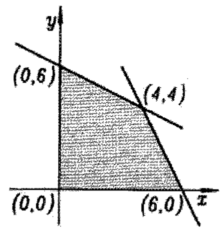
$2x_1 + 4x_2 \leq 24$, $4x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Решење система неједначина је конвексни четвороугао на слици. Екстремалне вредности су у теменима четвороугла. Функција $f(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$ у теменима има вредности: $f(0,0) = 0$, $f(6,0) = 1800$, $f(4,4) = 3200$, $f(0,6) = 3000$. Дакле, оптимум је постигнут у тачки $(4,4)$. Значи да се највећа зарада од 3200 динара постиже ако машина P дневно изради 4 комада робе M, а машина Q — 4 комада робе N.



Сл. уз зад. 540



Сл. уз зад. 541



Сл. уз зад. 542

543. Означимо за x и y непознату количину нафте A у милионима барела која ће бити прерађена I, односно II процесом. Процес I захтева да се од нафте B употреби такође x милиона барела, док за процес II од нафте типа B треба $\frac{3}{5}y$ милиона барела. При овоме важе ограничења:

$$(1)\quad x + y \leq 8, \qquad (2)\quad x + \tfrac{3}{5}y \leq 5, \qquad (3)\quad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Процесом I добија се по x милиона барела бензина и лож уља, а процесом II $\frac{3}{8}\left(y + \frac{3}{5}y\right)$ милиона барела бензина и $\frac{4}{8}\left(y + \frac{3}{5}y\right)$ милиона барела лож-уља. Укупна зарада у милионима долара је

$$f = 4x + 3x + 4 \cdot \frac{3y}{5} + 3 \cdot \frac{4y}{5} = 7x + \frac{24}{5}y.$$

Налазимо да је зарада највећа у тачки пресека правих $x + y = 8$ и $x + \frac{3}{5}y = 5$, тј. за $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{15}{2}$ и једнака је $f\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right) = \frac{79}{2}$.

544. Нека је x_1 број артикала A_1, а x_2 број артикала A_2. Потребно је $2x_1 + 3x_2$ јединица сировине S_1, чија је резерва 19, па је $2x_1 + 3x_2 \leq 19$. Слично, $2x_1 + x_2 \leq 13$, $3x_2 \leq 15$, $3x_1 \leq 18$. Зарада је $f = 7x_1 + 5x_2$. Добија се да је $\max f = 50$ за $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

Глава V – Вектори

545. а) Вектор $\overrightarrow{AB}$ има координате $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-3, -4)$, дужина вектора $\overrightarrow{AB}$ је $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+16} = 5$, што представља тражену дужину дужи AB. б) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$. в) $\overrightarrow{AB} = (5, 5)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$.

546. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (2-4, 4-1, -2-6) = (-2, 3, -8)$.

547. Тачке A и B имају исте координате као вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

548. Како је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, где је O координатни почетак, биће $x\vec{i} + y\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - (\vec{i} - 2\vec{j})$, односно $x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, тј. $x = 2$, $y = 4$ и $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$. Како је $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, то је $\overrightarrow{BA} = (-2, -4)$.

549. Вектор $\overrightarrow{AB}$ има координате $(1, -4, -1)$, а вектор $\overrightarrow{CD} = (-2, 5, -3)$, па је: а) $\vec{m} = (-1, 1, -4)$; б) $\vec{n} = (3, -9, 2)$.

550. а) Како је $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то је $x\vec{i} + y\vec{j} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) + (3\vec{i} - \vec{j}) = 5\vec{i} - 4\vec{j}$, па је $\vec{c} = (5, -4)$; б) $\vec{c} = (-1, -2)$.

551. $\overrightarrow{AB} = (1, -4)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, 5)$, па је: а) $\vec{m} = (-1, 1)$; б) $\vec{n} = (3, -9)$.

552. $\vec{p} = (2, 4)$, $\vec{q} = (4, 0)$, $\vec{m} = (-5, 2)$, $\vec{n} = (-4, 7)$, $\vec{r} = \left(7, \frac{11}{2}\right)$.

553. Како је $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$, то је $\overrightarrow{AM_1} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Даље је $\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_2} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$ и $\overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

554. $|\vec{m}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 5$; $|\vec{n}| = 1$; $|\vec{p}| = \sqrt{10}$; $|\vec{q}| = 2\sqrt{5}$.

555. а) $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$; б) 11; в) 45; г) 53.

556. а) $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$; б) $|\vec{a} + \vec{b}| = 11$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

557. $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$, $|\vec{b}| = 10$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4\sqrt{3}$.

558. Нека је $A(0, 0, z)$. Како је $|\overrightarrow{AM}| = 3$, то је $\sqrt{2^2 + 2^2 + (4-z)^2} = 3$, односно $(z-4)^2 = 1$, па је $z = 3$ или $z = 5$. Дакле, постоје две овакве тачке $A_1(0, 0, 3)$ и $A_2(0, 0, 5)$.

559. $B(3, 2, 6)$, $C(4, -3, 9)$, $D(3, -6, 8)$, $T(3, -2, 7)$.

560. Из $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ добијамо $x - 1 = 6 - 3$, $y + 2 = 4 - 2$, $z - 3 = 4 - 1$, где је $D(x, y, z)$. Непосредно се добија да је $D(4, 0, 6)$.

561. Како је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 3\vec{k} + 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$, теме C има координате $C(7, 3, 8)$. Даље, имамо да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 3\vec{k} - (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, па је дужина странице AB дата са $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

562. Како је $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$, биће $\overrightarrow{a_0} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\overrightarrow{b_0} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{p_0} = (1, 0)$, $\overrightarrow{q_0} = (0, -1)$.

563. $\vec{a} + \vec{b} = (2, 3) + (-1, 2) = (1, 5)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$. Јединични вектор је: $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{26}}, \dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)$; $\vec{a} - \vec{b} = (3, 1)$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$; $\overrightarrow{e_3} = \dfrac{3\vec{a} + 4\vec{b}}{|3\vec{a} + 4\vec{b}|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{293}}, \dfrac{17}{\sqrt{293}}\right)$.

564. а) $(6, -7)$; б) $(-6, -5)$; в) $-5, 5$.

565. а) $\vec{x} = (0,1,2)$; б) $\vec{x} = (1,2,3)$.

566. Нека је $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Тада је $9\vec{i} + \vec{j} = (2\vec{i} + \vec{j}) + \beta\vec{i}$, односно $9\vec{i} + \vec{j} = (2\alpha + \beta)\vec{i} + \alpha\vec{j}$, одакле је $\alpha = 1$, $\beta = 7$, па је $\vec{m} = \vec{a} + 7\vec{b}$.

567. Како је $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, то је $\vec{p} = (3 + 1 - 1, -1 - 2 + 7)$, тј. $\vec{p} = (3,4)$, па је $\vec{p} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(3\vec{i} - \vec{j}) + \beta(\vec{i} - 2\vec{j})$ и $3\vec{i} + 4\vec{j} = (3\alpha + \beta)\vec{i} + (-\alpha - 2\beta)\vec{j}$, одакле је $\alpha = 2$ и $\beta = -3$, тј. $\vec{p} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

568. $x = 4$, $y = 5$, $z = 1$.

569. Пројекције на координатне осе су координате вектора: а) $(1,-1,6)$; б) $(5,-3,6)$; в) $(6,-4,12)$; г) $\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$; д) $(0,-1,12)$; ђ) $\left(3,-\frac{5}{3},2\right)$.

570. а) Нека је $B(p,q)$. Тада је $\overrightarrow{AB} = (p-1, q+1)$, па је $p - 1 = 8$ и $q + 1 = -6$, тј. $p = 9$, $q = -7$. Значи, $B(9,-7)$. б) $B(-15,11)$. в) $B_1(-3,2)$, $B_2(5,-4)$.

571. $\overrightarrow{AA_1} = (3,4,-3)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0,-5,-3)$, $\overrightarrow{CC_1} = (-3,1,0)$.

572. а) Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно независни, па се $\vec{c}$ може на јединствен начин представити као линеарна комбинација вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (2\alpha, -3\alpha) + (\beta, 2\beta) = (2\alpha + \beta, -3\alpha + 2\beta)$, одакле је $2 = a + \beta = 9$, $-3\alpha + 2\beta = 4$, па је $\alpha = 2$, $\beta = 5$. Значи, $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$. б) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.; в) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

573. а) $\vec{b} = 2\vec{a}$; б) $\vec{b} = 3\vec{a}$; в) $\vec{a} = -4\vec{b}$.

574. а) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$; б) $\vec{c} = -5\vec{a} - 2\vec{b}$; в) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

575. а) Линеарно независан; б) линеарно зависан; в) линеарно независан; г) линеарно зависан.

576. а) Неопходан и довољан услов да вектори $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ буду линеарно зависни (колинеарни) јесте да су њихове координате пропорционалне. У случају да су вектори $\overrightarrow{a_1} = (x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{a_2} = (x_2, y_2)$ дводимензионални, ово се помоћу детерминанте може записати у облику: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$. Једноставно се проверава услов: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 0$.

б) Имамо да је $\overrightarrow{AB} = (8,-6)$, $\overrightarrow{CD} = (12,9)$, а $\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -12 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

в) Неопходан и довољан услов компланарности (линеарне зависности) три тродимензионална вектора $\overrightarrow{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\overrightarrow{a_3} = (x_3, y_3, z_3)$ је $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

Овде се једноставно проверава да је $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

577. а) Како је $\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 2\lambda \neq 0$ за $\lambda \neq 9$, то је дати скуп вектора линеарно независан за $\lambda \neq 9$; б) $\lambda \neq 12$; в) ни за једну вредност λ.

578. Како су вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$ колинеарни, то је $\vec{p} = \lambda\vec{q}$, тј. $\vec{a} + \alpha\vec{b} = \lambda(\vec{a} + 2\vec{c})$. За дате координате вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је $\vec{p} = (2 + \alpha)\vec{i} + (3 - 3\alpha)\vec{j}$ и $\vec{q} = 0\vec{i} + 9\vec{j}$, одакле је $(\alpha + 2)\vec{i} + (3 - 3\alpha)\vec{j} = \lambda(0\vec{i} + 9\vec{j})$, па је $\alpha + 2 = 0$ и $3 - 3\alpha = 9\lambda$, одакле је $\alpha = -2$ и $\lambda = 1$. Резултат: $\alpha = -2$.

579. а) Како је $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно независни. Из $\alpha\vec{a} +$

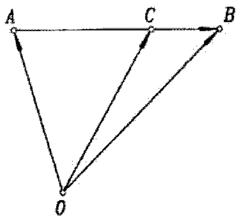
$\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{d}$ налазимо: $3\alpha-\beta+2\gamma=11$, $-2\alpha+\beta+\gamma=-6$, $\alpha-2\beta-3\gamma=5$, одакле добијамо $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=1$, па је $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$.

580. Ако је $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\overrightarrow{0}$ тражена линеарна зависност, онда је

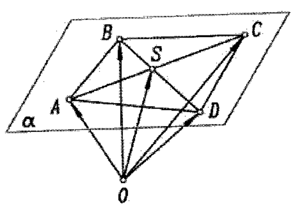
$$(\alpha+\beta-\gamma)\overrightarrow{p_1}+(\alpha-2\beta+4\gamma)\overrightarrow{p_2}=0.$$

Како су $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ линеарно независни вектори, биће $\alpha+\beta-\gamma=0$ и $\alpha-2\beta+4\gamma=0$. Питање одређивања коефицијената ове линеарне комбинације своди се на решавање једног хомогеног линеарног система формата 2×3 који увек има нетривијална решења. Опште решење система је уређена тројка $(-2m,5m,m)$, $m\in\mathbf{R}$; тражена линеарна зависност је $2\vec{a}-5\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{0}$.

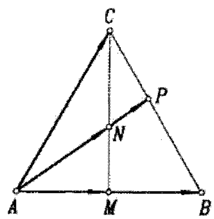
581. Нека су A, B и C три тачке исте праве и O произвољна тачка (в. слику). Тачка C може бити унутрашња и спољашња тачка дужи AB. Како је $AC:CB=m:n$, то је $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$, односно, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{m}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$, одакле је $\overrightarrow{OC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$. Из $m:n=\lambda$ добијамо другу варијанту изведене формуле: $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$.



Сл. уз зад. 581



Сл. уз зад. 583



Сл. уз зад. 584

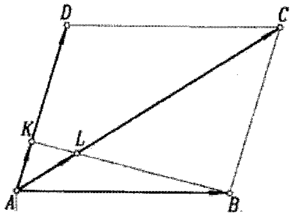
582. Да је услов неопходан види се непосредно на основу задатка 581, стављањем $\frac{m}{m+n}=t$. Тада је $\frac{n}{m+n}=1-t$ и $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$. Даље треба доказати да је услов и довољан. Једнакост $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ може се написати у облику $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, односно $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$, одакле произлази колинеарност тачка A,B,C. *Напомена.* Наведени услов може се написати и на следећи симетричан начин: $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, $\alpha+\beta=1$.

583. Нека су тачке A,B,C,D компланаране и тачке A, B и C неколинеарне (в. слику) и нека је $AC\cap BD=\{S\}$, па је, према задатку 581, $\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OS}=(1-p)\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OD}$, одакле је $(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}=(1-p)\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OD}$, односно $\overrightarrow{OD}=\frac{1-t}{p}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{p}\overrightarrow{OC}-\frac{1-p}{p}\overrightarrow{OB}$. Како је $\frac{1-t}{p}+\frac{t}{p}-\frac{1-p}{p}=1$, то је $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, где је $\frac{1-t}{p}=\alpha$, $\frac{t}{p}=\beta$, $\frac{1-p}{p}=\gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma=1$.

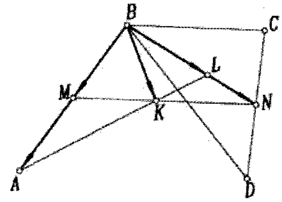
584. Како је N средиште дужи CM, то је $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (в. слику). Вектори $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AP}$ су колинеарни, па се може написати $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, па је $\lambda\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, одакле је $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC}$. Како су тачке C,P,B колинеарне, то је $\frac{1}{4\lambda}+\frac{1}{2\lambda}=1$, $\lambda=\frac{3}{4}$ и $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, одакле следи $BP:PC=2:1$.

585. Погледати решење 584. задатка. Резултат: $AS:SP=9:2$, $CS:SQ=8:3$.

586. а) Како је $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (в. слику), то је $5\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, односно $5\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$. Како је $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$, то су тачке K, L и B колинеарне и $KL:LB=1:4$. б) Погледати решење под а).



Сл. уз зад. 586



Сл. уз зад. 587

587. Пошто је K средиште дужи MN (в. слику) биће $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BL}$, јер је $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BL}$. Како је $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, то су тачке A, K и L колинеарне и $AK : KL = 3 : 1$.

588. Означимо угао између вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са α. Тада је $\cos\alpha = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\,|\vec{q}|}$. Израчунаћемо најпре дужине вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7, \quad \text{јер је } \vec{a}\cdot\vec{b} = \tfrac{3}{2}$$

$$\vec{q}\cdot\vec{q} = |\vec{q}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1,$$

па је $|\vec{p}| = \sqrt{7}$, $|\vec{q}| = 1$. Даље је $\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 2$, па је $\cos\alpha = 2/\sqrt{7}$.

589. а) -6; б) 9; в) 16; г) 13; д) -61; ђ) 37; е) 73.

590. Како је $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 6$, $\vec{c}\cdot\vec{a} = 12$, биће $|\vec{p}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = 100$, одакле је $|\vec{p}| = 10$.

591. Како је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то је $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{2}$.

592. Вектори су нормални међу собом ако је њихов скаларни производ једнак нули, односно ако је $(\vec{a}+\alpha\vec{b})\cdot(\vec{a}-\alpha\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \alpha^2|\vec{b}|^2 = 9 - 25\alpha^2 = 0$, тј. за $\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

593. Како су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ јединични узајамно нормални вектори, то је $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$, $|\overrightarrow{u}| = 1$, $|\overrightarrow{v}| = 1$, па је $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\cdot(3m\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) = 6m + 2$. Да би вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ били узајамно нормални треба да је $6m + 2 = 0$, тј. $m = -\frac{1}{3}$.

594. а) Из $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ имамо $(\vec{m}+2\vec{n})\cdot(3\vec{m}-x\vec{n}) = 0$, односно $3|\vec{m}|^2 + (6-x)|\vec{m}|\,|\vec{n}|\cdot\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) - 2x|\vec{n}|^2 = 0$, тј. $3 + 6 - x - 8x = 0$, па је $x = 1$.; б) $x = 2$.

595. Из $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$ добијамо

$$(x+3)(x-2) + x(x+2)(x+3) + (x+3)(x+2) = 0, \quad \text{тј.}$$

$$(x+3)(x-2+x(x+2)+x+2) = 0, \quad \text{односно} \quad x(x+3)(x+4) = 0.$$

1° Ако је $x = 0$, биће $\overrightarrow{u} = (3,0,3)$, $\overrightarrow{v} = (-2,3,2)$. 2° Ако је $x = -3$, биће $\overrightarrow{u} = (0,3,0)$, $\overrightarrow{v} = (-5,0,-1)$. 3° Ако је $x = -4$, биће $\overrightarrow{u} = (-1,8,-1)$, $\overrightarrow{v} = (-6,-1,-2)$.

596. а) Како је $|\vec{c}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot5\cos120° + 5^2 = 49$, то је $|\vec{c}| = 7$. б) $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}} = 2$.

597. $|\vec{a}+\vec{b}| = 15$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{593}$.

598. Из $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$ налазимо да је $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

599. Из $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}$, тј. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}$ имамо $-2\lambda + 3 = \frac{1}{3}(2\lambda + 7)$, одакле је $\lambda = \frac{1}{4}$. Тада је $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{29}/4$.

$x - 2 + x^2 + 2x + x + 2$

$x^2 + 4x$

$= x(x+4)(x+3) = 0$

600. Имамо да је $|\vec{a}|^2 = (2\vec{m}+4\vec{n})\cdot(2\vec{m}+4\vec{n}) = 4+16\vec{m}\cdot\vec{n}+16 = 20+16\cos 120^\circ = 12$, тј. $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ и $|\vec{b}|^2 = (\vec{m}-\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n}) = 1-2\vec{m}\cdot\vec{n}+1 = 2-2\cos 120^\circ = 3$, тј. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Како је $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{m}+4\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n}) = 2|\vec{m}|^2+2\vec{m}\cdot\vec{n}-4|\vec{n}|^2 = -3$, то је $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = -\dfrac{1}{2}$ и $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ$.

601. а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2 = 1\cdot(-1)+2\cdot 3 = 5$; б) -7; в) -3; г) 0.

602. а) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{0}{2\cdot 1} = 0$, одакле следи да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ узајамно нормални, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\varphi = 1$, тј. $\varphi = 0$ -- вектори су колинеарни; в) $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

603. а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4+3\cdot 1+(-1)\cdot 5 = 6$; б) $\vec{a}\cdot b = -1$; в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 22$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

604. а) Како је $\overrightarrow{AB} = (-2,6)$ и $\overrightarrow{AC} = (-3,-1)$ биће $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, па је $\angle BAC = 90^\circ$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, па је $\angle ABC = 90^\circ$; в) $\angle ABC = 90^\circ$.

605. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -11$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$, па је $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = -\dfrac{11}{\sqrt{13}}$ и $\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a} = -\dfrac{11}{\sqrt{10}}$.

606. Како је $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot\mathrm{pr}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{CD})$, то је $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{CD}) = -6$.

607. $-22/\sqrt{133}$.

608. $\vec{p}\cdot\vec{q} = (3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+5\vec{b}) = 13$, $|\vec{p}|^2 = (3\vec{a}+2\vec{b})^2 = 13$, $|\vec{q}|^2 = (\vec{a}+5\vec{b})^2 = 26$, јер је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, одакле је $|\vec{p}| = \sqrt{13}$ и $|\vec{q}| = \sqrt{26}$, па је $\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\,|\vec{q}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, односно $\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

609. $\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

610. $\overrightarrow{AC} = (4,4)$, $\overrightarrow{BD} = (-3,3)$. Како је $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ праве AC и BD су нормалне међу собом.

611. а) Како је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}-(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}) = 2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB} = -2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ имамо

$$\cos\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{2\cdot(-2)+2\cdot 4+4\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2}} = \frac{1}{2},$$

па је $\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = 60^\circ$; б) $\cos\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = -\dfrac{20}{\sqrt{1947}}$; в) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{234}}$.

612. а) Како је $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, где је O координатни почетак, то је $D(8,3)$; б) $\overrightarrow{AB} = (-3,-3)$, $\overrightarrow{BC} = (3,-3)$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{18}$ па је паралелограм $ABCD$ једнакостраничан, осим тога је $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, па је то правоугли једнакостранични паралелограм, а то је квадрат.

613. Како је $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, односно $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 0$, онда је $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

614. $\vec{a}\cdot\vec{p} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 0$, па је $\vec{a}$ нормално на $\vec{p}$.

615. а) $3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2+9\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c} = 3|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}-2\cdot 25+9|\vec{a}|\,|\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}-2|\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3} = 0-50+9\cdot 3\cdot 8\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = -62$; б) 162; в) 373.

616. Како је $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$, биће $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(b^2+ab\cos\angle(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}))$. По косинусној теореми је

$$\cos\angle(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\ \text{па је}\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(b^2+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) = \frac{a^2+3b^2-c^2}{4}.$$

a^2

617. *Прво решење*: Ако је $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{0}$, тада је $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}=0$, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{c}=0$, одакле је $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-16$, $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1$. Сабирањем наведених једнакости добија се $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-26$, односно $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-13$.

Друго решење: Ако је $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{0}$, тада је и $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=0$, односно $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, одакле је $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=-\frac{1}{2}(9+1+16)=-13$.

618. Како је $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{0}$, можемо сматрати да су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектори страница неког једнакостраничног троугла. Према томе, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\angle(\vec{c},\vec{a})=120^\circ$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 120^\circ+|\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos 120^\circ+|\vec{c}|\,|\vec{a}|\cos 120^\circ=-\frac{3}{2}$.

619. а) Из $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$ и $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$, добија се $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$ и $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$; б) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

620. $|\vec{a}\times\vec{b}|=3\sqrt{2}$.

621. $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})=-5\vec{a}\times\vec{b}=5\vec{b}\times\vec{a}$, јер је $2\vec{a}\times\vec{a}=\overrightarrow{0}$ и $-2\vec{b}\times\vec{b}=\overrightarrow{0}$, па је $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=5|\vec{b}|\,|\vec{a}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=15$, односно $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=15\overrightarrow{w}$, где је $\overrightarrow{w}$ јединични вектор нормалан на раван коју образују вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$.

622. а) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\left(1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$; б) $\overrightarrow{0}$.

623. а) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где је $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{3}{5}$, па је $\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$ и $|\vec{a}\times\vec{b}|=16$.

б) Како је $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, то је $\sin\varphi=\frac{5}{13}$, па је $\cos\varphi=\frac{12}{13}$ или $\cos\varphi=-\frac{12}{13}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, тј. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{240}{13}$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{240}{13}$.

624. $P=100\sqrt{2}$.

625. С обзиром да користимо десни (позитивни) триедар ових вектора и да су два по два од њих узајамно нормални, а на основу дефиниције векторског производа, имамо:

$$\begin{array}{lll}
\vec{i}\times\vec{i}=\overrightarrow{0}, & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\\
\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{j}=\overrightarrow{0}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\\
\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{k}=\overrightarrow{0}.
\end{array}$$

626. а) $[(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{i}]\times\vec{i}=(\vec{k}\times\vec{i})\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$; б) $2(\vec{k}-\vec{i})$.

627. *Први начин*: Како је $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}6&3&1\\3&6&1\\1&8&1\end{vmatrix}=0$, дати вектори су компланарни.

Други начин: Из $\vec{a}\times\vec{b}=(6\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k})\times(3\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k})=-3\vec{i}+3\vec{j}+27\vec{k}$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(-3\vec{i}+3\vec{j}+27\vec{k})\cdot(\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k})=0$, следи да су дати вектори компланарни.

628. Како је $\vec{a}\times\vec{b}=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}$, а $\vec{r}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, то је $\vec{r}=(-3\lambda,-12\lambda,4\lambda)$. Из $|\vec{r}|=\sqrt{9\lambda^2+144\lambda^2+16\lambda^2}=26$ налазимо $\lambda=2$ или $\lambda=-2$. С друге стране $\vec{r}\cdot\vec{j}=-12\lambda<0$ (јер је угао између $\vec{r}$ и Oy осе туп), па је $\lambda>0$. Дакле, $\lambda=2$, па је $\vec{r}=(-6,-24,8)$.

629. Из услова $\vec{r}=\lambda(\vec{a}\times\vec{k})$, $|\vec{r}|=51$ и $\vec{r}\cdot\vec{i}>0$ налазимо $\vec{r}=(45,24,0)$.

630. Постоје два оваква вектора: $\vec{r_1}=\left(\frac{15}{\sqrt{17}},\frac{25}{\sqrt{17}},0\right)$ и $\overrightarrow{r_2}=-\overrightarrow{r_1}$.

631. а) Како је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, тј. $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 0, 5)$, то је тражена површина $P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}$ интенз. $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$; в) 9.

632. а) Како је $\overrightarrow{AD} = (9, 14, 16)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 5)$, то је $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$, па су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарни, одакле следи и да су тачке A, B, C, D компланарне.

633. а) Како је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, дати вектори су компланарни.

634. а) 2; б) $3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$; в) 4; г) $3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$; д) 7; ђ) $-3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$.

635. а) Имамо да је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & x-1 \end{vmatrix} = 3(x-1)(4-x)$, па су дати вектори компланарни за $x = 1$ или $x = 4$; б) $x = 5$; в) $x = 3$.

636. а) Како је $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -17$, то је запремина паралелопипеда $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-17| = 17$; б) 21; в) 25; г) 2.

637. а) $\sqrt{3}/2$.

638. Како је $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{b} \times \vec{a}$, вектори $2\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ биће колинеарни ако су колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

639. Означимо са $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторе страница паралелограма. Тада је $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, одакле је $\vec{a} = 3(\vec{m} - \vec{n})$ и $\vec{b} = 2\vec{n} - \vec{m}$. Површина паралелограма је $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = 3|(\vec{m} - \vec{n}) \times (2\vec{n} - \vec{m})| = 3|\vec{m} \times \vec{n}| = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

640. а) Компланарност следи из чињенице да је $(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) = \overrightarrow{0}$.

б) Вектор $\vec{b} \times \vec{c}$ је нормалан на $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а вектор $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ је нормалан на $\vec{a}$ и на $\vec{b} \times \vec{c}$, тј. паралелан је са равни коју одређују вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

641. а) 24; б) 27.

642. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -6$. $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 6$, $B = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$, па је $H = V/B = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

643. $\overrightarrow{x} = (7, 5, 1)$. Овај резултат се добија из услова $\overrightarrow{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, при чему се број λ налази из услова $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

644. Како је $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то је $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

645. а) Како је $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{0}$, то је и $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{0}$, одакле је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$. На исти начин се доказује да је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$.

646. Одузимањем друге релације од прве добија се: $\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{d}$. Користећи својства векторског множења имамо да је: $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{c} - \vec{b}) \times \vec{d}$, односно $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c})$, тј. $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) - \vec{d} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \overrightarrow{0}$, што је еквивалентно са

$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \overrightarrow{0}$. Како је векторски производ $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ једнак нули, то су вектори $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ колинеарни.

647. Применом дистрибутивног закона имамо: $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b} = 2(\vec{b}\times\vec{a})$. Како је $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ површина паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, ова релација има значење да је површина паралелограма конструисаног над дијагоналама датог паралелограма два пута већа од површине датог паралелограма.

648. Помножимо дату векторску једнакост скаларно са $\vec{c}$. Тада је

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0.$$

Последња два сабирка једнака су нули јер је $\vec{b}\times\vec{c}\perp\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}\perp\vec{c}$, па је $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, односно вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су компланарани.

649. а) $V=14$; б) $H_D=\sqrt{14}$.

650. *Прво решење*: Мешовити производ ових вектора је

$$\begin{aligned}
&((q\vec{a}-p\vec{b})\times(r\vec{b}-q\vec{c}))\cdot(p\vec{c}-r\vec{a})\\
&=(qr(\vec{a}\times\vec{b})-q^2(\vec{a}\times\vec{c})-pr(\vec{b}\times\vec{b})+pq(\vec{b}\times\vec{c}))\cdot(p\vec{c}-r\vec{a})\\
&=(qr(\vec{a}\times\vec{b})-q^2(\vec{a}\times\vec{c})+pq(\vec{b}\times\vec{c}))\cdot(p\vec{c}-r\vec{a})\\
&=pqr(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}-pqr(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=0,
\end{aligned}$$

што значи да су вектори компланарни.

Друго решење: С обзиром да је $r(q\vec{a}-p\vec{b})+p(r\vec{b}-q\vec{c})+q(p\vec{c}-r\vec{a})=(rq-qr)\vec{a}+(-rp+pr)\vec{b}+(-pq+qp)\vec{c}=\overrightarrow{0}$, дати вектори су линеарно зависни, дакле и компланарни.

Глава VI – Аналитичка геометрија у равни

651. а) $d=\sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2}=5$; б) 10. **652.** $AB=5$, $BC=13$, $CA=8\sqrt{2}$.

653. а) $t_a=3\sqrt{17}$, $t_b=6$, $t_c=15$; б) $t_a=\sqrt{41}$, $t_b=\sqrt{17}$, $t_c=\sqrt{26}$.

654. а) $AB=CD=4\sqrt{5}$, $BC=DA=2\sqrt{5}$, $AC=BD=10$; б) $AB=CD=5\sqrt{2}$, $BC=DA=\sqrt{10}$, $AC=4\sqrt{5}$, $BD=2\sqrt{10}$.

655. $C_1(3\sqrt{3},4\sqrt{3})$, $C_2(-3\sqrt{3},-4\sqrt{3})$.

656. а) $AB=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{50}$, $BC=\sqrt{40}$, па је $AC^2=BC^2+AB^2$ и по Питагориној теореми троугао ABC је правоугли. б) $a=2\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$, $c=2\sqrt{10}$, $a^2+b^2=c^2$. в) $a=5\sqrt{2}$, $b=10$, $c=5\sqrt{2}$, $a^2+c^2=b^2$.

657. $B_1(0,-3)$, $B_2(0,-9)$.

658. Нека је $B(x,0)$ тражена тачка. Тада је

$$\sqrt{(x-9)^2+(0+3)^2}=\sqrt{(x-0)^2},\quad \text{тј.}\quad x^2-18x+81+9=x^2,$$

па је $x=5$.

659. Нека је $C(0,y)$ тражена тачка. Из услова $CA=CB$ добијамо

$$\sqrt{(-3-0)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2},$$

па је $y=\frac{16}{3}$, тј. $C\big(0,\frac{16}{3}\big)$.

660. По услову задатка је: $\sqrt{x^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$ и $x = 2y$. Тражена тачка је $C(2,1)$.

661. Нека је $C(x,y)$ тражена тачка. Из услова $AC = BC$ имамо:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2},$$

или, после квадрирања, $x+y=8$. Из услова да је $d = 5\sqrt{2}$ добијамо $\sqrt{x^2+y^2} = 5\sqrt{2}$, односно $x^2+y^2 = 50$. Решења система једначина $x+y=8 \wedge x^2+y^2=50$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ и $y_1 = 7$, $y_2 = 1$. Постоје, дакле, две тачке које испуњавају услов задатка, и то: $C_1(1,7)$ и $C_2(7,1)$.

662. $M(4,-3)$, $N(7,4)$, па је $\overrightarrow{MN} = (3,7)$.

663. Ако средиште M странице AC припада оси Ox, а средиште N странице BC припада оси Oy, биће $M(x,0)$, $N(0,y)$ и тачка C имаће координате $C(3,-6)$. Ако средиште M припада оси Oy, а средиште N оси Ox, биће $M(0,y)$, $N(x,0)$ и тачка $C(-3,-5)$.

664. Како су M, N, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, то је $M(0,-5)$, $N(5,-1)$, $P(-1,1)$, $Q(-6,-3)$, па је $\overrightarrow{MN} = (5,4)$, $\overrightarrow{QP} = (5,4)$, одакле је $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$, па је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

Напомена. Ова особина важи и за произвољне четири тачке (у равни или простору). Наиме, на основу особина средње линије троугла, непосредно се види да је $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QP}$, па су дужи MN и PQ једнаке и паралелне, што значи да представљају пар наспрамних страница једног паралелограма.

665. Средиште дијагонале BD је $R(1,-2)$, средиште дијагонале AC је $S(-2,2)$, па је средиште дужи MP тачка $X\left(-\frac{1}{2},-2\right)$, средиште дужи QN тачка $Y\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ и средиште дужи RS тачка $Z\left(-\frac{1}{2},-2\right)$, па је $X = Y = Z$, што значи да се ове три дужи секу у једној тачки која је њихово заједничко средиште.

666. Координате средине дужи су $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2) = 2$, $y = \frac{1}{2}(y_1+y_2) = 1$.

667. а) $A_1(2,1)$, $B_1\left(1,-\frac{7}{2}\right)$, $C_1\left(4,-\frac{5}{2}\right)$; б) $A_1(2,3)$, $B_1(1,1)$, $C_1(4,0)$.

668. а) $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$; б) $A(12,-1)$, $B(-2,5)$, $C(-6,-5)$.

669. а) Координате тачке D (за $\lambda = \frac{5}{7}$) су:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3+\frac{5}{7}\cdot 9}{1+\frac{5}{7}} = 2, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{5}{7}\cdot 10}{1+\frac{5}{7}} = 3, \quad \text{тј. } D(2,3).$$

б) За $\lambda = \frac{1}{2}$ тачка је $M(1,2)$, а за $\lambda = 2$ тачка је $N(5,6)$.

в) За $\lambda = \frac{1}{5}$ тачка је $M(-1,0)$, а за $\lambda = 1$ тачка је $N(3,4)$.

670. $D(3,-1)$, видети претходни задатак. Тачка E као средиште дужи CD имаће координате: $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2) = 5$, $y = \frac{1}{2}(y_1+y_2) = 0$, тј. $E(5,0)$.

671. Дуж AB поделимо у односима $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = \frac{3}{2}$, $\lambda_4 = \frac{4}{1}$. Добијају се тачке: $M_1(5{,}4; 2{,}8)$, $M_2(7{,}8; 3{,}6)$, $M_3(10{,}2; 4{,}4)$, $M_4(12{,}6; 5{,}2)$.

672. Нека је A_1 средиште дужи BC. Тада је $A_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. Познато је да тачка T дели дуж AA_1 у односу $2:1$, па је

$$x_T = \frac{x_1 + 2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad \text{и} \quad y_T = \frac{y_1 + 2\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

а) $T(-2,1)$; б) $T(2,-3)$.

673. $C(-6,2)$.

674. *Прво решење*: Заменом координата тачака A, B, C у формули $2P(\triangle ABC) = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$, добија се $P(\triangle ABC) = 2$.

Друго решење: Заменом координата тачака A, B, C у формули

$$2P(\triangle ABC) = \text{апс.вр.} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

добија се $P(\triangle ABC) = 2$.

Треће решење: Како је површина троугла једнака половини површине паралелограма (нацртати слику), то је $P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Како је $\overrightarrow{AB} = (5, -2)$ и $\overrightarrow{AC} = (7, -2)$, то је $2P(\triangle ABC) = \text{апс.вр.} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = |4\vec{k}| = 4$. Дакле, опет имамо $P(\triangle ABC) = 2$.

675. а) $P = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\ \text{интенз.} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3-2 & 2-(-3) & 0 \\ -2-2 & 5-(-3) & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\ \text{интенз.} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}|8 + 20| = 14$; б) 12; в) $\frac{9}{4}$.

676. $P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \text{интенз.} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \text{интенз.} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 3.$

677. а) Површина троугла ABC је $S = 0$, па A, B и C припадају једној правој. б) припадају једној правој; в) не припадају једној правој.

678. Ако три тачке припадају истој правој, онда површина троугла ABC мора бити једнака нули. Из овог услова добијамо

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0, \quad \text{тј.} \quad 1(3 - m) + 2(m - 2) + 4(2 - 3) = 0,$$

одакле је $m = 5$.

679. Имамо да је $AB = 5$, $AC = 10$. Познато је да за тачку D у којој симетрала унутрашњег угла код A сече страницу BC важи $BD : DC = AB : AC$. У нашем случају је $BD : DC = 1 : 2$, па је $D\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

680. $C\left(10\frac{1}{2}, 10\right)$, $D(4, -3)$.

681. $C(2,4)$, $D(-2,1)$; $AB = BC = 5$.

682. Пошто је $C_1C_1 < r_1 + r_2$, кругови се секу па имају заједничке само спољашње тангенте. Тражена тачка M је центар сличности за дате кругове, па дели дуж C_1C_2 у односу $\lambda = -r_1/r_2 = -3/7$. Резултат: $M(-2, 1)$.

683. $AB = BC$, $P = \frac{7}{2}$. **684.** 90.

685. *Упутство*: Доказати да је $AB = DC$ и $BC = AD$, израчунати дужину AB и површину паралелограма. Резултат: $h = 2{,}2$.

686. $C_1(2,2)$, $C_2\left(5,2\right)$.

687. Површина петоугла једнака је збиру површина троуглова ABC, ACD и ADE. Резултат: 12,5.

688. а) На оси Ox кроз тачке $x = -1$, $x = 2$ конструишемо праве паралелне са Oy-осом. Права $x = 0$ је Oy-оса.

689. $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$.

690. $A(-3, -1)$, $B(0, -1)$, $C(2, 3)$, $D(4, 7)$.

691. Правој p_1 припадају тачке A, C, D и E, а правој p_2 тачке B и D.

692. Ако дата права сече осу Ox у тачки M, а осу Oy у тачки N, тада је $M(-6,0)$ и $N(0,4)$.

693. а) $k=1$, $\varphi=135°$; б) $k=1$, $\varphi=45°$; в) $k=-1/\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$; г) $k=\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

694. Заменом датих вредности у експлицитном облику једначине праве $y=kx+n$ добија се: а) $y=\frac{2}{3}x+3$, односно $2x-3y+9=0$; б) $3x-y=0$; в) $y+2=0$; г) $3x+4y-16=0$.

695. $\sqrt{3}x-3y-3-2\sqrt{3}=0$.

696. Права чија је једначина $y=kx+n$ пролази кроз дате тачке ако њихове координате задовољавају ову једначину. Тако добијамо систем једначина: $2k+n=-8$, $n-k=-7$, чије је решење $k=-5$ и $n=2$.

697. Упадна тачка је $A(6,0)$, а једначина одбијеног зрака је $y=-\frac{2}{3}x+4$.

698. а) Експлицитан облик једначине праве је $y=\frac{4}{m}x-\frac{7}{m}$, па је $\frac{4}{m}=3$, односно $m=\frac{4}{3}$. б) $y=mx-3m+6$, $-3m+6=5$, $m=\frac{1}{3}$.

699. Из услова $A=0$, $B\neq 0$, $-C/B=-2$, добијамо систем једначина $p+q-1=0$ и $-\dfrac{p+2}{2p+3q}=-1$, чија су решења $p=\frac{4}{3}$, $q=-\frac{1}{3}$.

700. а) $1°$ $b=-2$, $y=\frac{9}{5}$; $2°$ $b=3$, $x=-\frac{4}{5}$; $3°$ $b^2-2b+1=0$, тј. $b=1$, $y=\frac{3}{2}x$

б) $1°$ $b=1$, $y=-\frac{4}{3}$; $2°$ $b=-2$, $x=\frac{1}{3}$; $3°$ $b=-1$, $y=2x$.

702. а) $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-1}{2+1}=1$, па је $y-1=x+1$, односно $y-x-2=0$; б) $x+y-1=0$; в) $2y-x-2=0$; г) $3y-2x+2=0$.

703. а) AB: $x-y+2=0$, AC: $y=0$, BC: $2x+y-8=0$; б) AB: $4x-3y+7=0$, AC: $3x+4y-1=0$, BC: $y+2x-9=0$.

704. а) Средиште дужи M_1M_2 има координате $M\left(\frac{-4+8}{2},\frac{6+8}{2}\right)$, тј. $M(2,7)$. Једначина праве која садржи тачке $O(0,0)$ и $M(2,7)$ је $2y-7x=0$. б) $y=x$. в) $y=\frac{1}{5}x$.

705. AB: $2x+y-8=0$, BC: $x+2y-1=0$, CA: $x-y-1=0$, AA_1: $x-3=0$, BB_1: $x+y-3=0$, CC_1: $y=0$.

706. $5x-y=0$; $x-5y=0$.

707. а) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=1$, односно $2x+5y-10=0$; б) $4x+3y+12=0$; в) $3x+5y-3=0$.

708. а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}=1$; б) $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}=1$; в) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}=1$; г) $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{4}=1$. д) и ђ) Дате праве немају сегментни облик.

709. Сегментни облик ових правих је $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$ или $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$, односно $x+y-a=0$ или $x-y-a=0$. Како тачка $A(-1,3)$ припада траженим правим, то је $a=2$ или $a=-4$, па су једначине тражених правих $x+y-2=0$ и $x-y+4=0$.

710. Ако једначину дате праве напишемо у сегментном облику, биће $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{60/k}=1$, па је по услову задатка $\sqrt{5^2+(60/k)^2}=13$, односно $k=\pm 5$.

711. а) Како тражена права садржи тачку $A(-5,4)$, то је $\dfrac{-5}{m}+\dfrac{4}{n}=1$, односно $4m-5n-mn=0$, а према услову задатка је $|mn|=10$. Одређивање параметара m и n своди се на решавање система

$$\left.\begin{aligned}4m-5n-1&=0\\ mn&=10\end{aligned}\right\}\quad \text{и}\quad \left\{\begin{aligned}4m-5n-10&=0\\ mn&=-10.\end{aligned}\right.$$

Први систем има два решења: $(5,2)$ и $\left(-\frac{5}{2},-4\right)$. Други систем нема решења. Постоје, дакле, две праве које испуњавају дате услове: $2x+5y-10=0$ и $8x+5y+20=0$.

б) Тражене праве су: $3x-y-30=0$, $3x+4y-60=0$, $x+3y-30=0$, $x-12y+60=0$.

712. а) Када у формули $y-y_1=k(x-x_1)$ заменимо дате вредности, добијамо $y-4=2(x-3)$, односно $2x-y-2=0$; б) $2x+3y+5=0$; в) $x-2y+8=0$; г) $2x+y+6=0$.

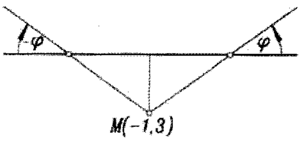
713. а) $3x-y-1=0$; б) $2x+y=0$; в) $x-y=0$; г) $x\sqrt{3}-3y=0$.

714. а) $y-2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(x-3)$, односно $x-y-1=0$; б) $x+y+5=0$; в) $\sqrt{3}x+y+3\sqrt{3}=0$; г) $\sqrt{3}x-3y+12=0$.

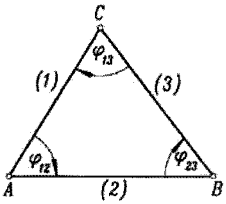
715. а) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{-2-3}{1+3\cdot(-2)}=1$, па је $\alpha=\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$; ђ) $\frac{\pi}{3}$. **716.** $90°, 45°, 45°$.

717. Ако је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, биће $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}$, па је тражена једначина $y+1=\frac{3}{4}(x-2)$, тј. $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$. **718.** а) $a_1=6$, $a_2=-\frac{2}{3}$; б) $a_{1,2}=\frac{2}{11}(8\pm5\sqrt{3})$.

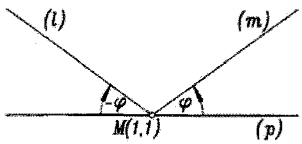
719. Постоје две такве праве (в. слику). Ако са k означимо коефицијент правца тражене праве и уочимо да је за дату праву коефицијент правца $k_1=-\frac{3}{2}$, добијамо услов $\operatorname{tg}45°=1=\left|\dfrac{-\frac{3}{2}-k}{1-\frac{3}{2}\cdot k}\right| \iff \left|-\frac{3}{2}-k\right|=\left|1-\frac{3}{2}k\right| \iff |3+2k|=|2-3k| \iff 9+12k+4k^2=4-12k+9k^2 \iff 5k^2-24k+5=0 \iff k=\frac{1}{5}(12\pm13)$, одакле је $k'=-\frac{1}{5}$ и $k''=5$. Тражене једначине су тада $y-3=-\frac{1}{5}(x+1)$ и $y-3=5(x+1)$, односно $x+5y-14=0$ и $5x-y+8=0$.



Сл. уз зад. 719



Сл. уз зад. 722



Сл. уз зад. 738

720. $41x+23y-110=0$ и $x+47y-142=0$. Видети задатак 719.

721. $k_1=\dfrac{1-3}{-1-2}=\dfrac{2}{3}$, $k_2=\dfrac{2}{3}$, па је $l_1 \parallel l_2$.

722. Видети слику. Добија се $\operatorname{tg}\varphi_{12}=-8$, $\operatorname{tg}\varphi_{23}=-1$, $\operatorname{tg}\varphi_{31}=-\frac{9}{7}$. Углови $\varphi_{12},\varphi_{23},\varphi_{31}$ или су сви унутрашњи углови датог троугла или су сви спољашњи. Како су, у овом случају, сви добијени тангенси негативни, то су углови спољашњи. Унутрашњи углови троугла су њима суплементни, па су њихови тангенси 8, 1, $\frac{9}{7}$.

723. а) $x+3y+1=0$; б) $x+y+1=0$. **724.** $P=20$.

725. а) Коефицијент правца дате праве је $m_1=\frac{3}{5}$, одакле следи да је коефицијент правца тражене праве $m=-\frac{5}{3}$. Пошто ова права садржи тачку $A(1,3)$, њена једначина је $y-3=-\frac{5}{3}(x-1)$, тј. $5x+3y-14=0$. б) $x+3y+15=0$. в) $4x+5y-12=0$.

726. $22x+33y-35=0$, $5x-y+3=0$, $17x+34y-38=0$.

727. $A(0,3)$, $B(3,-3)$, $C(0,-5)$, $D(-3,1)$.

728. Тачка $M(-1,3)$ је пресечна тачка правих (l) и (m). а) Права кроз M паралелна са правом (p) је: $y-3=-2(x+1)$, односно $2x+y-1=0$. б) Права кроз M нормална на праву (q) је: $y-3=-(x+1)$, односно $x+y-2=0$.

729. Темена троугла су $A(-1,0)$, $B(2,0)$ и $C(1,1)$, а површина $P=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{3}{2}$. Тражена нормала има коефицијент правца -2 и пролази кроз тачку $(1,1)$. Њена једначина је $2x+y-3=0$.

730. Тачка $N(0,-1)$ је подножје нормале (n): $3x-y-1=0$ конструисане из тачке M на праву (l).

731. Кроз тачку M се поставља права (n): $y-4=2(x-2)$, тј. $2x-y=0$ на праву (l). Праве (n) и (l) се секу у тачки $S(1,2)$. Како је S средиште дужи MN, то је $N(0,0)$.

732. h_{AB}: $5x+3y-25=0$, h_{BC}: $2x-3y-1=0$, h_{CA}: $x+2y-8=0$.

733. а) Праве p и q секу се у тачки $A\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Коефицијент правца праве a је $k=-4$, па је једначина тражене праве $y-\frac{2}{3}=-4x$, тј. $12x+3y-2=0$. б) $2x-3y+5=0$.

734. Права BC, којој хипотенуза припада, има коефицијент правца $k=-\frac{3}{2}$, па права којој припада хипотенузина висина има коефицијент правца $k_1=-1/k=2/3$. Пошто та права садржи тачку $A(1,1)$, њена једначина је $y-1=\frac{2}{3}(x-1)$, тј. $3y-2x-1=0$.

735. Пресек правих $y=\frac{1}{7}x-1$ и $y=-x+7$ је тачка $A(7,0)$, пресек правих $y=-x+7$ и $y=3x-1$ је тачка $B(2,5)$, а правих $y=3x-1$ и $y=\frac{1}{7}x-1$ је тачка $C(0,-1)$. Како је $CA=BA=\sqrt{50}$, троугао ABC је једнакокраки.

736. Како за координате тежишта троугла важи $x_t=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y_t=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, то је тежиште троугла ABC тачка $T(3,0)$. Једначине страница троугла су AB: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$, BC: $y=-\frac{1}{2}x+4$, AC: $y=-3x+14$. У пресеку праве p: $y=-\frac{4}{3}x+4$ са правама BC и AC добијамо тачку $M((,4))$, односно $N(6,-4)$.

737. $M_1(1,1)$, $M_2\left(\dfrac{44}{5},\dfrac{18}{5}\right)$.

738. Видети решење задатка 719. Права (l) сече праву (q) у тачки $M(1,1)$ (в. слику). Једначина праве по којој се одбија зрак је $(k=-\frac{29}{2})$ (m): $29x+2y-31=0$.

739. Једначина праве кроз M је $y-1=k(x-8)$. Како ова права гради са датим правим једнаке углове, биће $\dfrac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7k}{6}}=\dfrac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9k}{2}}$, тј. $34k^2+51k-34=0$, одакле је $k_1=\dfrac{1}{2}$, $k_2=-2$, па добијамо два решења: $x-2y-6=0$, $2x+y-17=0$.

740. $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$ и $x-y+2=0$.

741. Координате темена $A(1,-1)$ добијају се решавањем система $x-y-2=0$ и $x-2y-3=0$; координате темена $B(5,3)$ добијају се решавањем система $x-y-2=0$ и $x+4y-17=0$. Права BC садржи тачку B и нормална је на h_a, па је $k_{BC}=-2$, BC: $2x+y-13=0$. Права AC нормална је на h_b и садржи тачку A, па је $k_{AC}=4$, AC: $4x-y-5=0$. **742.** $C\left(\frac{8}{9},\frac{10}{3}\right)$.

743. Симетрала (s): $x+y=0$ дужи AB сече праву (p) у тачки $M(6,-6)$. **744.** $a=-3$.

745. Нека је $D(t,0)$. Пошто је једначина праве AC: $y=x$, а права BD садржи тачку B и управна је на AC, то је једначина праве BD: $y-3=-(x-2)$, тј. $y=-x+5$, одакле је $t=5$, па је $D(5,0)$. Пошто је $AC=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}$ и $BD=\sqrt{18}$, то је тражена површина $P=\frac{1}{2}AC\cdot BD=6$.

746. Једначина прамена може се написати у облику $(3+2\lambda)x+(1-\lambda)y-(1+9\lambda)=0$. Дата права припада прамену ако постоји λ тако да важи $\dfrac{3+2\lambda}{1}=\dfrac{1-\lambda}{3}=-\dfrac{1+9\lambda}{13}$.

Ово је систем од две једначине са једном непознатом и налазимо да он има једно решење $\lambda = -\frac{8}{7}$.

747. Не припада. Видети претходни задатак. У овом случају аналогни систем од две једначине са једном непознатом нема решења.

748. Заменом координата тачке M у дату једначину добија се $\lambda = -\frac{3}{4}$. Једначина тражене праве је $x + 111y - 15 = 0$.

749. Једначина $3x - 4y - 5 + \lambda(2x + 3y + 4) = 0$, тј. $(3 + 2\lambda)x + (3\lambda - 4)y + 4\lambda - 5 = 0$ је једначина прамена коме припада права l. Коефицијент правца праве l је

$$m = \frac{2\lambda + 3}{4 - 3\lambda} = \frac{1}{2},$$

одакле је $\lambda = -\frac{2}{7}$. Тражена једначина је $3x-4y-5-\frac{2}{7}(2x+3y+4) = 0$, тј. $17x-34y-43 = 0$.

750. Дату једначину написати у облику $(\lambda + 2)x + (4\lambda - 1)y + 1 - 13\lambda = 0$. Једначина праве паралелна са осом Ox има облик $y = \text{const}$, па је $\lambda + 2 = 0$, $\lambda = -2$. Једначина тражене праве је $y = 3$.

751. $3x - y + 1 = 0$. **752.** $x - 3y + 1 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

753. Тражену праву, можемо написати у сегментном облику: $\dfrac{x}{\frac{2\lambda-3}{\lambda+2}} + \dfrac{y}{\frac{2\lambda-3}{1-3\lambda}} = 1$. Из $\left|\dfrac{2\lambda - 3}{\lambda + 2}\right| = \left|\dfrac{2\lambda - 3}{1 - 3\lambda}\right|$ добијамо $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4}$.

754. Напишимо једначину у облику $(2x + y - 3) + m(x - y - 2) = 0$. Ово важи за свако m ако и само ако је $2x + y - 3 = 0$ и $x - y - 2 = 0$, одакле је, решавањем овог система, тражена тачка $M\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

755. Једначина праве у нормалном облику је $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$, дакле:
а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y = 5$; б) $-y = 3$; в) $-x = 4$; г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y = 10$; д) $-0{,}943x+0{,}338y = 1$.

756. Једначина $\dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ представља нормални облик једначине праве $ax+by+c = 0$. Дакле, имамо редом:
а) $\dfrac{3x + 4y + 5}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$, тј. $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$; б) Из $x - 2y + 3 = 0$ следи $\dfrac{x - 2y + 3}{-2\sqrt{5}} = 0$, односно $-\dfrac{x}{\sqrt{5}} + \dfrac{2y}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; в) $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}x + \dfrac{2}{\sqrt{13}}y = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$; д) $-x = 3$.

757. а) $-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-2 = 0$; б) $\dfrac{5}{13}x+\dfrac{12}{13}y-3 = 0$; в) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{y}{2}-2 = 0$; г) $-x\cos 10^\circ - y\sin 10^\circ - 4 = 0$.

758. $m = \pm 2$. **759.** $3x + 4y + 20 = 0$, $x = 4$.

760. а) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$; б) 2,5; в) 5.

761. Једначина произвољне праве која садржи тачку P је $y - 1 = k(x + 2)$, тј. $kx - y + 2k + 1 = 0$. Из $4 = \dfrac{|3k - 1 + 2k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ добијамо $k = \pm\frac{4}{3}$.

762. $x - y + 4 = 0$ или $x - 7y + 10 = 0$.

763. Права нормална на p кроз тачку N има једначину $4x + 3y + 1 = 0$, а одстојање тачке M од ове нормале је $d = \frac{1}{5}(4\cdot 6 + 3\cdot 8 + 1) = 9{,}8$.

764. а) *Први начин*: Једначина праве AB је $\dfrac{x-3}{-1-3}=\dfrac{y-6}{3-6}$, тј. $3x-4y+15=0$, па је дужина висине из темена C једнака одстојању тачке C од праве AB: $d=\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot(-1)+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$. Слично се налазе и дужине осталих висина троугла.

Други начин: Површина троугла ABC је $P=\dfrac{1}{2}$ апс.вр. $\begin{vmatrix} -1-3 & 3-6 \\ 2-3 & -1-6 \end{vmatrix}=12{,}5$, а дужине страница су $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(3-6)^2}=5$, $BC=5$ и $CA=2\sqrt{5}$, па је $h_c=\dfrac{2P}{AB}=5$, $h_a=\dfrac{2P}{BC}=5$, $h_c=\dfrac{2P}{CA}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. б) $h_a=\dfrac{29\sqrt{5}}{28}$, $h_b=\dfrac{58}{13}$, $h_c=2$.

765. а) Тачка $M(0,1)$ припада правој $3x-4y+4=0$, Одстојање $d=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ ове тачке од праве $3x-4y-1=0$ је истовремено и одстојање датих паралелних правих. б) 2.

766. Нормални облици једначина датих правих су $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0$ и $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$. Како су ове две праве са разних страна координатног почетка, једначина тражене праве је $3x-4y-5=0$.

767. а) Користимо формулу за растојање d две паралелне праве чије су једначине $Ax+By+C_i=0$ $(i=1,2)$, а која гласи: $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Зато прво доведимо (дељењем са 2) једначину друге праве на облик у коме су јој коефицијенти A и B једнаки онима из једначине прве праве: $3x-8y+\frac{5}{2}=0$. Одатле је $C_1=-10$, $C_2=\frac{5}{2}$, па је $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{5}{2}$. б) $d=\dfrac{2}{5}$.

768. Дужина странице квадрата једнака је нормалном растојању између датих правих, тј. $a=d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|39-2\cdot(-26)|}{26}=\dfrac{7}{2}$, па је површина квадрата $P=a^2=\dfrac{49}{4}$.

769. Растојање дате праве и координатног почетка је $h=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{3}$ и оно је једнако висини једнакостраничног троугла OAB. Страница једнакостраничног троугла је $a=2h/\sqrt{3}=2$, па се тачке A и B налазе на одстојању 2 од координатног почетка. Решавањем система једначина $x^2+y^2=4$, $x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, добијамо координате темена троугла: $A(\sqrt{3},1)$ и $B(0,2)$. **770.** $8x-12y+11=0$.

771. Координате тражене тачке $M(p,q)$ задовољавају систем једначина:

$$2p-3q+21=0, \qquad q^2=(p-1)^2+(q-2)^2.$$

Решавањем овог система добијамо две тачке $M_1(-3,5)$, $M_2\left(\frac{23}{3},\frac{109}{9}\right)$.

772. Тражена права има једначину облика $(2+l)x+(1-2l)y+4+2l=0$. Из $\dfrac{|2+l-1+2l+4+2l|}{\sqrt{(2+l)^2+(1-2l)^2}}=\sqrt{10}$ налазимо $l=1$, па је тражена права $3x-y+6=0$.

773. Теме угла је пресек датих правих — тачка $S(0,3)$. Одаберимо произвољно тачку Q на датом краку, на пример $Q(3,7)$ и одредимо њој симетричну тачку Q' у односу на симетралу угла. Други крак угла је права SQ'. Добија се да је права кроз Q нормална на симетралу има једначину $y=-7x+28$. Њен пресек са симетралом је тачка $M(3{,}5;3{,}5)$, па је тачка $Q'(4,0)$. Права SQ' има једначину $4y+3x-12=0$.

774. а) Нека тачка $M(x,y)$ припада једној од симетрала углова. Тада су одстојања тачке M од датих правих једнака, тј.

$$\frac{|6x-8y+15|}{10}=\frac{24x+10y-3}{26}.$$

Значи, једначина једне симетрале је: $26(6x-8y+15)=10(24x+10y-3)$, тј. $3x+11y-15=0$, а друге $26(6x-8y+15)=-10(24x+10y-3)$, тј. $11x-3y+10=0$.

б) $7x-56y+48=0$ и $32x+4y+43=0$; в) $7x-y-13=0$ и $x+7y-9=0$.

775. $S(0,2)$.

776. Пошто права садржи тачку P, то је њена једначина $y=kx+1$, $k\in\mathbf{R}$, или $x=0$. Једноставно се проверава да права $x=0$ не задовољава услове задатка. Решавањем система $y=kx+1$, $x-3y+10=0$,односно $y=kx+1$, $2x+y-8=0$, налазимо апсцисе пресечних тачака $x_1=\frac{7}{3k-1}$ и $x_2=\frac{7}{2+k}$. Међутим, $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=0$, одакле добијамо да је $k=-\frac{1}{4}$. Дакле, тражена права има једначину $y=-\frac{1}{4}x+1$.

777. $x-y-7=0$ и $x-2y-10=0$.

778. Права AB је нормална на праву h_c, па се добија AB: $x-y+1=0$. Како је $AB\cap h_b=\{B\}$, налазимо $B(5,6)$. Слично, $AC\perp h_b$, $AC\cap h_c=\{C\}$ и $C(7,-4)$. Једначина праве BC је $5x+y-31=0$. **779.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$.

780. h_a: $x+3y+2=0$; h_b: $x+y-2=0$; h_c: $2x-y-10=0$; $H(4,-2)$.

781. а) Нека је $Q'(p,q)$. Тада средиште M дужи QQ' има координате $M\left(\frac{p-2}{2},\frac{q-9}{2}\right)$, а та тачка припада правој l, па је $2\cdot\frac{p-2}{2}+5\cdot\frac{q-9}{2}-38=0$, тј. $2p+5q=125$ (1). С друге стране, права QQ' има једначину $y+9=\frac{q+9}{p+2}(x+2)$, па како је она нормална на l, биће $\frac{q+9}{p+2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-1$, тј. $5p-2q=-8$ (2). Из (1) и (2) налазимо $p=10$, $q=21$, па је $Q'(10,21)$. б) $Q'(-1,-1)$; в) $Q'(6,-1)$.

782. Тачка $A(-1,-1)$ припада датој правој. Њој симетрична тачка $B(11,3)$ у односу на тачку M припада траженој правој. Та права је паралелна датој правој, па је њена једначина облика $5x-2y+b=0$. Коефицијент b одређујемо из услова да тачка B припада овој правој и биће $b=-27$.

783. а) Праве p и s секу се у тачки $S(7/2,29/8)$. Нека је $\angle(p,s)=\angle(s,q)$. Тада је $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_s-k_p}{1+k_sk_p}=\dfrac{k_q-k_s}{1+k_qk_s}$, одакле се налази $k_q=\dfrac{5}{12}$, па је q: $y-\dfrac{29}{8}=\dfrac{5}{12}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$, тј. $5x-12y+26=0$. б) $4x+3y+6=0$.

784. Све праве које садрже тачку $M(1,1)$ су облика $y-1=k(x-1)$ или $x=1$. Непосредно се проверава да права $x=1$ сече дате праве у тачкама $P(1,-4)$ и $Q(1,-3)$, па не задовољава услове задатка. Дакле, једначина тражене праве је облика $y=k(x-1)+1$. Ова права сече праву $2x-y-5=0$ у тачки $B\left(\frac{k-6}{k-2},\frac{-3k-2}{k-2}\right)$, а праву $x+y+3=0$ у тачки $A\left(\frac{k-4}{k+1},\frac{1-4k}{k+1}\right)$. Пошто је M средиште дужи AB, мора бити $\frac{1}{2}\left(\frac{k-4}{k+1}+\frac{k-6}{k-2}\right)=1$, одакле је $k=\frac{2}{3}$. Једначина тражене праве је $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

785. Једначина праве AH је $y=2$, а пошто је права BC управна на AH и садржи тачку B, њена једначина је $x=6$. Једначина праве BH је $y=2x-8$, а пошто је права AC управна на BH и садржи тачку A, њена једначина је $y=-\frac{1}{2}x-3$. Координате тачке C добијају се као решење система једначина: $x=6$, $y=-\frac{1}{2}x-3$, тј. $C(6,-6)$.

786. Тачка C има координате $\left(t,\frac{3t-4}{2}\right)$, $t\in\mathbf{R}$. Из услова да је $P=10$ добијамо $t=4$ или $t=-\frac{4}{3}$, па је $C(4,4)$ или $C\left(-\frac{4}{3},-4\right)$.

787. AB: $y=0$, CD: $y=2\sqrt{3}$, BC: $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$, AD: $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$.

788. Нека је $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$ и $S(x_4,y_4)$. Тада је

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_4+0}{2} = \frac{x_4}{2}, \quad y_1 = \frac{y_4+2}{2} = \frac{y_4}{2}+1,\\ x_2 &= \frac{\frac{x_4}{2}+0}{2} = \frac{x_4}{4}, \quad y_2 = \frac{\frac{y_4}{2}+1+0}{2} = \frac{y_4}{4}+\frac{1}{2},\\ x_3 &= \frac{\frac{x_4}{4}+1}{2} = \frac{x_4}{8}+\frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{\frac{y_3}{4}+\frac{1}{2}+0}{2} = \frac{y_4}{8}+\frac{1}{4},\\ x_4 &= \frac{\frac{x_4}{8}+\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{x_4}{16}+\frac{5}{4}, \quad y_4 = \frac{\frac{y_4}{8}+\frac{1}{4}+2}{2} = \frac{y_4}{16}+\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Одавде налазимо $S\left(\frac{4}{3},\frac{6}{5}\right)$, $R\left(\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right)$, $Q\left(\frac{1}{3},\frac{4}{5}\right)$, $P\left(\frac{2}{3},\frac{8}{5}\right)$. Тачке P и R имају исте апсцисе, па је заједничка основица за троуглове PQR и PRS дужине $y_1-y_3=\frac{6}{5}$, а висине су $x_1-x_2=\frac{1}{3}$ и $x_4-x_1=\frac{2}{3}$, одакле добијамо да је површина $P=\frac{3}{5}$.

789. Нека је M тражена тачка. Како $M\in p$, то је $M(2t-8,t)$, па је $SM=\sqrt{(2t-16)^2+(t-3)^2}$, а $d_{Mq}=|2t-7|$. Из $SM=d_{Mq}$ налазимо $t_1=6$, $t_2=36$, па су тражене тачке $M_1(4,6)$, $M_2(64,36)$.

790. Како су s_α и s_β симетрале углова троугла, то тачке C_1 и C_2 симетричне тачки C у односу на s_α, односно s_β, припадају правој AB. Добија се (в. задатак 783) $C_1(5,2)$ и $C_2\left(-\frac{3}{5},\frac{14}{5}\right)$, па је једначина праве C_1C_2, тј. AB: $x+7y-19=0$.

791. Из $AB\cap s_\beta=\{B\}$ добија се $B\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$. Права BC је симетрична правој AB у односу на s_β (в. задатак 786). Налазимо BC: $x+3y-18=0$. Из $h_c\cap BC=\{C\}$ добија се $C(-6,8)$.

792. Одредимо најпре координате тежишта T троугла као пресека правих p и q. Добија се $T\left(\frac{2}{3},2\right)$. Координате тачке A_1, средишта странице BC, добијају се из услова да тачка A_1 дели дуж AT у односу $\lambda=-3$, па је $A_1(3,2)$. Једначина праве кроз A_1 је облика $y-2=k(x-3)$. Ова права сече праве p и q у тачкама B и C, а коефицијент одређујемо из услова да је тачка A_1 средиште дужи BC. Добија се $k=-2$, $B(2,4)$ и $C(4,0)$. Једначине страница троугла су BC: $2x+y-8=0$, AB: $x-3y+10=0$ и CA: $x+4y-4=0$.

793. Пошто тачка A припада датој правој, то је $3\cdot 2-7\cdot y_A+1=0$, одакле је $y_A=1$. Како је $S(0,4)$ средиште дужи AC, једноставно добијамо $C(-2,7)$. Права одређена дијагоналом BD је управна на AC у тачки S, па је њена једначина BD: $y=\frac{2}{3}x+4$. Тачка B припада правој $3x-7y+1=0$ и правој $y=\frac{2}{3}x+4$, дакле $B\left(-\frac{81}{5},-\frac{34}{5}\right)$. Координате тачке D су $\left(\frac{81}{5},\frac{74}{5}\right)$. Полупречник уписаног круга једнак је одстојању тачке S од праве $3x-7y+1=0$: $r=\dfrac{|3\cdot 0-7\cdot 4+1|}{\sqrt{3^2+7^2}}=\dfrac{27}{\sqrt{58}}$. **794.** $P=37\frac{11}{13}$.

795. Координате тежишта су $x_T=\frac{1}{3}(5-2+1)$, $y_T=\frac{1}{3}(2+3-6)$, дакле $T\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$. Једначине правих одређених страницама троугла су AB: $7y+x-19=0$, BC: $y+3x+3=0$, AC: $y-2x+8=0$. У пресеку симетрале странице AB — s_{AB}: $y-7x+8=0$ и симетрале странице BC — s_{BC}: $3y-x+4=0$ налази се центар описаног круга $S(1,-1)$. Једначине правих одређених висинама AA_1 и CC_1 су $3y-x-1=0$, односно $y-7x+13=0$. Њихов пресек је ортоцентар $H(2,1)$. Једначина праве SH је $y-2x+3=0$. Очигледно је да тачка T припада овој правој. (Ова права назива се *Ојлерова права* троугла ABC.)

796. $a=4\sqrt{2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}3$.

797. Нека су координате тачке $E(x_E, y_E)$. Биће $x_E = \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 3}{1+\frac{1}{4}} = -1$, $y_E = \dfrac{5-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{18}{5}$. Слично за тачку F добијамо $x_F = \frac{5}{2}$, $y_F = \frac{3}{2}$. Једначина праве BC је $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, праве AD: $y = -4x+3$, а праве EF је $y = -\frac{3}{5}x+3$. Праве AD и EF секу се у тачки $T(0,3)$, а праве AD и BC у тачки $D(1,-1)$. Добијамо да је $AT = \sqrt{17}/2$ и $DT = \sqrt{17}$, па је $AT : TD = 1:2$.

798. Из услова $AC \perp h_b$ налазимо једначину праве AC: $x-3y-25=0$. Како $B \in h_b$, то је $B(t, -3t-15)$, па је средиште дужи BC: $A_1\left(\dfrac{t+1}{2}, \dfrac{-3t-23}{2}\right)$. Из $A_1 \in t_a$ добијамо $\dfrac{t+1}{2} + 2\left(\dfrac{-3t-23}{2}\right) + 10 = 0$, одакле $t=-5$. Теме B има координате $(-5,0)$, а координате тачке A се налазе као пресек правих AC и t_a, $A(4,-7)$. Добијамо једначине правих AB: $7x+9y+35=0$ и BC: $4x+3y+20=0$.

799. Како тражена тачка A припада правој $x-2y+7=0$, то су њене координате облика $(2t-7, t)$, па је $AM = \sqrt{(2t-14)^2+(t-2)^2}$, а одстојање тачке A од праве $3x+4y-4=0$ је $\dfrac{|3(2t-7)+4t-4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = |2t-5|$. Из $\sqrt{(2t-14)^2+(t-2)^2} = |2t-5|$ налазимо $t_1=5$, $t_2=35$, па постоје два решења $A_1(3,5)$ и $A_2(63,35)$.

800. Добија се $C(7,-4)$ и BC: $x+y-3=0$. Права AC је симетрична правој BC у односу на s_γ, па се може одредити једначина (в. задатак 786) праве AC: $x+7y+21=0$. Како тачка A припада тој правој, њене координате су $A(-7t-21, t)$, а координате средишта дужи AB су $C_1(\frac{-7t-19}{2}, \frac{t+1}{2})$. Из услова $C_1 \in t_c$ налазимо $t=-1$, па је $A(-14,-1)$.

801. Нека је $T(x,y)$ тежиште, а $C(\alpha,\beta)$ треће теме. Тада је $\dfrac{1+5+\alpha}{3} = x$, $\dfrac{3+6+\beta}{3} = y$, одакле је $\alpha = 3x-6$, $\beta = 3y-9$ и како кооридинате α и β задовољавају једначину $y=3x+6$, добијамо да је тражено геометријско место права $y=3x-1$.

802. Нека је $M(x,y)$ средиште дужи AB, $A(2,1)$, $B(\alpha,\beta)$. Тада је $\frac{2+\alpha}{2} = x$, $\frac{1+\beta}{2} = y$ одакле је $\alpha = 2x-2$, $\beta = 2y-1$. Како координате α и β задовољавају једначину $y=3x+5$, то је једначина траженог геометријског места $y=3x$.

803. Висина трогула $h_c = \dfrac{2P}{AB} = 5\sqrt{2}$, а одстојање темена $C(x,y)$ од праве AB: $7x+y-23=0$, па је $\dfrac{|7x+y-23|}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$, одакле добијамо да је геометријско место тачака C скуп који се састоји од тачака две паралелне праве: $7x+y+27=0$ и $7x+y-73=0$.

804. а) $(x+2)^2+(y-5)^2=9$; б) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; в) $x^2+(y-4)^2=1$; г) $x^2+y^2=1$.

805. а) Како кружној линији припада координатни почетак, то је полупречник $r = OC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, па је једначина круга $(x+3)^2+(y-4)^2=25$; б) $x^2+(y-4)^2=169$; в) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; г) $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.

806. а) Центар $C(p,q)$ налази се у средишту пречника, па је $p = \frac{1+5}{2} = 3$, $q = \frac{1+3}{2} = 2$. Полупречник r је растојање од центра до једне крајње тачке, на пример до B; дакле, $r = \sqrt{(3-5)^2+(2-3)^2} = \sqrt{5}$. Према томе једначина тражене линије гласи: $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ б) $(x-2)^2+(y-6)^2=2$; в) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; г) $(x+2)^2+(y-1)^2=13$; д) $(x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{17}{4}$.

807. *Прво решење*: Ако канонички облик једначине круга напишемо у облику $x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$, па га упоредимо са општим обликом $x^2+y^2+ax+by+c=0$ и изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо: $p = -\frac{a}{2}$, $q = -\frac{b}{2}$ и $p^2 + q^2 - c = r^2$. Коришћењем ових веза добијамо тражене величине: $p = -2$, $q = 1$, $r = \frac{5}{3}$.

Друго решење: Дату једначину најпре треба поделити са 9, па се она своди на $x^2 + y^2 + 4x - 2y + \frac{20}{9} = 0$. Изразе $x^2 + 4x$ и $y^2 - 2y$ треба допунити до потпуног квадрата бинома, тј. $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 4 - 1 + \frac{20}{9} = 0$, тј. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{9}$. Центар круга је $C(-2, 1)$, а $r = \frac{5}{3}$.

б) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$; в) $(x+1)^2 + y^2 = 4$; г) $x^2 + (y-2)^2 = 25$.

808. Центар круга S као пресек датих правих има координате $(4, 7)$, а полупречник је $r = \sqrt{(9-4)^2 + (-5-7)^2} = 13$. Тражена једначина круга је $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 169$.

809. Једначина датог круга је $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 75$. Како је тражени круг концентричан са датим кругом, центар му је у тачки $S(-3, 2)$, а пошто пролази кроз тачку $A(3, -6)$, полупречник му је $r = SA = 10$, па је његова једначина $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100$.

810. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$.

811. а) Ван круга; б) на кругу; в) унутар круга; г) на кругу; д) унутар круга.

812. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

813. Средиште $S(x, y)$ круга мора припадати кругу полупречика 5 са центром у тачки M, тј. важи $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ (1). Пошто круг додирује x-осу, мора бити $y = 5$ или $y = -5$. За $y = 5$ једначина (1) има два решења по x: $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, а за $y = -5$ једначина нема реалних решења по x. Дакле, $S(3, 5)$ или $S(-5, 5)$.

814. а) $x^2 + (y-2)^2 = 4$; б) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ и $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

815. а) Како додирује обе координатне осе круг има једначину $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, а тачка $A(2, 1)$ припада кругу, биће $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$, тј. $r^2 - 6r + 5 = 0$, односно $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. Дакле, постоје два круга који испуњавају постављене услове: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. б) $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 17^2$ и $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$.

816. Како тражени круг додирује координатне осе, он се цео налази у једном квадранту. Центар круга подједнако је удаљен од координатних оса, па је $r = |p| = |q|$, где су (p, q) координате центра, а r полупречник круга. Центар C круга има координате (r, r) или $(r, -r)$. Из услова да ова тачка припада датој правој добијамо $r = -3$ или $r = -1$. Тражени кругови су: $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$ и $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

817. а) *Прво решење*: Координате центра p и q и полупречник r задовољавају једначине: $(3-p)^2 + q^2 = r^2$, $(-1-p)^2 + (2-q)^2 = r^2$ и $p - q + 2 = 0$. Решења овог система су $p = 3$, $q = 5$, $r = 5$, па је тражена једначина круга $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Друго решење: Како центар круга припада правој p, то су његове координате $C(t, t+2)$. Из $AC^2 = BC^2$ добијамо $(t-3)^2 + (t+2)^2 = (t+1)^2 + t^2$, одакле је $t = 3$, па је $C(3, 5)$, а $r = 5$.

б) $(x-3)^2 + y^2 = 20$; в) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.

818. $(x-3)^2 + y^2 = 10$ и $x^2 + (y+3)^2 = 4$.

819. а) *Прво решење*: Центар траженог круга је пресечна тачка симетрала дужи s_{AB}: $y = 0$ и s_{AC}: $x - y + 1 = 0$. Полупречник је $r = SA = 1$. Једначина траженог круга је $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

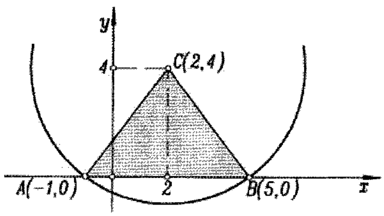
Друго решење: Заменом координата тачака у једначину $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ добија се $2 + a + b + c = 0$, $2 + a - b + c = 0$ и $4 + 2a + c = 0$. Решења система су $a = -2$, $b = 0$, $c = 0$. Једначина круга је $x^2 + y^2 - 2x = 0$, односно $(x-1)^2 + y^2 = 1$;

б) $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$; в) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$; г) $\left(x - \frac{23}{10}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{1769}{100}$.

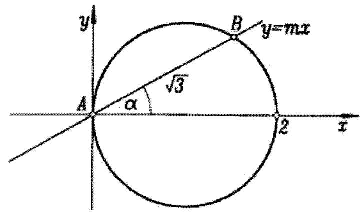
820. $x^2 + (y+5)^2 = 25$.

821. Дати кругови се секу у тачкама $A(3,-1)$ и $B(-1,3)$; једначина заједничке тетиве је $x + y - 2 = 0$.

822. Једначина круга је $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$, па је $C(2,4)$. Круг сече x-осу (в. слику) у тачкама $A(-1,0)$ и $B(5,4)$. Површина троугла ABC је $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Троугао ABC је једнакокраки, а једначина праве AC је $3y - 4x - 4 = 0$, па је $\angle A = \angle B = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \approx 53°08'$. Следи да је $\angle C = 180° - 2 \cdot \angle A \approx 75°44'$. **823.** $x^2 + y^2 - 8y = 0$.



Сл. уз зад. 822



Сл. уз зад. 824

824. Права $y = mx$ сече дати круг у тачкама $A(0,0)$ и $B(x_1, y_1)$. Пошто је (в. слику) $AB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{3}$, то је $x_1^2 + y_1^2 = 3$ (1). С друге стране, тачка B је на кругу, па је $(x_1 - 1)^2 + y_1^2 = 1$ (2). Решавањем система једначина (1), (2) добијамо $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (услов је да је $m > 0$). На крају, $m = \operatorname{tg} \alpha = y_1/x_1 = \sqrt{3}/3$.

825. $r = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot (-5) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$, па је једначина круга $x^2 + (y+5)^2 = 25$.

826. Растојање тачке C од дате праве је $\sqrt{29}$, па је полупречник траженог круга по Питагориној теореми једнак $\sqrt{29 + 3^2} = \sqrt{38}$. Једначина тог круга је $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$.

827. Једначина датог круга је $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$, а његов центар је тачка $O(-2,2)$. Једначина

$$\frac{|-2 - 2(\lambda+2) - \lambda - 4|}{\sqrt{1 + (\lambda+2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

има два решења: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -15/7$.

828. а) $A(-5,-4)$, $B(4,5)$; б) $A(4,5)$, $B(5,4)$; в) $A(-6,-2)$, $B(-4,-4)$.

829. а) Права сече круг у тачкама $A(3,-1)$ и $B(2,-2)$; б) права додирује круг у тачки $C(-4,6)$; в) права и круг немају заједничких тачака.

830. а) Ако је тангента паралелна датој правој, њен коефицијент правца је $k = -\frac{1}{2}$, па су једначине тангенти $y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$. б) $y = 2x \pm 5$. в) Из $\operatorname{tg} \varphi = \left| \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$ следи $\left|k_1 + \frac{1}{2}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}k_1\right|$, односно $k_1' = \frac{1}{3}$ и $k_1'' = -3$. Тражени парови тангената су $y = \frac{1}{3}x \pm \frac{5\sqrt{2}}{3}$ и $y = -3x \pm 5\sqrt{2}$.

831. а) За централни круг $x^2 + y^2 = r^2$ једначина тангенте у тачки додира $M(x_1, y_1)$ гласи: $xx_1 + yy_1 = r^2$. У датом задатку за $x_1 = 1$, $y_1 = -2$ једначина тангенте је $x - 2y - 5 = 0$. б) За круг дат у облику $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ једначина тангенте у тачки додира $M(x_1, y_1)$ гласи: $xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}a(x + x_1) + \frac{1}{2}b(y + y_1) + c = 0$. У датом задатку за $x_1 = 0$, $y_1 = 3$, једначина тангенте је $2x - 3y + 9 = 0$. в) $2x + y - 10 = 0$; г) $4x + 3y - 35 = 0$; д) $4y - 3x + 11 = 0$; ђ) $x - y - 1 = 0$.

832. а) Како тангента пролази кроз тачку $M(7,1)$, њена једначина је $y-1=k(x-7)$, односно $y=kx+1-7k$. Добијена права је тангента (централног) круга $x^2+y^2=r^2$ ако је $r^2(1+k^2)=n^2$, тј. $25(1+k^2)=(1-7k)^2$, одакле је $k_1=-\frac{3}{4}$, $k_2=\frac{4}{3}$, па су једначине тангената: $3x+4y-25=0$, $4x-3y-35=0$.

б) *Први начин*: Једначина круга се може написати у облику $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, па су његове тангенте облика $(x-4)(x_1-4)+(y-2)(y_1-2)=4$. Тачка $M(0,0)$ припада тангенти, па је $(x_1-4)\cdot(-4)+(y_1-2)\cdot(-2)=4$ (1). С друге стране, тачка (x_1,y_1) припада кругу, па је $x_1^2+y_1^2-8x_1-4y_1+16=0$ (2). Решавањем система једначина (1), (2) добијамо решења: $(4,0)$ и $\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$, па тражене тангенте имају једначине $y=0$ и $y=\frac{4}{3}x$.

Други начин: Све праве које садрже координатни почетак су облика $y=kx$ или $x=0$. Како права $x=0$ није тангента круга k, то су тражене тангенте облика $y=kx$. Заменом $y=kx$ у једначину круга добијамо квадратну једначину $(1+k^2)x^2-(8+4k)x+16=0$, чија је дискриминанта једнака нули за $k=0$ или $k=\frac{4}{3}$. Дакле, тражене тангенте су $y=0$ и $y=\frac{4}{3}x$.

в) $x+2y=2$, $2x+y=-5$; г) $y-8=(2\pm\sqrt{3})(x-8)$; д) $3x-4y+1=0$, $x=1$.

833. а) Коефицијент правца тангенте круга у тачки M је $k=-\frac{4}{3}$, па је коефицијент правца нормале круга у тачки M: $k_1=-\frac{1}{k}=\frac{3}{4}$. Једначина нормале је $y-5=\frac{3}{4}(x-2)$, тј. $3x-4y+14=0$; б) $4x-3y=0$; в) $x-y+1=0$.

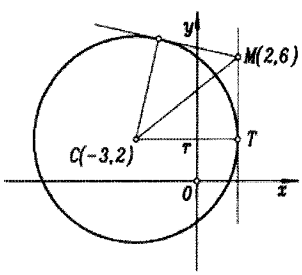
834. а) $2x-y+5=0$, $2x-y-5=0$; б) $-4x+3y=23$, $4x-3y=27$.

835. а) $x-y-2\sqrt{2}=0$, $x-y+2\sqrt{2}=0$; б) $x+3y=25$, $x+3y=5$.

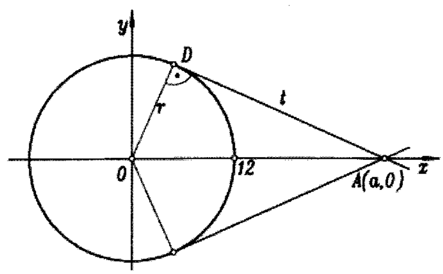
836. а) По Питагориној теореми дужина тангенте MT је (в. слику)

$$MT=\sqrt{MC^2-r^2}=\sqrt{(2+3)^2+(6-2)^2-25}=4;$$

б) 3; в) $\sqrt{10}$. **837.** $x+2y+5=0$.



Сл. уз зад. 836



Сл. уз зад. 855

838. а) *Први начин*: Из $MA=MB=MC$ следи $MA^2=MB^2=MC^2$, па је

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y+1)^2.$$

Решавајући овај систем налазимо $x=\frac{11}{10}$, $y=-\frac{1}{10}$, па је $M\left(\frac{11}{10},-\frac{1}{10}\right)$. Дужина полупречника је

$$r=AM=\sqrt{\left(1-\frac{11}{10}\right)^2+\left(2+\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{10}.$$

Други начин: Једначина описаног круга може се представити у облику $x^2+y^2+mx+ny+p=0$. Тачке A, B и C припадају овом кругу, па је

$$m+2n+p=-5, \quad -m+p=-1, \quad 3m-n+p=-10.$$

Решавањем овог система добијамо једначину описаног круга.

б) $M(-4,-1)$, $r=5$; в) $M(-3,-2)$, $r=5$; г) $M(3,4)$, $r=5$; д) $M(2,0)$, $r=\sqrt{5}$.

839. $(x+3)^2+(y+1)^2=25$.

840. Дати круг се може представити у облику $(x-2)^2+y^2=9$, па је његов центар тачка $C(2,0)$, а полупречник $r_1=3$. Два круга се додирују споља ако и само ако је збир њихових полупречника једнак одстојању центара. Како је $AC=5$, то је полупречник траженог круга $r=2$, па је његова једначина $(x-5)^2+(y-4)^2=4$.

841. Права гради са x-осом угао од $135°$ ако је њен угаони коефицијент једнак -1. Дакле, једначине ових тангенти су облика $y=-x+b$. Вредност параметра b добија се из услова да права $y=-x+b$ и круг $x^2+y^2=2$ имају тачно једну заједничку тачку. Тако се добија $b=2$ или $b=-2$, а додирне тачке су $A_1(1,1)$ и $A_2(-1,-1)$.

842. $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.

843. Нека је тражена тачка $M(p,q)$. Тада је

$$p^2+q^2=5 \tag{1}$$

$$\frac{|p+q+5|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{(p+3)^2+(q+2)^2}. \tag{2}$$

Решавањем система једначина (1), (2) добијамо два решења $M_1(-2,-1)$, $M_2(1,2)$.

844. Једначина праве AB је $x+5y-9=0$, па је одстојање средишта $S(1,3)$ круга ове праве $d=\dfrac{|1+15-9|}{\sqrt{1^2+25^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{26}}$. Дуж се налази ван круга ако је $r<d$, тј. $r<\dfrac{7}{\sqrt{26}}$.

845. $S(2\sqrt{5},\sqrt{5})$.

846. Центар датог круга је $C(1,0)$, па је једначина праве AC: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Како је тражена тетива управна на AC и садржи тачку A, једначина праве одређене том тетивом је $4x-2y-9=0$. **847.** $y-7=-\frac{2}{3}(x-5)$.

848. Средиште круга је тачка $S(1,0)$, а једначина праве ST: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Тражена права је нормална на ST, а садржи тачку T, па је њена једначина $y+\frac{1}{2}=2(x-2)$, тј. $y=2x-\frac{9}{2}$.

849. Заменом $y=kx$ у једначину датог круга добијамо квадратну једначину $(1+k^2)x^2-10x+16=0$. а) Права сече круг ако је дискриминанта $D=b^2-4ac>0$, тј. $9-16k^2>0$, односно $|k|<\frac{3}{4}$. б) Права додирује круг ако је $D=0$, тј. $|k|=\frac{3}{4}$. в) Права нема заједничких тачака са кругом ако је $D<0$, тј. $|k|>\frac{3}{4}$.

850. За $n\in(4-\sqrt{75},4+\sqrt{75})$.

851. Одстојање центра датог круга од дате праве је 10, па како је полупречник круга 5, то праву треба транслирати за 5 или за 15. Једначине добијених тангенти су: $3x+4y-25=0$ и $3x+4y+25=0$.

852. а) Заменом $y=mx$ у једначину круга добијамо квадратну једначину $(1+m^2)x^2-10x+16=0$, чија је дискриминанта $D=4(9-16k^2)$. За $k=\frac{3}{4}$ или $k=-\frac{3}{4}$ је $D=0$ и права додирује круг; за $k\in\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ је $D>0$ и права сече круг у двема тачкама, а за $k\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$ је $D<0$ и права и круг немају заједничких тачака.

б) Права додирује круг за $n=-6$ или $n=2$, сече круг за $n\in(-6,2)$ и нема са кругом заједничких тачака за $n\in(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$.

853. Како је тангента круга нормална на додирни полупречник, тачку додира T налазимо у пресеку дате тангенте и праве $y = \sqrt{3}x$, која је на њој управна и садржи координатни почетак. Налазимо $T(1, \sqrt{3})$, па је полупречник круга $r = OT = 2$, а угао између OT и y-осе је $\frac{\pi}{6}$. Дужина траженог лука је $2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

854. Како тачка $A(2,1)$ припада правој p: $2x + y - 5 = 0$, центар S траженог круга биће на правој n која садржи тачку A и нормална је на p. Њена једначина је n: $x - 2y = 0$. Решавањем система: $x - 2y = 0$, $2x + y - 5 = 0$, налазимо координате тачке B, при чему је AB пречник. Налазимо $B(-6, -3)$. $S(-2, -1)$ је средиште дужи AB. Полупречник је $r = \overline{SA} = \sqrt{20}$. Једначина траженог круга је $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

855. Једначина круга је $x^2 + y^2 = 144$ (в. слику). Из правоуглог троугла OAD имамо $OA^2 = r^2 + l^2 = 12^2 + 35^2 = 1369$, па је $a = 37$. Једначине тангенти из тачке $A(37, 0)$ на дати круг су облика $y = kx + l$, где k и l налазимо из услова

$$0 = 37k + l \quad \text{и} \quad l^2 = 144(1 + k^2).$$

Добија се $k_{1,2} = \pm\frac{12}{35}$ и $l_{1,2} = \mp\frac{444}{35}$, па су једначине тангенти $12x + 35y - 444 = 0$ и $12x - 35y - 444 = 0$.

856. Тражени угао φ је угао између тангенти конструисаних из тачке P на дати круг. Тангенте су: $y = \frac{1}{3}(\sqrt{3}x - 8\sqrt{3})$ и $y = \frac{1}{3}(-\sqrt{3}x + 8\sqrt{3})$. Угао је $60°$. **857.** $\varphi = 90°$.

858. Пресечне тачка круга и праве су $M_1(3, 4)$ и $M_2(-3, -4)$. Једначине тангенти круга у тим тачкама су $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$, односно $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$. Како су коефицијенти правца тангенти $k_1 = -\frac{3}{4}$, а дате праве $k_2 = \frac{4}{3}$, то је $k_1k_2 = -1$ и права сече круг под правим углом.

859. а) Дате праве су симетричне у односу на x-осу и садрже тачку $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$. Дакле, центар траженог круга је на x-оси, па како круг садржи координатни почетак, његова једначина је облика $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Из услова додира круга и датих правих добијамо да је $r = -1$ или $r = 4$, па постоје два круга који садрже координатни почетак и додирују дате праве: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. б) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ или $\left(x - \frac{13}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{18}\right)^2 = \frac{25}{162}$.

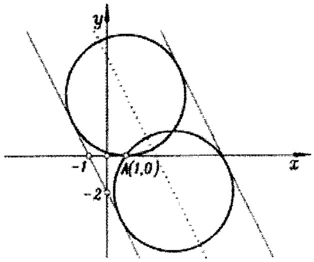
860. а) Очигледно је (в. слику) да је пречник траженог круга једнак одстојању датих паралелних правих. То одстојање једнако је одстојању неке тачке, на пример $B(-1, 0)$, једне праве од друге праве: $d = \dfrac{|-2 + 0 - 18|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 4\sqrt{5}$, па је $r = \frac{1}{2}d = 2\sqrt{5}$. Дакле, тражени круг има једначину $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 20$. Центар круга припада правој једнако удаљеној од датих правих и паралелној тим правим, тј. правој $2x + y - 8 = 0$. Из тог услова и из услова да тачка $A(1, 0)$ припада кругу добијамо систем једначина: $2x_0 + y_0 - 8 = 0$, $(1 - x_0)^2 + y_0^2 = 20$, чија су решења $(5, -2)$ и $\left(\frac{9}{5}, \frac{22}{5}\right)$, па постоје два круга са наведеним својствима: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$ и $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 20$. б) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

861. Нека је $S(p, q)$ центар траженог круга, а r његов полупречник. Тада је:

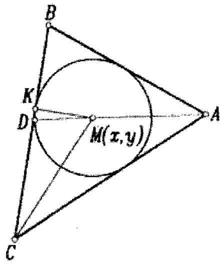
$$(p + 2)^2 + (q - 5)^2 = (p - 2)^2 + (q + 3)^2 \tag{1}$$

$$(p + 2)^2 + (q - 5)^2 = \frac{(3p + 4q - 19)^2}{3^2 + 4^2}. \tag{2}$$

Из (1) налазимо $p = 2q - 2$, што заменом у (2) даје квадратну једначину чија су решења $q_1 = 0$ и $q_2 = -10$. Одговарајуће вредности за p су $p_1 = -2$ и $p_2 = -22$. Из $r = CB$ налазимо $r_1 = 5$ и $r_2 = 25$. Дакле, постоје два круга са траженим својством: k_1:



Сл. уз зад. 860



Сл. уз зад. 863

$(x+2)^2+y^2=25$ и k_2: $(x+22)^2+(y+10)^2=625$. Додирна тачка праве и круга k_1 је $T_1(1,4)$, а праве и круга k_2 је $T_2(-7,10)$. **862.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

863. а) Нека је $D(x',y')$ тачка у којој симетрала унутрашњег угла A троугла ABC сече страницу BC (в. слику). Тада је

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(9-0)^2+(2-20)^2}}{\sqrt{(9+15)^2+(2+10)^2}}=\frac{3}{4}.$$

Координате тачке D су

$$x'=\frac{\frac{3}{4}\cdot(-15)}{1+\frac{3}{4}}=-\frac{45}{7},\quad y'=\frac{20+\frac{3}{4}\cdot(-10)}{1+\frac{3}{4}}=\frac{50}{7}.$$

Даље, како је $BC=15\sqrt{5}$, важи

$$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4},\quad \frac{BD+DC}{DC}=\frac{7}{4},\quad \frac{BC}{DC}=\frac{7}{4},$$

одакле је $DC=\frac{4}{7}\cdot 15\sqrt{5}=\frac{60}{7}\sqrt{5}$. Дакле, $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{12\sqrt{5}\cdot 7}{60\sqrt{5}}=\dfrac{7}{5}$, па су координате тачке M:

$$x=\frac{9+\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{45}{7}\right)}{1+\frac{7}{5}}=0,\quad y=\frac{2+\frac{7}{5}\cdot\frac{50}{7}}{1+\frac{7}{5}}=5.$$

Дужина полупречника MK уписаног круга може се одредити из релације $\frac{1}{2}BC\cdot MK=P(\triangle ACM)$, односно

$$\frac{1}{2}\cdot 15\sqrt{5}\cdot MK=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 20 & 1\\ -15 & -10 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix},$$

одакле је $MK=3\sqrt{5}$. б) Центар је тачка $M(0,1)$, а полупречник $r=\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

864. а) $x^2+y^2=25$; б) $5\pi:6$.

865. Једначине правих BC, односно AC, једноставно се одређују — BC: $y=-2x$, AC: $y=3x-10$. Једначина нормале из A на BC је $2y-x-5=0$, а нормале из B на AC је $3y+x-10=0$. Последње две праве секу се у тачки $H(1,3)$, која је ортоцентар троугла ABC. Како је $AH=\sqrt{(5-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{20}$, то је тражена једначина круга $(x-1)^2+(y-3)^2=20$.

866. $y=-2x$, $P=5$.

867. Ако су дате једначине кружних линија $(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2$ и $(x-p_2)^2+(y-q_2)^2=r_2^2$, њихово централно растојање је $C_1C_2=\sqrt{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2}$. Ако је:

1° $C_1C_2 > r_1 + r_2$ — кружне линије су једна ван друге;

2° $C_1C_2 = r_1 + r_2$ — кружне линије додирују се споља;

3° $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$ — кружне линије додирују се изнутра;

4° $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$ — кружне линије се секу;

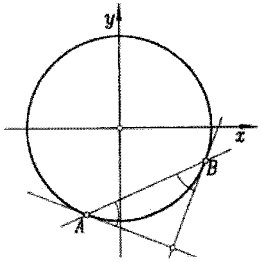
5° $0 < C_1C_2 < |r_1 - r_2|$ — једна кружна линија лежи у другој (ексцентричне су);

6° $C_1C_2 = 0$ — кружне линије су концентричне

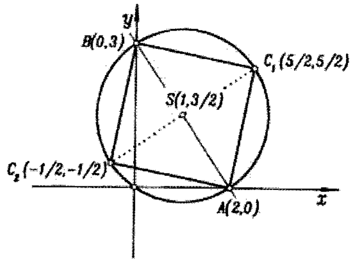
У овом задатку је: а) $C_1C_2 = \sqrt{17}$, $r_1 + r_2 = 3$, односно $C_1C_2 > r_1 + r_2$, што значи да се кружнице налазе једна ван друге; б) $C_1C_2 = r_1 + r_2 = 5$ — додирују се споља; в) додирују се изнутра; г) секу се; д) ексцентричне су; ђ) концентричне су.

868. $d = 2$.

869. а) Дата права сече круг у тачкама $A(-1,-2)$ и $B(2,-1)$ (в. слику). Угао пресека праве и круга је угао између праве и тангенте круга у пресечној тачки, на пример у тачки A. Тангента круга у тачки A има једначину $-x - 2y = 5$. Коефицијент правца дате праве је $k_1 = \frac{1}{3}$, а тангента је $k_2 = -\frac{1}{2}$, па је $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right| = 1$, одакле налазимо да је $\varphi = 45°$; б) 30°; в) 90°.



Сл. уз зад. 869



Сл. уз зад. 872

870. а) Једначине кругова се могу написати у облику $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Како је одстојање центара веће од збира полупречника датих кругова, то ови кругови имају четири заједничке тангенте (две унутрашње и две спољашње). Једначине тангенти су облика $y = kx + n$ или $x = b$.

(1) Из услова $r^2(1 + k^2) = (kp - q + n)^2$ да права $y = kx + n$ додирује дате кругове, налазимо

$$-3k^2 - n^2 - 4kn + 4k + 2n = 0, \quad \text{односно} \quad 5k^2 - n^2 + 4kn + 4k - 2n + 8 = 0.$$

Добијамо: $n = \dfrac{2(1+k^2)}{1-2k}$ и $\dfrac{1}{(1-2k)^2}\cdot k(12k^2 - 7k + 12) = 0$, одакле је $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{4}{3}$, $k_3 = -\frac{3}{4}$, па су једначине тангенти: $y = 2$, $4x - 3y - 10 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$.

(2) Међу правим облика $x = m$ добија се четврта тангента $x = 1$.

б) $y = x + 2$ и $y = -x - 2$; в) $y = 2x - 6$ и $y = -2x - 6$.

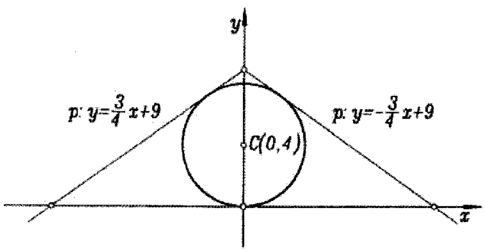
871. Једначина круга описаног око троугла ABC је облика $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Заменом координата тачака A, B и C у ову једначину добијамо систем једначина:

$$5m + 6n + p = -61, \quad 2m + 7n + p = -53, \quad -3m + 2n + p = -13.$$

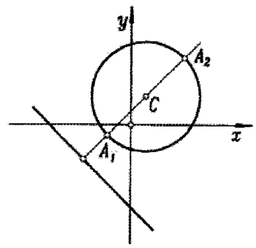
Налазимо $m = -4$, $n = -4$, $p = -17$, па је једначина круга $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$. Једноставно се проверава да и координате тачке D задовољавају ову једначину.

872. Пресеци дате праве са координатним осама су тачке $A(2, 0)$ и $B(0, 3)$. Координате тачке C (има два решења — в. слику) добијају се у пресеку симетрале s: $6y - 4x - 5 = 0$ дужи AB и круга k: $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ описаног над дужи AB као пречником. Решавањем система једначина круга и симетрале добијамо $C'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $C''\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

873. Центар уписаног круга припада y-оси (в. слику) и једнако је удаљен од x-осе и од праве p. Дакле, $r = \dfrac{|-44+36|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, одакле је $r = 4$, а једначина уписаног круга је $x^2 + (y-4)^2 = 16$.



Сл. уз зад. 873



Сл. уз зад. 874

874. Дата једначина круга се може написати у облику $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, па је средиште круга тачка $C(1, 2)$. Једначина нормале из C на дату праву је $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$. Ова нормала сече дати круг у тачкама (в. слику) $A_1(-2, -2)$ и $A_2(4, 6)$. Одстојања тачака A_1 и A_2 од праве $3x + 4y + 34 = 0$ су

$$d_1 = \frac{|-6-8+34|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4 \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{|12+24+34|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 14.$$

Дакле, тачка најближа датој правој на датом кругу је тачка $A_1(-2, -2)$.

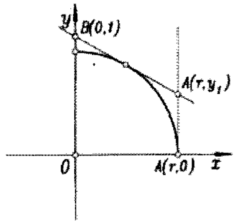
875. $A(8, 2)$, $B(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **876.** $P = 24$.

877. Означимо са r_1, r_2, r_3 и S_1, S_2, S_3 дужине полупречника, односно средишта кругова k_1, k_2, k_3, а са r и $S(p, q)$ дужину полупречника и средиште траженог круга. Из услова да тај круг сече дате кругове под правим углом имамо: $SS_1^2 = r^2 + r_1^2$, $SS_2^2 = r^2 + r_2^2$, $SS_3^2 = r^2 + r_3^2$. Одатле добијамо

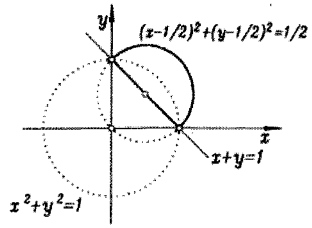
$$\begin{aligned}(p-1)^2 + (q-2)^2 &= r^2 + 7\\ (p-3)^2 + q^2 &= r^2 + 5\\ (p+4)^2 + (q+1)^2 &= r^2 + 9.\end{aligned}$$

Решавањем овог система једначина налазимо: $p = -\frac{1}{16}$, $q = -\frac{25}{16}$, $r^2 = \frac{1746}{256}$, па је једначина траженог круга $\left(x + \frac{1}{16}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{16}\right)^2 = \frac{1746}{256}$.

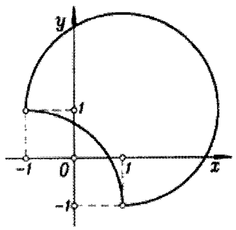
878. Нека је $B(0, l)$ пресек тангенте и y-осе и $T(r, y_1)$ (в. слику). Једначина праве BT је $y = \frac{1}{r}(y_1 - l)x + l$. Из услова додира ове праве и круга $r^2\left[1 + \left(\dfrac{y_1 - l}{r}\right)^2\right] = l^2$ добијамо:



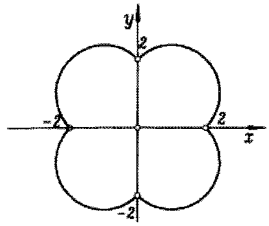
Сл. уз зад. 878



Сл. уз зад. 879 а)



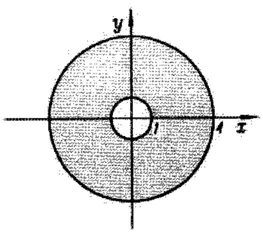
Сл. уз зад. 879 б)



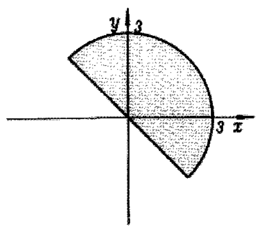
Сл. уз зад. 879 в)

$l = \dfrac{r^2 + y_1^2}{2y_1}$ (1). Површина трапеза је $k^2 = \frac{1}{2}(l+y_1)\cdot r$, одакле је $l = \dfrac{2k^2 - y_1 r}{r}$ (2). Из (1) и (2) добијамо једначину $3y_1^2 r - 4k^2 y_1 + r^3 = 0$, чија су решења $y_{1,2} = \dfrac{2k^2 \pm \sqrt{4k^4 - 3r^4}}{3r}$.

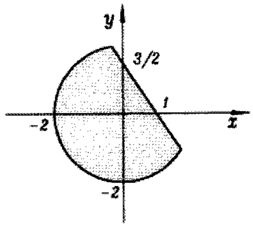
879. а) За $x^2+y^2 \geq 1$ имамо $x^2+y^2-1+(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$, тј. $x^2-x+y^2-y = 0$, односно $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. За $x^2+y^2 \leq 1$ добија се $1-x^2-y^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$, тј. $x+y=1$ (в. слику). **880.** Видети слику.



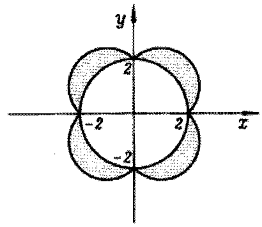
Сл. уз зад. 880 а)



Сл. уз зад. 880 б)



Сл. уз зад. 880 в)



Сл. уз зад. 880 г)

881. Геометријско место тачака из којих се дата дуж види под правим углом је круг конструисан над том дужи као пречником. Дакле, тражена тачка је други пресек (један је тачка A) кругова конструисаних над дужима AB и AC као пречницима. Пошто је средиште дужи AB тачка $S_1\left(3, \frac{3}{2}\right)$ и $AB = \sqrt{5}$, а средиште дужи AC тачка $S_2\left(0, \frac{7}{2}\right)$ и $AC = \sqrt{17}$, поменути кругови су k_1: $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ и k_2: $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$, а њихов пресек, различит од тачке A, је тачка $D(2,2)$.

882. Права p сече круг k у тачкама $A(2,-1)$ и $B(-5,-2)$. Једначине тангенти на круг у тачкама A и B су, редом, $y+1 = \frac{4}{3}(x-2)$ и $y+2 = -\frac{3}{4}(x+5)$. Пресек ових тангенти је тачка $C(-1,-5)$. Средиште круга k је тачка $S(-2,2)$. Тражена површина пресека кругова је $\dfrac{25\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{50}{4}\pi - 25\right) = \dfrac{25}{2}(\pi - 1)$.

883. а) Биће круг за $d > -10$; б) Права AB има једначину $x + 5y - 9 = 0$. Дуж ће бити изван круга ако је $-10 < d < -\frac{211}{26}$.

884. За $\sqrt{10} < r < 4$.

885. а) Из $3\sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ следи $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 72$; б) $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 20$; в) $21x^2 + 21y^2 - 124x - 42y + 85 = 0$.

886. а) Дата једначина, после деобе са 4225 постаје $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, а како је то једначина облика $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ очитавамо полуосе: $a = 13$, $b = 5$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 12$, па су координате жижа: $F_1(-12,0)$, $F_2(12,0)$. Нумерички ексцентрицитет је $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13}$.
б) $a = 5$, $b = 3$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $e = \dfrac{4}{5}$.

887. $a = 3$, $b = 2$, $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{4}{3}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Једначине директриса су: $x = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ и $x = -\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. **888.** $A_1(5,2)$, $A_2(-5,2)$, $A_3(5,-2)$, $A_4(-5,-2)$.

889. Дате тачке припадају елипси (E): $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Заменом њихових координата добијамо систем:

$$225b^2 + 144a^2 = 25a^2b^2, \quad 125b^2 + 36a^2 = 9a^2b^2.$$

Решења система су $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, па је тражена једначина елипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$.

890. а) За $a = 3$ и $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, добијамо $b^2 = \frac{27}{4}$. Једначина елипсе је $27x^2 + 36y^2 = 243$. б) Решавањем система $a + b = 5$, $a^2 - b^2 = 25$, добијамо $a = 13$, $b = 12$. Једначина елипсе је $144x^2 + 169y^2 = 24336$. в) $9x^2 + 36y^2 = 324$. г) Решавањем система $15b^2 + a^2 = a^2b^2$, $a^2 - b^2 = 16$, добијамо $a^2 = 20$, $b^2 = 4$, односно $x^2 + 5y^2 = 20$.

891. Решавањем система једначина $a + c = 7$, $a - c = 1$, добијамо $a = 4$, $b = \sqrt{7}$, односно $7x^2 + 16y^2 = 112$.

892. а) Ако се мала оса види из жиже под углом од 90°, тада је $b = c$. Решавањем система $b = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a = \sqrt{6}$, добијамо $a^2 = 6$, $b^2 = 3$, односно: $3x^2 + 6y^2 = 18$.

б) Растојање између крајева велике и мале осе је $\sqrt{a^2 + b^2}$, па је $\sqrt{a^2 + b^2} = 2c$, тј. $3a^2 - 5b^2 = 0$. Тражена једначина је $9x^2 + 15y^2 = 135$.

893. Решења система једначина $x^2 + 2y^2 = 18$, $y = x$, су $x_1 = y_1 = \sqrt{6}$ и $x_2 = y_2 = -\sqrt{6}$. Растојање тачака $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ и $B(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ је $4\sqrt{3}$.

894. Како је $\left(a + \dfrac{c}{a}x\right)\left(a - \dfrac{c}{a}x\right) = b^2$, добијамо: $x^2 = a^2$, тј. $x_1 = a$ и $x_2 = -a$. Тачке $M_1(a,0)$ и $M_2(-a,0)$ задовољавају услове задатка.

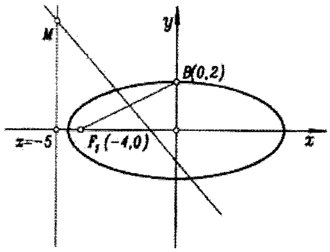
895. а) $a^2 = \frac{35}{2}$, $b^2 = \frac{35}{3}$; б) $a^2 = 100$, $b^2 = 25$.

896. $M\left(2, -\frac{5}{3}\right)$, r_1: $5x + 12y + 10 = 0$, r_2: $x - 2 = 0$, $r_1 = MF_1 = \frac{13}{3}$, $r_2 = MF_2 = \frac{5}{3}$.

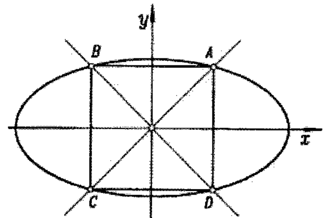
897. По услову задатка је $r_2 = 4r_1$, тј. $a - \dfrac{c}{a}x_1 = 4\left(a - \dfrac{c}{a}x_1\right)$, одакле је $3a + 5\dfrac{c}{a}x_1 = 0$. Из једначине елипсе налазимо: $a = 10$, $b = 6$, $c = 8$, па је $x_1 = -\frac{15}{2}$. Тражене тачке су: $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ и $M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

898. а) $M_1(5,2)$, $M_2(-5,-2)$; б) $M_1(3,-3)$, $M_2\left(\frac{69}{13}, \frac{21}{13}\right)$.

899. Полуосе дате елипсе су $a = \sqrt{20}$ и $b = 2$. Лева жижа F_1 има координате $(-c, 0)$, при чему је $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Произвољна тачка M на правој $x = -5$ има координате $M(-5, y)$. Из услова $MF_1 = MB$ имамо (в. слику): $\sqrt{(-5+4)^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (y-2)^2}$, одакле је $y = 7$. Дакле, тражена тачка је $M(-5, 7)$.



Сл. уз зад. 899



Сл. уз зад. 905

900. Дужина тетиве једнака је двострукој вредности параметра: $M_1M_2 = \dfrac{2b^2}{a}$.

901. Странице правоугаоника су паралелне осама елипсе. Површина је $68\frac{4}{7}$.

902. а) $n_1 = 5$, $n_2 = -5$; б) $-5 < n < 5$; в) $n \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$. **903.** $P = 16$.

904. Ако је страница квадрата $2d$, тада теме $C(d, d)$ лежи на елипси па добијамо: $2d = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

905. Темена квадрата морају да припадају правим $y = x$ и $y = -x$ (в. слику). Решења система једначина $x^2 + 4y^2 = 36$, $x = y$, су $\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ и $\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$, па је $A\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$. Страница квадрата је $a = 2 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} = \dfrac{12}{5}\sqrt{5}$. *Напомена*: Видети решење задатка 904. Заменом за $a = 6$ и $b = 3$, добијамо исти резултат.

906. Једначина тангенте елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ у тачки додира $A(x_1, y_1)$ гласи: $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$. У овом задатку је: а) $12 \cdot 2x + 16 \cdot (-3)y = 12 \cdot 16$, тј. $x - 2y - 8 = 0$; б) $2x + y - 7 = 0$; в) $2\sqrt{2}x + 9y - 11\sqrt{2} = 0$; г) $x - 2y - 8 = 0$; д) $x + 3y - 8 = 0$.

907. а) *Прво решење*: Како тангента пролази кроз тачку $A(12, -3)$, њена једначина је $y + 3 = k(x - 12)$, односно $y = kx - (12k + 3)$. Заменом вредности за k и $n = -(12k + 3)$ у услов додира $a^2k^2 + b^2 = n^2$ добијамо $112k^2 + 72k - 9 = 0$, одакле је $k_1 = -\frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{3}{28}$, па су једначине тангенти: $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x - 28y - 120 = 0$.

Друго решење: Једначина тангенте на елипсу је облика $\dfrac{x_0x}{32} + \dfrac{y_0y}{18} = 1$. Тачка $A(12, -3)$ припада овој правој па важи $\dfrac{12x_0}{36} - \dfrac{3y_0}{18} = 1$ (1). С друге стране, тачка (x_0, y_0) припада елипси, па је $\dfrac{x_0^2}{32}+\dfrac{y_0^2}{18}=1$. Решавајући систем једначина (1) и (2), налазимо два решења: $(4,3)$ и $\left(\frac{4}{5},-\frac{21}{5}\right)$. Одавде добијамо једначине обе тангенте: $\dfrac{4x}{32}+\dfrac{3y}{18}=1$ и $\dfrac{\frac{4}{5}x}{32}-\dfrac{\frac{21}{5}y}{18}=1$, односно $3x+4y-24=0$ и $3x-28y-120=0$.

б) $y=4$, $16x-15y-100=0$; в) $2x+3y-25=0$, $-3x+8y-50=0$; г) $9x+5y-50$, $x+3y+14=0$; д) $y=3$, $12x+7y+51=0$; ђ) $x+y+7=0$, $203x+29y+149=0$.

908. Задатак има два решења: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $\left(4,\frac{9}{5}\right)$ и $\dfrac{16x^2}{225}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $\left(\frac{9}{4},\frac{16}{5}\right)$.

909. а) $y=2x\pm12$; б) $y=-x\pm5$; в) $y=-\frac{3}{2}x\pm5$.

910. а) $12x-13y\pm169=0$; б) $x+y\pm5=0$; в) $x+2y\pm2\sqrt{10}=0$; г) $2x+3y\pm10=0$.

911. а) $y_1=\frac{3}{2}$; једначина тангенте: $y=\frac{1}{2}x+2$; једначина нормале: $y=-2x-\frac{1}{2}$; б) $4x-5y-40=0$, $5x+4y-9=0$.

912. а) Посматрајмо систем једначина

$$x+y-8=0,\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{1}$$

$$x+3y+16=0,\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{2}$$

У систему (1) имамо $x=8-y$, па је $b^2(8-y)^2+a^2y^2=a^2b^2$. Пошто права додирује елипсу, дискриминанта последње једначине једнака је нули, одакле добијамо $a^2+b^2=64$. На сличан начин из система (2) добијамо $a^2+9b^2=256$. Из последње две једначине налазимо да је $a^2=40$, $b^2=24$, па је тражена једначина $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{24}=1$.

б) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

913. Из $a^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+b^2=10^2$ и $a^2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^2+b^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2$ налазимо $a^2=40$, $b^2=10$, па је $a=2\sqrt{10}$, $b=\sqrt{10}$.

914. а) Искористићемо чињеницу да права $Ax+By+C=0$ додирује елипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ако и само ако је $A^2a^2+B^2b^2=C^2$. У нашем случају добијамо два услова $5A^2+4B^2=C^2$ и $4A^2+5B^2=C^2$. Решавањем овог система једначина добијамо $A^2=B^2=\frac{1}{9}C^2$. Како се коефицијент C ($C\neq0$) може изабрати произвољно, узмимо да је $C=3$. Дакле, $A=\pm1$, $B=\pm1$. Према томе, заједничке тангенте су следеће четири праве: $x+y+3=0$, $x+y-3=0$, $x-y+3=0$ и $x-y-3=0$.

б) $2x+y+5=0$, $2x+y-5=0$, $2x-y+5=0$, $2x-y-5=0$.

915. а) *Први начин*: Из услова додира праве $y=kx+n$ и елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, који гласи $a^2k^2+b^2=n^2$, имамо да је $4a^2+36=100$, тј. $a^2=16$, тако да је $a=4$.

Други начин: Ако вредност $y=10-2x$ заменимо у једначину елипсе, добијамо $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(10-2x)^2}{36}=1$, тј. квадратну једначину $(36+4a^2)x^2-40a^2x+(100-36a^2)=0$. Неопходан и довољан услов да права додирује елипсу је да дискриминанта ове квадратне једначине буде једнака нули. Из $D=0$ добијамо $a=4$. б) $b=\sqrt{10}$.

916. Ако је дата елипса (E): $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ и тачка $M(x,y)$, тада је

M у унутрашњости елипсе	ако је $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2<0$;
M на елипси	ако је $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$;
M у спољашњости елипсе	ако је $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2>0$.

Одређивањем знака израза $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ за дате тачке установљавамо да су тачке A и E на елипси, B и G у унутрашњости елипсе, а C и D ван елипсе.

917. Једначина елипсе је облика $\dfrac{(x+2)^2}{a^2} + \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$. Из услова да тачке A и B припадају елипси, налазимо $a^2 = 40$, $b^2 = 10$.

918. $B\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{12\sqrt{3}}{7}\right)$, $C\left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. **919.** $P = 9$. **920.** $P = \dfrac{27}{2}$.

921. Како је коефицијент правца дате праве $k_1 = \frac{1}{5}$, коефицијент правца k_2 тражене праве се добија из услова $\left|\dfrac{\frac{1}{5} - k_2}{1 + \frac{1}{5}k_2}\right| = 1$, одакле је $k_2 = \frac{3}{2}$ или $k_2 = -\frac{2}{3}$. Дакле, једначина тангенте је облика $y = \frac{3}{2}x + n$, односно $y = -\frac{2}{3}x + n$, где n налазимо из услова $n^2 = k^2a^2 + b^2$. Тражене тангенте су $y = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{217}{3}}$ и $y = -\frac{2}{3}x \pm \frac{14}{3}$.

922. Услов задатка задовољавају четири тангенте: $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0$.

923. а) Права паралелна датој правој има једначину облику $y = \frac{2}{3}x + n$. Из услова додира ($a^2k^2 + b^2 = n^2$) ове праве и дате елипсе ($a^2 = 4$, $b^2 = 1$, $k = \frac{2}{3}$) налазимо $n = \frac{5}{3}$ или $n = -\frac{5}{3}$. За $n = \frac{5}{3}$ права $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ додирује елипсу у тачки $T_1\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$, а за $n = -\frac{5}{3}$ права $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ у тачки $T_2\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Одстојање тачака T_1 и T_2 од праве $y = \frac{2}{3}x + 10$ су $d_1 = \dfrac{25}{\sqrt{13}}$ и $d_2 = \dfrac{35}{\sqrt{13}}$, па пошто је $d_1 < d_2$, тражена тачка је $T\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$. б) $T(4, 1)$.

924. Једначина тангенте дате елипсе у тачки $A_1\left(3, \frac{8}{5}\right)$ је $3x + 10y - 25 = 0$, а у тачки $A_2\left(4, \frac{6}{5}\right)$ је $8x + 15y - 50 = 0$. Прва тангента сече x-осу у тачки $P\left(\frac{25}{3}, 0\right)$, а друга у тачки $Q\left(\frac{25}{4}, 0\right)$. Тангенте се секу у тачки $R\left(\frac{25}{7}, \frac{10}{7}\right)$. Површина троугла PQR је $\frac{125}{84}$.

925. $x + y = 8$, $P = 32$. **926.** $P = \frac{128\sqrt{7}}{7}$.

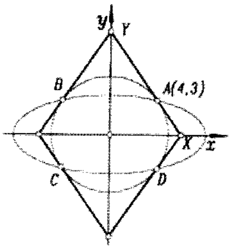
927. а) $A(2, 0)$, $B\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. б) t_A: $x = 2$, t_B: $2\sqrt{2}y - x = 2$, t_C: $2\sqrt{2}y + x = -2$. в) Тангенте t_A и t_B секу се у тачки $C_1(2, \sqrt{2})$, тангенте t_B и t_C у тачки $A_1(-2, 0)$ и тангенте t_C и t_A у тачки $B_1(2, -\sqrt{2})$. Површина троугла $A_1B_1C_1$ је $P = \frac{1}{2}h_{A_1} \cdot B_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

928. Површина четвороугла је, због симетрије у односу на координатне осе, четири пута већа од површине троугла који тангента образује са координатним осама у првом квадранту (в. слику). Заједничка тачка елипсе и круга у првом квадранту је $A(4, 3)$, једначина тангенте круга у тој тачки $3x + 4y = 25$. Ова права сече осе у тачкама $X\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ и $Y\left(0, \frac{25}{4}\right)$, па је површина троугла OXY једнака $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{3} \cdot \dfrac{25}{4} = \dfrac{625}{24}$, а површина четвороугла $ABCD$ је $4 \cdot \dfrac{625}{24} = \dfrac{625}{6}$.

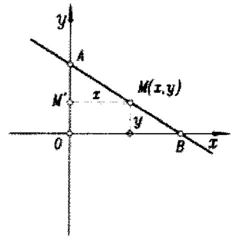
929. Ако је $M(x, y)$ произвољна тачка геометријског места, тада је $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x - 16|$, одакле је $3x^2 + 4y^2 = 192$.

930. Ако је $A(x_1, y_1)$ произвољна тачка на кругу, а $M(x, y)$ тачка (траженог) геометријског места, тада је $y_1 = \frac{5}{3}y$ и $x_1 = x$. Како је $x_1^2 + y_1^2 = 25$, заменом добијамо елипсу $9x^2 + 25y^2 = 225$.

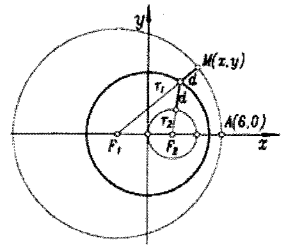
931. (В. слику). $\dfrac{M'A}{AM} = \dfrac{y}{MB}$, тј. $\dfrac{\sqrt{64 - x^2}}{8} = \dfrac{y}{4}$. После сређивања добија се елипса $x^2 + 4y^2 = 64$.



Сл. уз зад. 928



Сл. уз зад. 931



Сл. уз зад. 932

932. Нека су $F_1(-2,0)$ и $F_2(2,0)$ средиште датих кругова и $M(x,y)$ тачка која припада траженом геометријском месту (в. слику). Тада је $r_1 - F_1M = F_2M - r_2$, тј. $F_1M + F_2M = r_1 + r_2$. По дефиницији геометријског места тачака чији је збир одстојања од две сталне тачке константан је елипса. Једначина ове елипсе је облика $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, а фокуси су $F_1(-r,0)$ и $F_2(r,0)$. Пошто тачка $A(5,0)$ припада траженом геометријском месту, видимо да је $a = 5$, $b^2 = a^2 - 4 = 21$. Дакле, тражено геометријско место тачака је елипса $21x^2 + 25y^2 = 525$.

933. Одстојања фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ до тангенте $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ су

$$d_1 = \frac{\left|-\dfrac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

па је

$$d_1d_2 = \frac{\left|\dfrac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left|\dfrac{(a^2-b^2)x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left|\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{b^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}$$

$$= \frac{\left|1 - \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{b^2x_0^2}{a^4}\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left|\dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{b^2x_0^2}{a^4}\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = b^2\frac{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = b^2.$$

934. а) $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$; б) $e = \frac{5}{3}$; в) $y = \pm\frac{4}{3}x$, $x = \pm\frac{9}{5}$.

935. а) Како је $2a = 8$, то је $a = 4$ и $10 = F_1F_2 = 2\sqrt{a^2+b^2}$, то је $b = 3$; б) $a = 5$, $b = \sqrt{75}$; в) $a = 3$, $b = \sqrt{2}$.

936. а) Из система $a^2 + b^2 = 100$, $144b^2 - 45a^2 = a^2b^2$ добијамо да је $a^2 = 64$ и $b^2 = 36$. б) $2x^2 - 9y^2 = 18$. в) Како је $a = 5$ и $a^2 + b^2 = 4a^2$, то је $b^2 = 75$.

937. а) $a^2 = 1$, $b^2 = 3$; б) $a^2 = \frac{5}{8}$, $b^2 = \frac{5}{3}$.

938. Положај тачке $M(x,y)$ у односу на хиперболу дат је са:

M је у области хиперболе	ако је $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 > 0$;
M је изван области хиперболе	ако је $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 < 0$;
M је на хиперболи	ако је $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Одређивањем знака израза $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ за дате тачке установљавамо да је тачка A у области хиперболе, тачка B изван хиперболе, а тачка C на хиперболи.

939. $r_1 = 2\sqrt{5}$, $r_2 = 4\sqrt{5}$.

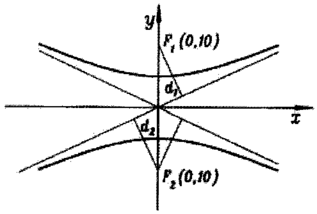
940. Решавањем система једначина $b^2 = 16a$ и $a^2 + b^2 = 25$ добијамо $a = 9$ и $b = 12$.

941. а) Секу се у тачкама $P(6,2)$ и $Q\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; б) права додирује хиперболу у тачки $\left(\frac{25}{4}, 3\right)$; в) немају заједничких тачака.

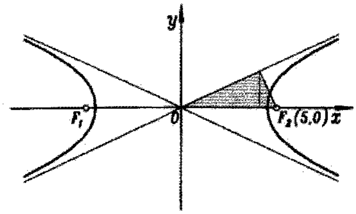
942. Дата права сече асимптоте $y = \frac{3}{2}x$ и $y = -\frac{3}{2}x$ редом у тачкама $P(2,3)$ и $Q(4,-6)$. Површина троугла PQO је $P = 12$.

943. Растојање темена $T(a,0)$ хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ до асимптоте $bx - ay = 0$ је $d = \left|\dfrac{b \cdot a - a \cdot 0}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}}\right| = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

944. Жиже хиперболе су $F_1(0,10)$ и $F_2(0,-10)$, а једначине асимптота су $y = \frac{3}{4}x$ и $y = -\frac{3}{4}x$ (в. слику). Одстојања жижа од асимптота су међусобно једнака и једнака су $d = \dfrac{|4 \cdot 10 - 3 \cdot 0|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 8$.



Сл. уз зад. 944



Сл. уз зад. 948

945. $x - 2y - 12 = 0$ и $x + 2y + 8 = 0$. **946.** $3x^2 - y^2 = 3$.

947. а) $d = 10$; б) $d = 9\sqrt{2}$.

948. Како је $b^2 = 9$, $a^2 = 16$, једначине асимптота су $y = \pm\frac{3}{4}x$, а фокуси $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$ (в. слику). Једначина нормале F_2A је $y - 0 = -\frac{4}{3}(x-5)$, тј. $y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$. Координате пресека нормале и асимптоте одређују се као решења система једначина $y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$, $y = \frac{3}{4}x$. Добијамо: $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{12}{5}$, па је $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Површина троугла OF_2A је $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6$. **949.** $\frac{25}{12}$ и $\frac{313}{12}$.

950. Пресечне тачке су $A(-4,-1)$, $B(4,-1)$, $C(4,1)$ и $D(-4,1)$, а једначине страница су $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$ и $y = 1$.

951. Једначина асимптоте хиперболе која пролази кроз I квадрант је $y = \frac{3}{2}x$, а десна жижа је $F(\sqrt{13}, 0)$. Тачка на асимптоти која има апсцису $\sqrt{13}$ је $A\left(\sqrt{13}, \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)$. Троугао OFA је правоугли са катетама $OF = \sqrt{13}$ и $FA = \frac{3}{2}\sqrt{13}$, па је његова површина $P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13}\right) = \frac{39}{4}$.

952. Како су полуосе дате хиперболе $a = 4$ и $b = 3$, биће фокуси $F_1(5,0)$ и $F_2(-5,0)$. Нека је $M(x,y)$ тражена тачка на хиперболи. Из $MF_1 = \frac{1}{2}MF_2$ следи $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$, односно $3x^2 + 3y^2 - 50x + 75 = 0$. Из овог услова и из једначине хиперболе добијамо да је $75x^2 - 800x + 768 = 0$, тј. $x_1 = \frac{48}{5}$, $x_2 = \frac{16}{15}$. Дакле, постоје две тачке на хиперболи са поменутим својством $M_1\left(\frac{48}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$ и $M_2\left(\frac{48}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{119}\right)$, јер тачка са апсцисом $x_2 = \frac{16}{15}$ не припада хиперболи.

953. а) Права $x = 1$ није тангента дате хиперболе, па једначина тангенте хиперболе из тачке A мора бити облика $y = k(x-1)$. Заменом у једначину хиперболе добијамо $2x^2 - 9k^2(x-1)^2 = 18$, еквивалентан је услов да дискриминанта $D = 324k^4 + 4(2-9k^2)(9k^2+18)$ буде једнака нули, тј. $k = \pm 1/2$. Једначине тражених тангенти су, дакле, $y = \frac{1}{2}(x-1)$ и $y = -\frac{1}{2}(x-1)$. б) $5x+3y-9=0$ и $-5x+3y-9=0$; в) $2x+y+1=0$ и $7x+4y+1=0$; г) $y = \frac{3}{2}x - 3$ и $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

954. а) $D(10,3)$, $5x - 6y = 32$; б) $D(-5,-9)$, $5x - y + 16 = 0$; в) $D(5,-4)$, $y = 1 - x$; г) $x - y - 2 = 0$.

955. $8x + \sqrt{11}y - 20 = 0$ и $8x - \sqrt{11}y - 20 = 0$.

956. а) $x + y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$; б) не постоји тангента дате хиперболе паралелна овој правој.

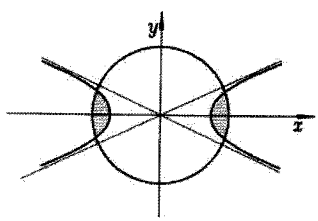
957. Услов да је права $y = kx + n$ тангента хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ гласи: $a^2k^2 - b^2 = n^2$. У нашем случају добијамо: $16\left(-\frac{15}{16}\right)^2 - b^2 = \left(\frac{36}{16}\right)^2$, тј. $b^2 = 9$.

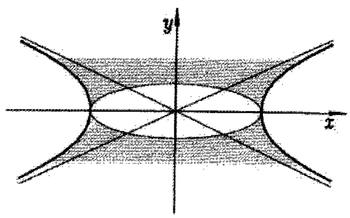
958. Искористити услов да права $y = kx + n$ додирује хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ $(a^2k^2 - b^2 = n^2)$. Резултат: $4x^2 - 16y^2 = 64$.

959. Фокуси елипсе $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$ су темена хиперболе, а темена елипсе — $T_1(-13,0)$ и $T_2(13,0)$ су фокуси хиперболе. Ако је $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, једначина хиперболе биће $a = 5$ и $\sqrt{25 + b^2} = 13$, тј. $b = 12$. **960.** $9x^2 - 16y^2 = 144$.

961. а) $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, $c^2 = 25$. Радијус-вектор произвољне тачке $M(x,y)$ хиперболе за жижу $F_1(-c,0)$ је $r_1 = \dfrac{cx}{a} + a$, тј. $x = \dfrac{12}{5}$. Координате тачке M задовољавају једначину хиперболе, па је $y = \pm 2\sqrt{\frac{11}{5}}$. Тражене тачке су $P\left(\frac{12}{5}, 2\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$, $Q\left(\frac{12}{5}, -2\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$; б) $P\left(10, \frac{9}{2}\right)$, $Q\left(10, -\frac{9}{2}\right)$.

962. а) Тражене тачке су изван хиперболе $x^2 - y^2 = 36$; б) тражене тачке су у хиперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$; в) тражене тачке су осенчена област (в. слику); г) тражене тачке су осенчена област (в. слику).





Сл. уз зад. 962

963. Из датог услова $c = a\sqrt{2}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ добијамо да је $a = b$, па су једначине асимптота $y = x$ и $y = -x$; оне заклапају (граде) угао од $90°$. **964.** $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6} = 1$.

965. Фокус хиперболе има координате $F(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, а асимптота $ay - bx = 0$, па је одстојање фокуса од хиперболе $d = \dfrac{|a \cdot 0 - b \cdot \sqrt{a^2+b^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = b$.

966. $M_1\left(\dfrac{14\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{14\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{14\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_4\left(\dfrac{14\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

967. а) Ако је тачка $M(x,y)$ на хиперболи, тада је $r_1^2 + r_2^2 = 4c^2$, а како је $r_1 = \frac{5}{4}x + 4$, $r_2 = \frac{5}{4}x - 4$, добијамо $x = \pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$ и $y = \pm\frac{9}{5}$. Постоје четири такве тачке; б) $M\left(\pm\frac{12}{5}\sqrt{30}, \pm\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$.

968. Коефицијенти правца асимптота су $k_1 = \frac{b}{a}$ и $k_2 = -\frac{b}{a}$. Угао између асимптота је
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

969. Једначину праве напишимо у облику $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, а хиперболе $\dfrac{x^2}{c} - \dfrac{y^2}{c/4} = 1$. Услов додира праве и хиперболе ($l^2 = a^2k^2 - b^2$) гласи: $\frac{4}{3} = C\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4}C$, одакле налазимо $C = 16$, $a = \sqrt{C} = 4$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{C} = 2$. Координате додирне тачке су $D(8, 2\sqrt{3})$, једначина нормале: $y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3}$, пресек нормале и x-осе је тачка $B(10,0)$, а пресек тангенте и x-осе тачка $A(2,0)$. Површина троугла ABD је $P = \frac{1}{2}(10-2)\cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

970. Из услова додира хиперболе и дате праве имамо $25a^2 - 36b^2 = 64$. Како је $b : a = 1 : 2$, добијамо $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, па је једначина хиперболе $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$.

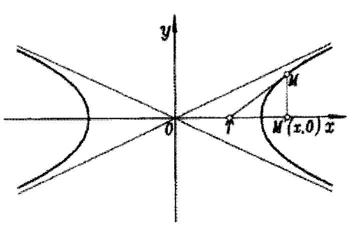
971. Тангента дате елипсе у тачки $D\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ има једначину $y = x + 3$. Дужина тетиве хиперболе је $d = 8\sqrt{2}$.

972. Једначина тангенте дате хиперболе у тачки M је $x + y = 1$, па је коефицијент правца ове праве $k_1 = -1$. Једначина траженог круга је облика $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, па је једначина тангенте круга у тачки M $(x - x_0)(4 - x_0) - 3y = r^2$ и коефицијент правца ове праве је $k_2 = \frac{1}{3}(4 - x_0)$. Из услова $k_1k_2 = -1$ налазимо да је $x_0 = 1$. Дакле, средиште круга је тачка $S(1,0)$, а дужина полупречника је $r = SM = \sqrt{(4-1)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$, па је тражена једначина круга $(x-1)^2 + y^2 = 18$. **973.** $x^2 - 3y^2 = 9$.

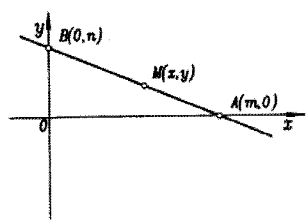
974. Тражена тачка P је заједничка тачка тангенте хиперболе $3x + 2y + b = 0$ (1) паралелне датој правој и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 72$ (2). Елиминацијом променљиве y из (1) и (2) добија се квадратна једначина $6x^2 + 6bx + b^2 + 72 = 0$, чија је дискриминанта једнака нули за $b = 12$ или $b = -12$. Права $3x + 2y + 12 = 0$ додирује хиперболу у тачки $P_1(-6,3)$, а права $3x + 2y - 12 = 0$ у тачки $P_2(6,-3)$. Одстојање тачке P_1 од праве $3x + 2y + 1 = 0$ је $d_1 = \frac{11}{13}\sqrt{13}$, а одстојање тачке P_2 од те праве је $d_2 = \sqrt{13}$. Како је $d_1 < d_2$, тражена тачка је $P(-6,3)$.

975. Тангента која пролази кроз средиште дужи AB.

976. Једначина тангенте у тачки M је $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$. Ова права сече праву $y = 0$ (в. слику) у тачки $T\left(\dfrac{a^2}{x_0}, 0\right)$, па је $OT\cdot OM' = \left|\dfrac{a^2}{x_0}\right|\cdot|x_0| = a^2$.



Сл. уз зад. 976



Сл. уз зад. 979

977. Асимптоте дате хиперболе имају једначине $bx \pm ay = 0$, па су одстојања произвољне тачке $M(x_0, y_0)$ од ових правих

$$d_1 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

тако да је $d_1 d_2 = \dfrac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{b^2 + a^2} = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \text{const}.$

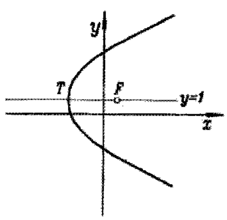
978. Из $\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}|4y - 9|$ добија се једначина хиперболе $7y^2 - 9x^2 = 63$.

979. Имамо (в. слику): $x = \dfrac{m}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{n\lambda}{1+\lambda}$, односно $m = (1+\lambda)x$, $n = \dfrac{(1+\lambda)y}{\lambda}$. Како је $\dfrac{m \cdot n}{2} = P$ добијамо хиперболу $xy = \dfrac{2\lambda P}{(1+\lambda)^2}$, $\lambda \neq -1$, чије су асимптоте координатне осе.

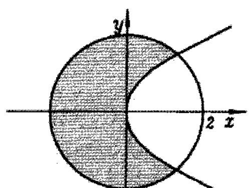
980. а) Једначина параболе је облика $y^2 = 2px$, па је $(-4)^2 = 2p \cdot 1$, дакле $2p = 16$. Једначина тражене параболе је $y^2 = 16x$; б) $x^2 = -18y$; в) $y^2 = 12x$.

981. а) $F(6,0)$, $x = -6$; б) $F(-2,0)$, $x = 2$; в) $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $y = -\frac{1}{4}$.

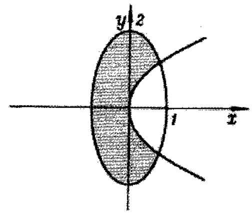
982. а) Из $y^2 - 2y = 10x + 19$ имамо $(y-1)^2 - 1 = 10x + 19$, тј. $(y-1)^2 = 10(x+2)$, па је $T(-2,1)$, $2p = 10$, $F\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, а оса симетрије s има једначину $y = 1$ (в. слику); б) $T(0,-7)$, $2p = 6$, $F\left(\frac{3}{2}, -7\right)$, s: $y = -7$; в) $T(3,5)$, $2p = 8$, $F(3,2)$, s: $x = 3$; г) $T(3,-1)$, $2p = 2$, $F\left(3, \frac{1}{2}\right)$, s: $x = 3$.



Сл. уз зад. 982



Сл. уз зад. 988 а)



Сл. уз зад. 988 б)

983. а) $y^2 = 12x$; б) $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$; в) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$.

984. Према дефиницији параболе радијус-вектор произвољне тачке M је $r = MF = x + \frac{p}{2}$. а) Из $x + \frac{p}{2} = 20$ следи $x = 18$. Добијамо две тачке $M_1(18,12)$, $M_2(18,-12)$; б) $M_1(9,-12)$, $M_2(9,12)$.

985. а) $r = MF = 12$; б) $r = 6$. **986.** $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, n: $y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{4}$.

987. а) $A(2,1)$, $B(-6,9)$; б) $C(-4,6)$ — права додирује параболу; в) права и парабола немају заједничких тачака.

988. а) Све тачке изван параболе $y^2 = 4x$ и унутар круга $x^2 + y^2 = 4$ (в. слику а)). б) Све тачке у параболи $y^2 = 4x$ и елипси $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (в. слику б)).

989. $A(1,-2)$, $B(4,4)$, $P = 6$. **990.** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$.

991. а) $A(6,12)$, $B(6,-12)$; б) $A(10,\sqrt{30})$, $B(10,-\sqrt{30})$, $C(2,\sqrt{6})$, $D(2,-\sqrt{6})$; в) $A(2,1)$, $B(-1,4)$, $C\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$.

992. Координате фокуса дате параболе су $F(2,0)$, а одстојање произвољне тачке $M\left(\frac{1}{8}y^2, y\right)$ дате параболе од фокуса је $d = \sqrt{\left(\frac{1}{8}y^2 - 2\right)^2 + y^2}$. Како је $d = 20$, налазимо $y_1 = 12$, $y_2 = -12$, па је $M_1(18, 12)$, $M_2(18, -12)$.

993. а) Решавањем система једначина $y^2 = 18x$, $(x+6)^2 + y^2 = 100$ налазимо координате заједничких тачака дате параболе и датог круга: $A(2, -6)$, $B(2, 6)$. Једначина праве AB је $x = 2$; б) $x = \frac{5}{4}$.

994. Права сече параболу у тачкама $A(2, -2)$ и $B(8, 4)$. Нека је врх једнакокраког троугла тачка $C(t, 0)$. Тада је $AC = BC$, тј. $\sqrt{(2-t)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(8-t)^2 + 4^2}$, одакле је $C(6, 0)$. Површина троугла ABC је $P = 6$. **995.** $P = 60$.

996. а) Како су тангенте дате параболе облика $yy_1 = 4(x + x_1)$, где је $M(x_1, y_1)$ тачка на параболи, биће $-7y_1 = 4(5 + x_1)$, $y_1^2 = 8x_1$. Решавањем овог система једначина добијамо координате тачака додира $M_1(2, -4)$, $M_2\left(\frac{25}{2}, -10\right)$, па се једначине тражених тангенти $x + y + 2 = 0$ и $2x + 5y + 25 = 0$; б) $x + y + 2 = 0$ и $x - 2y + 8 = 0$.

997. а) Једначина тангенте је облика $yy_1 = p(x + x_1)$, у овом случају $y = x + 1$. б) $y = 2(x + 1)$. в) Једначина тангенте параболе $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$ у тачки $M_1(x_1, y_1)$ је $y - y_1 = \dfrac{p}{y_1 - \beta}(x - x_1)$; у овом случају $x - 4y + 17 = 0$; г) $y = x$; д) $x + y + 2 = 0$, $2x + 5y + 25 = 0$.

998. а) $y = x + 3$; б) $y = -\frac{1}{2}(3x + 1)$; в) $x + y + 2 = 0$.

999. а) $x - 2y + 4 = 0$; б) $3x + 2y + 1 = 0$; в) $2x - y - 16 = 0$.

1000. Једначина тангенте дате параболе у тачки $M(1, 4)$ је $2x - y + 2 = 0$, а нормала $x + 2y - 9 = 0$. Ове две праве секу x-осу у тачкама $P(-1, 0)$, односно $Q(9, 0)$. Површина троугла PQM је $P = 20$.

1001. $4x + 6y + 9 = 0$ и $6x - 4y + \frac{8}{3} = 0$.

1002. $P(6, 4\sqrt{6})$, $Q(6, -4\sqrt{6})$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$. **1003.** $y = -\frac{1}{3}x - 3$.

1004. Коефицијент правца дате праве је $k_1 = 2$, па се коефицијент правца k_2 тражене праве налази из услова $\left|\dfrac{2 - k_2}{1 + 2k_2}\right| = 1$. Добија се $k_2 = \frac{1}{3}$ или $k_2 = -3$. Једначина тангенте је облика $y = \frac{1}{3}x + n$, односно $y = -3x + n$, при чему n добијамо из услова $p = 2kn$. Тражене тангенте и додирне тачке су: $y = \frac{1}{3}x + 9$ и $D_1(27, 18)$, односно $y = -3x - 1$ и $D_2\left(\frac{1}{3}, -2\right)$.

1005. Праве које са правом $y = 3x - 4$ граде угао од 45° имају коефицијент правца k за који важи $\left|\dfrac{k - 3}{1 + 3k}\right| = 1$, одакле је $k = -2$ или $k = \frac{1}{2}$. Једначина тангенте дате параболе у тачки (x_0, y_0) је $yy_0 = 6(x + x_0)$, тј. $y = \dfrac{6}{y_0}x + \dfrac{6x_0}{y_0}$, $y_0 \neq 0$. Из $6/y_0 = -2$ налазимо $y_0 = -3$, $x_0 = \frac{3}{4}$. Једна од тражених тангенти има једначину $y = -2x - \frac{3}{2}$. Из услова $\dfrac{6}{y_0} = \dfrac{1}{2}$, добијамо $y_0 = 12$, $x_0 = 12$, па је једначина друге тангенте $y = \frac{1}{2}x + 6$.

1006. Дате параболе секу се у тачкама $A(6, 12)$ и $O(0, 0)$. Коефицијент правца праве AB је $k_1 = -\frac{1}{2}$, а праве $k_2 = 2$. Како је $k_1k_2 = -1$, то је угао BAO прав.

1007. Из услова да права t додирује параболу налазимо да је $p = \frac{1}{2}$, док је $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Додирна тачка је $T(1, 1)$, а једначина нормале је n: $y = -2x + 3$. Координате тачке S налазимо у пресеку праве n и параболе; добија се $S\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$. Једначине правих FT и FS су $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, односно $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{16}$ и како је $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$, праве FT и FS су међу собом ортогоналне, па се дуж TS из тачке F види под правим углом. **1008.** $P = \frac{75}{8}$.

1009. Једначине тангенти су $y = \frac{1}{2}x + 2$ и $y = -\frac{1}{2}x - 2$, тачке додира на параболи су $A(4,4)$ и $B(4,-4)$, а на елипси $C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ и $D\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

1010. а) $y = 2x + 2$, $y = -2x - 2$; б) $P = 50$; в) $90°$.

1011. а) Најближа тачка правој $4x + y + 4 = 0$ је додирна тачка параболе $y^2 = 16x$ и тангенте која је паралелна датој правој. Та тангента има једначину облика $y = -4x + b$. Из услова додира те праве и параболе налазимо да је $b = -1$. Додирна тачка тангенте $y = -4x - 1$ и параболе је $D\left(\frac{1}{4}, -2\right)$; б) $D(1,1)$; в) $D(1,2)$.

1012. а) Ако је $M(x,y)$ произвољна тачка која припада траженом геометријском месту биће $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$, одакле се добија да је тражено геометријско место парабола $x^2 = 8y$; б) $y^2 = -8x$.

1013. Из услова да права $y = kx + l$ додирује параболу $y^2 = 2px$ $(p = 2lk)$, односно елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a^2k^2 + b^2 = l^2)$, налазимо вредности параметара k и l. Једначине заједничких тангенти су $x + 3y + 15 = 0$ и $x - 3y + 15 = 0$.

1014. а) Нека је $y = kx + b$ једначина тражене тетиве. Ординате y_1 и y_2 пресечних тачака те праве и дате параболе налазе се из једначине $y^2 = 4\dfrac{y-b}{k}$, одакле, по Вијетовим формулама, имамо $y_1 + y_2 = \dfrac{4}{k}$. Међутим, како је $\dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ордината средишта тетиве, то је $\dfrac{2}{k} = 1$, па је $k = 2$ и тражена једначина је $y - 1 = 2(x - 2)$, тј. $2x - y - 3 = 0$.

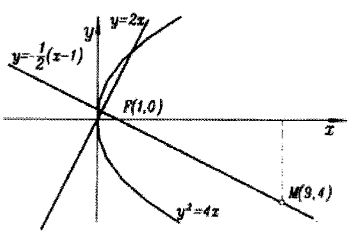
б) $3x - 2y - 9 = 0$. в) $y = 2x + 1$.

1015. Једначина тангенте у тачки $A(4,4)$ је $x - 2y + 4 = 0$, а у тачки $B(9,-6)$ је $x + 3y + 9 = 0$. Координате тачке C су $C(-6,-1)$, а једначина круга описаног око троугла ABC је $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 48 = 0$.

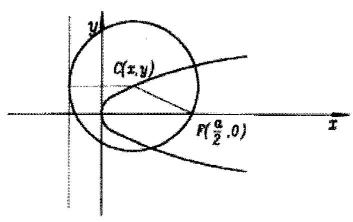
1016. а) Пресечне тачке праве и параболе су $A_1(18,6)$ и $A_2(2,-2)$; једначине одговарајућих тангенти: t_1: $y = \frac{1}{6}x + 3$ и t_2: $y = -\frac{1}{2}x - 1$, а угао које оне граде је $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{8}{11}$

б) Права сече параболу у тачкама $A_1(1,2)$ и $A_2(4,4)$. Једначине тангенти су t_1: $y = x + 1$, односно t_2: $y = \frac{1}{2}x + 2$, а тражени угао је $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \approx 18°26'$.

1017. Жижа параболе је тачка $F(1,0)$, а права која садржи тетиву о којој се говори у формулацији задатка има једначину $y = -\frac{1}{2}(x - 1)$. Ова права сече параболу у тачкама $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (в. слику). Прве координате ових тачака су корени једначине $\frac{1}{4}(x-1)^2 = 4x$, односно $x^2 - 18x + 1 = 0$. По Вијетовим формулама је $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{18}{2} = 9$. Друга координата тачке M налази се из услова да M припада правој $y = -\frac{1}{2}(x - 1)$. Добија се $M(9,-4)$.



Сл. уз зад. 1017



Сл. уз зад. 1019

1018. Из $y = kx + n$ и $p = 2kn$ добија се $2k^2x - 2ky + p = 0$, а одавде $k_1k_2 = \dfrac{p}{2x}$, а по услову задатка $\dfrac{p}{2x} = -1$, односно $x = -\dfrac{p}{2}$. Тражено геометријско место тачака је директриса параболе $y^2 = 2px$.

1019. Ако је $C(x, y)$ произвољна тачка геометријског места тачака, тада је (в. слику): $\sqrt{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \dfrac{a}{2}\right|$, па је $y^2 = 2ax$.

1020. Из $\dfrac{y-4}{x-2} = \dfrac{y+3}{x-2} + 1$ следи $x^2 + 3y - 16 = 0$, па је добијена крива парабола.

1021. Из $\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} = r + 5$ и $r = x + 5$ следи $(y+1)^2 = 28(x+3)$.

1022. $x = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, односно $y^2 = 8(x-2)$.

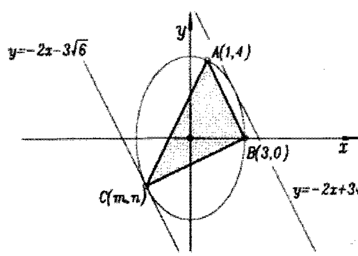
1023. $x = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 1$, односно $y^2 = 8(x-1)$.

1024. а) Једначина параболе биће $x = ay^2 + by + c$. Из система $a + b + c = 3$, $a - b + c = 2$ и $25a - 5b + c = 6$ добијамо $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{9}{4}$. Једначина параболе је $(y+1)^2 = 4(x-2)$; б) $(x-7)^2 = 9(y+5)$.

1025. Нека је $C(m, n)$ (в. слику). Како је $AB = 2\sqrt{5}$ и једначина праве AB: $y = -2x + 6$, то је површина троугла ABC:

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}2\sqrt{5} \cdot \frac{|2m + n - 6|}{\sqrt{4+1}} = |2m + n - 6|.$$

Очигледно је да је површина максимална ако је тачка C на елипси најудаљенија од праве AB. Тада C припада једној од две тангенте елипсе паралелне правој AB. Права $y = -2x + b$ је тангента елипсе за $b_{1,2} = \pm 3\sqrt{6}$. Додирне тачке са елипсом су $C_1(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ и $C_2(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$. Провером се утврди да је C_2 најудаљенија тачка елипсе од праве AB. Према томе, површина троугла ABC је максимална ако је $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.



Сл. уз зад. 1025

1026. а) Сменом $x^2 = u$, $y^2 = v$, систем се своди на систем линеарних једначина $u + v = 25$, $u + 2v = 41$, чије је решење $(9, 16)$. Дакле, круг $x^2 + y^2 = 25$ и елипса $x^2 + 2y^2 = 41$ секу се у тачкама $A(3, 4)$, $B(3, -4)$, $C(-3, -4)$, $D(-3, 4)$. б) $(7, 1)$, $(7, -1)$, $(-7, -1)$, $(-7, 1)$; в) елипсе немају заједнички тачака; г) $(9, 7)$, $(9, -7)$, $(-9, 7)$, $(-9, -7)$.

1027. Полупречник круга је $r = OS = \sqrt{10}$, па једначина круга гласи: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$. Координате пресечних тачака одређујемо као решење система једначина:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10, \quad y^2 = 2x.$$

Ако у прву једначину уврстимо $y = \pm\sqrt{2x}$, после сређивања добијамо

$$\begin{aligned}
& x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x = 0 \\
\iff\ & x(x^3 - 8x^2 + 16x - 8) = 0 \\
\iff\ & x(x^3 - 8 - 8x(x-2)) = 0 \\
\iff\ & x((x-2)(x^2 + 2x + 4) - 8x(x-2)) = 0 \\
\iff\ & x(x-2)(x^2 - 6x + 4) = 0.
\end{aligned}$$

Решења су $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{5}$, па су пресечне тачке $O(0,0)$, $P(2,2)$, $Q\Big(3+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}\Big)$ и $R\Big(3-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\Big)$.

1028. Нека је F тачка таква да су A, B, C и F хармонијски спрегнуте тачке, тј. $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AF}{BF}$. Ако је $F(t,0)$, биће $\dfrac{-1+\frac{17}{2}}{2+1} = \dfrac{t+\frac{17}{2}}{t-2}$, одакле је $t = 9$, тј. $F(9,0)$. Познато је да је геометријско место тачака из којих се дужи AC и BC виде под једнаким угловима, круг пречника CF. Једначина овог круга је $(x-4)^2+y^2 = 25$. Права $y = x-3$ сече овај круг у тачкама $D_1(7,4)$ и $D_2(0,-3)$.

1029. Нека је $B(x_1, y_1)$. Како је дијагонала квадрата

$$d = AC = \sqrt{(10-8)^2 + (11+3)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$

закључујемо да је страница квадрата $a = d/\sqrt{2} = 10$. Како је $AB = BC = 10$, имамо

$$(x_1-8)^2 + (y_1+3)^2 = 10^2 \quad \text{и} \quad (x_1-10)^2 + (y_1-11)^2 = 10^2.$$

Одузимањем ових једначина добијамо $x_1 = 37 - 7y_1$. Како тачка $D(x_2, y_2)$ задовољава исти систем једначина, координате тачака B и D налазе се решавањем система

$$x + 7y = 37, \quad (x-8)^2 + (y+3)^2 = 100.$$

Заменом $x = 37 - 7y$ у другу једначину добијамо $(29-7y)^2 + (y+3)^2 = 100$, односно $50y^2 - 400y + 750 = 0$. Скраћивањем долазимо до једначине $y^2 - 8y + 15 = 0$, чија су решења $y_1 = 3$ и $y_2 = 5$. Одатле је $x_1 = 16$ и $x_2 = 2$. С обзиром да је C изнад тачке A, тачка B мора бити десно од тачке B, тако да је $B(16,3)$ и $D(2,5)$ (наиме, није свеједно које ће се координате приписати тачки B, а које тачки D, јер обележавање темена квадрата иде супротно смеру казаљке на сату).

1030. *Прво решење*: Дужина странице квадрата је $AB = \sqrt{(18-9)^2 + (8-2)^2} = 3\sqrt{13}$. Једначина страниве AB је (в. слику): $y - 2 = \frac{8-2}{18-9}(x-9)$, тј. $y = \frac{2}{3}x - 4$. Права AD садржи тачку $A(9,2)$ и нормална је на AB, па је њена једначина $y - 2 = -\frac{3}{2}(x-9)$, тј. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$, а једначина праве BC је $y = -\frac{3}{2}x + 35$. Права CD је паралелна правој AB, па има једначину $y = \frac{2}{3}x + b$, где се коефицијент b одређује из услова да је одстојање тачке A (или B) од ове праве једнако $3\sqrt{13}$ и да је тачка D у првом квадранту. Добијамо $b = 9$. Тачка C је пресек правих $y = -\frac{3}{2}x + 35$ и $y = \frac{2}{3}x + 9$, а тачка D правих $y = -\frac{3}{2}x + \frac{31}{2}$ и $y = \frac{2}{3}x + 9$. Добијамо $C(12,17)$ и $D(3,11)$.

Друго решење: Посматрајмо читаву слику у координатном систему $Oxyz$ у простору. Ако координате тачке D означимо са $D(x,y,0)$ (дате тачке су сада $A(9,2,0)$ и $B(18,8,0)$), због $AB = 3\sqrt{13}$, услов да је D четврто теме квадрата своди се на: $|\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{13}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ и на то да трећа координата векторског производа $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ буде позитивна, чиме се обезбеђује правилна оријентација темена квадрата (у смеру супротном казаљки на сату). Како је

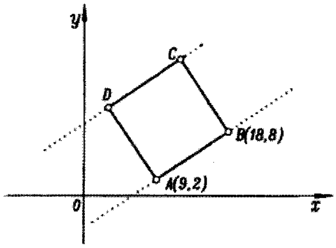
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 6 & 0 \\ x-9 & y-2 & 0 \end{vmatrix} = (9y - 6x + 36)\vec{k},$$

то се проблем налажења темена D своди на решавање система

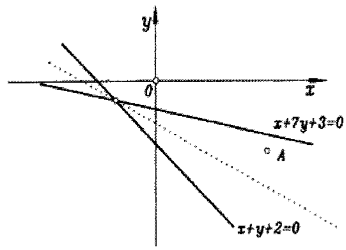
$$(x-9)^2 + (y-2)^2 = 117, \quad 9 \cdot (x-9) + 6 \cdot (y-2) = 0, \quad 9y - 6x + 36 > 0.$$

Из друге једначине је $y - 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{27}{2} = -\frac{3}{2}(x-9)$, па заменом у прву једначину добијамо $\left(1 + \frac{9}{4}\right)(x-9)^2 = 117$, односно $(x-9)^2 = \frac{4 \cdot 117}{9} = 36$. Одавде је $x_1 = 9 - 6 = 3$

и $x_2 = 9 + 6 = 15$. Одговарајуће вредности за y су $y_1 = 11$ и $y_2 = -7$. Како је $9y_1 - 6x_1 + 36 = 9 \cdot 11 - 6 \cdot 3 + 36 = 117 > 0$ и $9y_2 - 6x_2 + 36 = 9 \cdot (-7) - 6 \cdot 15 + 36 = -117 < 0$, закључујемо да је решење $(x_1, y_1) = (3, 11)$. Како се дужи AC и BD међусобно полове, координате темена C најлакше је наћи из услова $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ и $\dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2}$, тј. $\dfrac{x+9}{2} = \dfrac{18+3}{2}$ и $\dfrac{y+2}{2} = \dfrac{8+11}{2}$.



Сл. уз зад. 1030



Сл. уз зад. 1031

1031. а) Заменом координата тачке A у леве стране једначина правих добијамо $2-1+2 = 3 > 0$, $2 - 7 + 3 = -2 < 0$. Значи, тачка A се налази у једном од углова који граде дате праве у којем су, као и у њему унакрсном углу, знаци левих страна једначина датих правих различити: $(x+y+2)(x+7y+3) < 0$. Тај услов морају задовољавати и тачке симетрале (сем, наравно, темена угла), тако да је $\dfrac{x+y+2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{x+7y+3}{\sqrt{50}}$, тј. $6x + 12y + 13 = 0$.

б) $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = -\dfrac{x+2y+1}{\sqrt{5}}$.

1032. Тачка A је пресек правих $x+3y-8=0$ и $2x+y+4=0$, па је $A(-4,1)$. Права CD паралелна је правој AB, па је једначина те праве облика $x+3y+b=0$. Из услова $E \in CD$ налазимо $b = 12$. Дакле, једначина праве CD је $x+3y+12=0$, а координате тачке C се налазе из услова да је та тачка пресек правих AC и CD, дакле $C(0,-4)$. Средиште дужи AC, пресек дијагонала ромба, је тачка $S\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right)$, тј. $S(-2,0)$. Права BD садржи тачку S и управна је на AC, па је једначина праве BD $y - 0 = \frac{1}{2}(x+2)$, тј. $y = \frac{1}{2}x + 1$. Ова права сече праве AB и CD у тачкама $B(2,2)$ и $D(-6,-2)$. Једначине правих којима припадају странице AD и BC су $y = 3x+16$, односно $y = 3x - 4$.

1033. Угаони коефицијент праве којој припада основица је $k_1 = -\frac{1}{2}$, а први крак: $k_2 = 1$. Тангенс угла на основици је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 3$. Како други крак такође гради угао α са основицом, његов коефицијент правца k_3 мора задовољавати услов $\left|\dfrac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}\right| = \operatorname{tg}\alpha = 3$, $k_3 \neq k_2$. Због $k_1 = -\frac{1}{2}$ из првог услова добијамо $\left|k_3 + \frac{1}{2}\right| = 3\left|1 - \frac{1}{2}k_3\right|$, тј. $k_3^2 - 8k_3 + 7 = 0$, односно $k_3 \in \{1, 7\}$. Како мора бити $k_3 \neq k_2 = 1$, то је $k_3 = 7$, па је једначина тражене праве $y - 2 = 7(x-4)$, односно $7x - y - 26 = 0$.

1034. Нека је $T(x,y)$ тежиште троугла ABC. Како је $C(t,t)$, $t \in \mathbf{R}$, то је $x = \frac{1}{3}(1+5+t)$, $y = \frac{1}{3}(0+0+t)$, тј. $x = 2 + \frac{1}{3}t$, $y = \frac{1}{3}t$, односно $x = 2 + y$. Дакле, геометријско место тачака T је права $y - x + 2 = 0$. Једноставно се проверава да за произвољну тачку ове праве постоји троугао ABC са поменутим координатама, чије је тежиште управо та тачка.

1035. Нека је $P(x_0, y_0)$ пресечна тачка праве p и дужи MN. Како је P унутрашња тачка дужи MN, биће $\dfrac{MP}{PN} = \lambda$, $\lambda > 0$. Даље је $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Тачка P припада правој p, па је $A\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C = 0$, одакле је $\lambda = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$. Међутим, $\lambda > 0$, па су изрази $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ различитог знака. а) Како је $2\cdot 0 - 0 + 5 = 5 > 0$ и $2 \cdot 1 - (-3) + 5 > 0$, тачке A и O су са исте стране дате праве. б) Како је $0 - 3\cdot 0 - 5 < 0$ и $1 + 9 - 5 = 5 > 0$, тачке A и O су са разних страна дате праве.

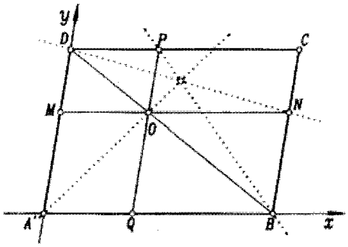
1036. Нека се посматрани паралелограм налази у косоуглом координатном систему са почетком у тачки A, тако да је тачка $B(b, 0)$ на x-оси, а тачка $D(0, d)$ на y-оси (в. слику). Тада права BD има једначину $y = -\dfrac{d}{b}x + d$, а тачка O координате $\left(\lambda, \dfrac{d(b-\lambda)}{b}\right)$, $0 < \lambda < b$. Једноставно се налазе координате тачака P и N: $P(\lambda, d)$ и $N\left(b, \dfrac{d(b-\lambda)}{b}\right)$. Једначине правих AO, BP и DN су редом,

$$d(b-\lambda)x - b\lambda y = 0, \quad dx + (b-\lambda)y - bd = 0, \quad d\lambda x + b^2 y - b^2 d = 0.$$

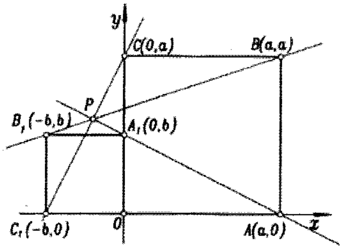
Услов да се праве AO, BP и DN секу у једној тачки је

$$\begin{vmatrix} d(b-\lambda) & -b\lambda & 0 \\ d & b-\lambda & -bd \\ d\lambda & b^2 & -b^2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} b-\lambda & -b\lambda & 0 \\ 1 & b-\lambda & 1 \\ \lambda & b^2 & b \end{vmatrix} = 0$$

и једноставно се проверава.



Сл. уз зад. 1036



Сл. уз зад. 1037

1037. Нека је $O(0,0)$, $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$, $A_1(0, b)$, $B_1(-b, b)$, $C_1(-b, 0)$ (в. слику), $a \neq b$, $a, b > 0$. Тада су једначине тражених правих:

$$AA_1 : \ bx + ay - ba = 0, \quad BB_1 : \ (b-a)x + (a+b)y - 2ab = 0, \quad CC_1 : \ ax - by + ab = 0.$$

Услов да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки:

$$\begin{vmatrix} b & a & -ba \\ b-a & a+b & -2ab \\ a & -b & ab \end{vmatrix} = 0$$

једноставно се проверава.

Напомена 1. Може се доказати да тачка P, заједничка правим AA_1, BB_1 и CC_1 припада круговима описаним око квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$.

Напомена 2. Тврђење аналогно тврђењу задатка може се, ако се посматра косоугли координатни систем, доказати и за два ромба $OABC$ и $OA_1B_1C_1$.

1038. Поставимо координатни систем тако да је $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Тада је $MA^2-MB^2=(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=2c$, одакле се добија да је $x=\frac{c}{2a}$ $(a\neq 0)$. Дакле, тражено геометријско место тачака је права $x=\frac{c}{2a}$ јер се једноставно доказује да за сваку тачку ове праве важи $MA^2-MB^2=2c$.

1039. Лако се показује да не постоји пар целих бројева који задовољава једначину праве. Наиме, $y=2x+1-\dfrac{5x+3}{15}$ је цео број ако је $\dfrac{5x+3}{15}$ цео број, али ни за један цео број x, број $5x+3$ није дељив са 15, па $\dfrac{5x+3}{15}$ није цео број. Нека је $T(a,b)$ било која тачка са целобројним координатама $a,b\in\mathbf{Z}$. Одстојање тачке T од праве p је

$$d=\frac{|25a-15b+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|25a-15b+12|}{5\sqrt{34}}.$$

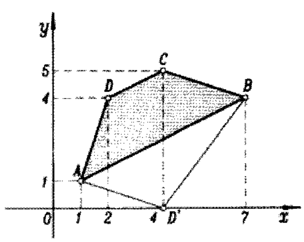
Ако би постојала тачка T таква да је $d\leq\frac{1}{30}$, било би $|25a-15b+12|\leq\frac{1}{30}\sqrt{25^2+(-15)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{34}<1$, одакле следи да је $|25a-15b+12|=0$, а то је како смо видели немогуће.

1040. а) Како је $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}$, то је $f(x)$ збир дужи AC и BC, где је $A(2,1)$, $B(3,4)$ и $C(x,0)$ нека тачка на x-оси. Познато је да је збир $AC+BC$ најмањи када тачка C припада дужи BA', где је $A'(2,-1)$ тачка симетрична тачки A у односу на x-осу. Дакле, најмања вредност за $f(x)$ је $A'B=\sqrt{(2-3)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{26}$. б) $\sqrt{10}$.

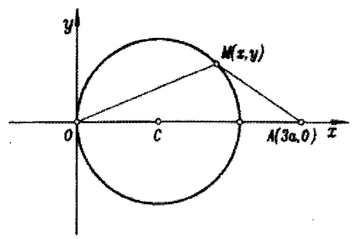
1041. Нека је $D(p,q)$. Из $AD=BC$ и $AC=BD$ добијамо (в. слику)

$$\sqrt{(p-1)^2+(q-1)^2}=\sqrt{(7-4)^2+(4-5)^2},$$
$$\sqrt{(p-7)^2+(q-4)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2}.$$

Решавањем система једначина (пресек два круга!) добијамо $(p,q)\in\{(2,4),(4,0)\}$. У обзир долази само тачка $D(2,4)$, јер за тачку $D'(4,0)$ четвороугао $AD'BC$ представља паралелограм, а не трапез.



Сл. уз зад. 1041



Сл. уз зад. 1045

1042. Дијагонала AC дели четвороугао $ABCD$ на два троугла ABC и ACD. За та два троугла је:

тежиште: $T_1\left(\dfrac{19}{3},7\right)$ површина: $P_1=\dfrac{1}{2}$ апс.вр. $\begin{vmatrix}4&4&1\\5&7&1\\10&10&1\end{vmatrix}=6,$

тежиште: $T_2\left(\dfrac{26}{3},6\right)$ површина: $P_2=\dfrac{1}{2}$ апс.вр. $\begin{vmatrix}4&4&1\\10&10&1\\12&4&1\end{vmatrix}=24.$

Тежиште четвороугла $ABCD$ припада дужи T_1T_2 и дели је у односу $24 : 6$ — обрнуто пропорционално површинама P_1 и P_2. Одавде налазимо да је $T(8{,}2; 6{,}2)$.

1043. а) $h = \dfrac{21}{\sqrt{17}}$; б) $T\left(\dfrac{17}{12}, \dfrac{11}{3}\right)$; в) $P = 13\dfrac{1}{8}$.

1044. $P_1 = 18\frac{3}{4}$ или $P_2 = 33\frac{1}{3}$, зависно од тога да ли се круг налази у оштром или тупом углу који граде две дате праве.

1045. Претпоставимо прво да тачка $M(x,y)$ припада траженом геометријском месту тачака. Тада је $2(x^2+y^2)+(x-3a)^2+y^2=(3a)^2$, односно $x^2+y^2-2ax=0$, тј. $(x-a)^2+y^2=a^2$. Последња једначина представља круг k полупречника $|a|$ са средиштем у тачки $(a,0)$. Нека је сада $M(x,y)$ произвољна тачка поменутог круга. Тада важи $(x-a)^2+y^2=a^2$, одакле добијамо $2(x^2+y^2)+(x-3a)^2+y^2=(3a)^2$, односно $2OM^2+MA^2=OA^2$. Према томе, тражено геометријско место тачака је круг k: $(x-a)^2+y^2=a^2$ (в. слику).

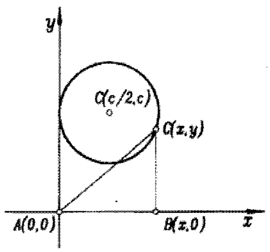
1046. Имамо да је $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}b^2$, па како је $\overrightarrow{AM}=(x,y)$ и $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$, то је $\overrightarrow{BM}=(x-b,y)$. Зато је $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=x(x-b)+y^2=\frac{3}{4}b^2$, тј. тражено геометријско место тачака је круг чија је једначина $\left(x-\frac{1}{2}b\right)^2+y^2=b^2$. Једноставно се проверава да свака тачка добијеног круга задовољава дати услов.

1047. $x^2+\left(y-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{1}{9}a^2$.

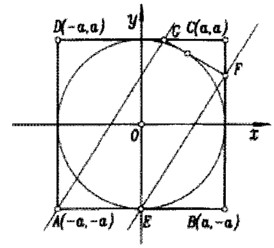
1048. Без умањења општости можемо узети $A(0,0)$, $B(c,0)$ и $C(x,y)$ $(c,y>0)$. Тада је (в. слику)

$$P(\triangle ABC)=\frac{1}{2}cy,\quad AC^2=x^2+y^2,\quad BC^2=(c-x)^2+y^2,\quad AB^2=c^2,$$

па имамо $8\cdot\frac{1}{2}cy=2c^2+2x^2+2y^2-2xc$, тј. $c^2+x^2+y^2-xc=2cy$, односно $\left(x-\frac{1}{2}c\right)^2+(y-c)^2=\frac{1}{4}c^2$. Према томе, тражено геометријско место тачака је круг са средиштем $O\left(\frac{1}{2}c,c\right)$ и полупречника $r=\frac{1}{2}c$ и њему симетричан круг у односу на x-осу. Непосредно се проверава да свака тачка овог круга испуњава дати услов.



Сл. уз зад. 1048



Сл. уз зад. 1049

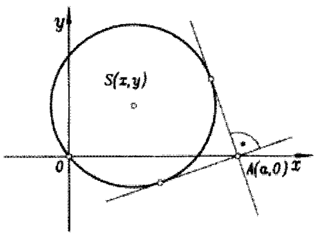
1049. Једначине паралелних правих AG и EF су (в. слику) $y+a=k(x+a)$,односно $y+a=kx$ $(1\le k\le 2)$. Координате тачака F и G су $F(a,ak-a)$, $G\left(a\dfrac{2-k}{k},a\right)$, па је једначина праве FG: $(2-k)kx-2(1-k)y-ak(2-k)-2a(k-1)^2=0$. Једноставно се проверава да је одстојање ове праве од координатног почетка једнако a, што значи да она додирује круг уписан у квадрату $ABCD$.

1050. $B(6,2)$ и $D(1,2)$ или $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $D\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)$.

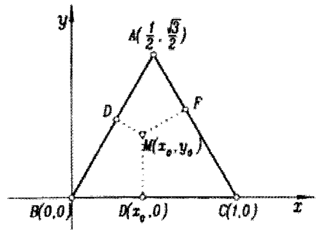
1051. Означимо са $S(x,y)$ центар ма ког од поменутих кругова (в. слику). Једначина тог круга је $X^2+Y^2-2xX-2yY=0$. За праве $Y=k(X-a)$, које пролазе кроз тачку A, услов додира је

$$k^2(y^2+2ax-a^2)+2y(x-a)k+x^2=0.$$

Према услову задатка за решења k_1 и k_2 ове једначине важи $k_1k_2=-1$, па по Вијетовим формулама добијамо $\dfrac{x^2}{y^2+2ax-a^2}=-1$. Дакле, тражено геометријско место је круг $x^2+y^2+2ax=a^2$ тј. $(x+a)^2+y^2=(a\sqrt{2})^2$. Обрнутим поступком лако се доказује да свака тачка овог круга испуњава постављени услов.



Сл. уз зад. 1051



Сл. уз зад. 1052

1052. Једначине правих одређених страницама троугла су AB: $y=x\sqrt{3}$, AC: $y=-x\sqrt{3}+\sqrt{3}$ (в. слику). Ако тачка M има координате (x_0,y_0), једначина праве MD биће: $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{x_0}{\sqrt{3}}+y_0$, одакле налазимо координате тачке $D\left(\dfrac{x_0+y_0\sqrt{3}}{4},\dfrac{3y_0+x_0\sqrt{3}}{4}\right)$. Коефицијенти правца правих DE и EF су

$$k_{DE}=\frac{y_D-y_E}{x_D-x_E}=\frac{x_0\sqrt{3}+3y_0}{-3x_0+y_0\sqrt{3}},\quad k_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{-x_0\sqrt{3}+3y_0+\sqrt{3}}{-3x_0-y_0\sqrt{3}+3}.$$

Како је $k_{DE}\cdot k_{EF}=-1$, сређивањем добијамо

$$x_0^2+y_0^2-x_0+y_0\sqrt{3}=0,\quad \text{тј.}\quad \left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1.$$

Тражено геометријско место тачака је део кружне линије са центром у тачки $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ полупречника 1, који се налази у унутрашњости троугла ABC.

1053. а) Једначину трансформишемо на следећи начин:

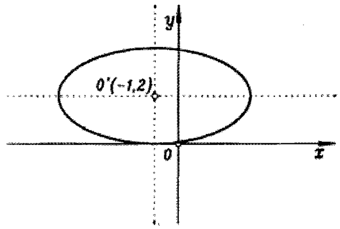
$$4(x^2+2x+1)-4+9(y^2-4y+4)-36+4=0$$
$$\iff 4(x+1)^2+9(y-2)^2=36 \iff \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Дата једначина представља елипсу са центром у тачки $O'(-1,2)$ (в. слику).

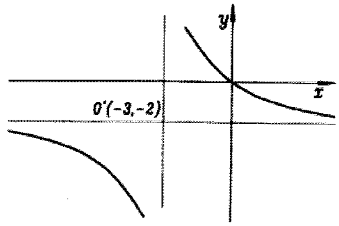
б) Парабола $y-1=(x+2)^2$ са теменом у тачки $T'(-2,1)$.

в) Једнакостранична хипербола $(x+3)(y+2)=6$ са центром у тачки $O'(-3,-2)$ (в. слику).

г) Једначина се може написати у облику $(x+2y)(x-y+2)=0$, па одређује две праве $x+2y=0$ и $x-y+2=0$ које се секу.



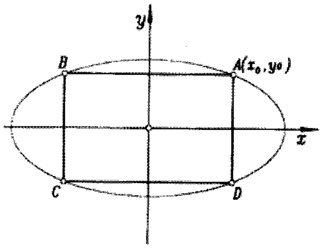
Сл. уз зад. 1053 а)



Сл. уз зад. 1053 б)

1054. Нека је $ABCD$ правоугаоник уписан у елипсу и теме $A(x_0, y_0)$ се налази у првом квадранту (в. слику). Тада је површина правоугаоника $P = 4x_0y_0$ и важи $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, $0 \le x_0 \le a$, $0 \le y_0 \le b$. Површина правоугаоника је највећа ако је квадрат те површине максималан. Међутим,

$$P_{ABCD}^2 = 16x_0^2y_0^2 = 16x_0^2b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 16\frac{b^2}{a^2}[x_0^2(a^2 - x_0^2)]$$
$$\le 16\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2 + a^2 - x_0^2}{2} = 4a^2b^2,$$



Сл. уз зад. 1054

на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине. Једнакост важи када је $x_0^2 = a^2 - x_0^2$, тј. $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Налазимо да је $y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, па су дужине страница правоугаоника највеће површине $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$, док је површина тада $2ab$.

1055. а) Једначина тангенте елипсе у произвољној тачки $M(x_1, y_1)$ је $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$ (в. слику). Координате тачака A и B су редом: $A\left(-a, \dfrac{b^2}{y_1}\left(1 + \dfrac{x_1}{a}\right)\right)$, $B\left(a, \dfrac{b^2}{y_1}\left(1 - \dfrac{x_1}{a}\right)\right)$, а десног фокуса $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$. Како су коефицијенти правца правих AF и BF

$$k_1 = \frac{\dfrac{b^2}{y_1}\left(1 + \dfrac{x_1}{a}\right)}{-a - \sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\dfrac{b^2}{y_1}\left(1 - \dfrac{x_1}{a}\right)}{a - \sqrt{a^2 - b^2}},$$

то је

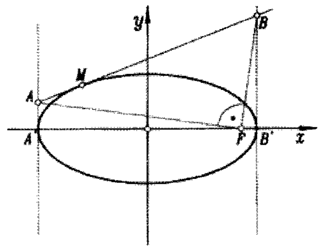
$$k_1k_2 = \frac{\dfrac{b^4}{y_1^2}\left(1 - \dfrac{x_1^2}{a^2}\right)}{-(a^2 - (a^2 - b^2))} = -\frac{b^2}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{b^2} = -1,$$

па је $AF \perp BF$.

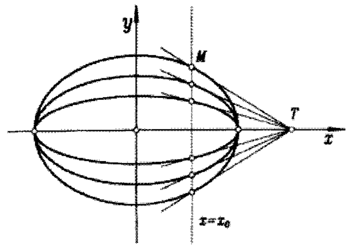
б) (в. слику):

$$AA' \cdot BB' = \frac{b^2}{y_1}\left(1 + \frac{x_1}{a}\right) \cdot \frac{b^2}{y_1}\left(1 - \frac{x_1}{a}\right) = \frac{b^4}{y_1^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{b^2} = b^2.$$

1056. Једноставно се добија да тачка M на елипси (в. слику) за коју је прва координата једнака x_0 има другу координату $y_0 = \pm\dfrac{\lambda}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$. Нека је $M\left(x_0, \dfrac{\lambda}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}\right)$ (други



Сл. уз зад. 1055



Сл. уз зад. 1056

случај је симетричан!). Тангента елипсе у тачки M има једначину

$$\lambda^2 x_0 x + a^2 \cdot \frac{\lambda}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} \cdot y = a^2\lambda^2$$

и она сече x-осу у тачки $T\left(\dfrac{a^2}{x_0}, 0\right)$, која, што је очигледно, не зависи од λ.

1057. Једначине страница троугла су AB: $y-2=0$, BC: $x+y+2=0$ и CA: $x-y-2=0$. За тачку $M(x,y)$ из траженог геометријског места збир квадрата одстојања од страница троугла је

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (y-2)^2 + \frac{(x-y-2)^2}{2} + \frac{(x+y+2)^2}{2} = 12.$$

Сређивањем добијамо $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. Да свака тачка ове елипсе припада траженом геометријском месту тачака проверава се обрнутим поступком.

1058. Нека је $C(-a,r)$, $D(a,s)$, $r,s \in \mathbf{R}$. Једначине правих AD и BC су редом $y = \dfrac{s}{2a}(x+a)$ и $y = -\dfrac{r}{2a}(x-a)$. Из ових једначина, користећи услов нормалности правих OC и OD ($rs = a^2$), добијамо $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(a/2)^2} = 1$. Једноставно се проверава и да свака тачка ове елипсе припада траженом геометријском месту тачака.

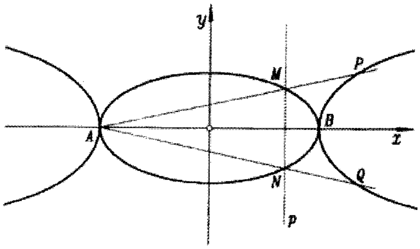
1059. Елипса $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{(2r)^2} = 1$.

1060. Нека тачка $M(x,y)$ припада траженом геометријском месту. Ако је k коефицијент правца неке праве која садржи тачку $M(x,y)$, из услова додира те праве и елипсе добија се $k^2a^2 + b^2 = (y-kx)^2$, односно $(a^2-x^2)k^2 + 2xyk + (b^2-y^2) = 0$. Како је из услова нормалности $k_1k_2 = -1$, по Вијетовим формулама је $\dfrac{b^2-y^2}{a^2-x^2} = -1$, па је једначина геометријског места $x^2+y^2 = a^2+b^2$. Једноставно се показује да свака тачка круга $x^2+y^2=a^2+b^2$ има својство да се из ње дата елипса види под правим углом.

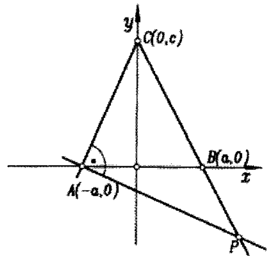
1061. Тачке M и N имају координате $M\left(t, \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$ и $N\left(t, -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$ (в. слику). Праве AM и BN имају једначине:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x+a}{t+a} \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x-a}{a-t}.$$

Тачка P има координате $x = \dfrac{a^2}{t}$ и $y = \dfrac{b}{t}\sqrt{a^2-t^2}$, $t \neq 0$. Елиминацијом параметра t добија се $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($xy > 0$, тј. тачка P припада једном од лукова те хиперболе у I или III квадранту). Обрнутим поступком лако се доказује да се свака тачка тих лукова може добити на описани начин. Слично се доказује да је геометријско место тачака Q унија лукова те хиперболе у II и IV квадранту.



Сл. уз зад. 1061



Сл. уз зад. 1062

1062. Нека је $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,c)$. Једначина праве BC је (в. слику) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{c}=1$, а једначина праве AP је $y=-\dfrac{a}{c}(x+a)$. Када се из ове две једначине елиминише параметар c добија се $x^2-y^2=a^2$. Треба још установити да ли је тражено геометријско место хипербола $x^2-y^2=a^2$ или само њен део. Из једначина правих BC и AP добијамо $x=\dfrac{a(a^2+c^2)}{c^2-a^2}$. Како је $a>0$ биће $x<0$ за $|c|<a$ и $x>0$ за $|c|>a$. Према томе, ако се тачка C налази у унутрашњости квадрата чија је једна дијагонала AB, геометријско место тачака P је она грана хиперболе $x^2-y^2=a^2$ на којој се налази тачка A, а ако је C изван тог квадрата, геометријско место је друга грана те хиперболе.

1063. $\dfrac{(x-a/2)^2}{(a/2)^2}-\dfrac{y^2}{(b/2)^2}=1.$

1064. Права $y=kx$ сече дате праве у тачкама $A\left(\dfrac{1}{1+k},\dfrac{k}{1+k}\right)$ и $B\left(\dfrac{1}{1-k},\dfrac{k}{1-k}\right)$, ($|k|\neq 1$). Координате средишта S дужи AB су $x=\dfrac{1}{1-k^2}$, $y=\dfrac{k}{1-k^2}$. Елиминацијом параметра k добија се једначина $x^2-y^2=x$, која се може написати у облику $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$, из чега произилази да она представља хиперболу. Приметимо да се тачка $O(0,0)$, која припада тој хиперболи, добија као средиште дужи коју дате праве одсецају на y-оси. Лако се доказује да свака тачка добијене хиперболе представља средиште неке дужи AB.

1065. Једначина праве s је облика $y=kx$, $k\in\mathbf{R}$ или $x=0$. Пресечне тачке праве $x=0$ и правих a и b су $A'(0,4)$ и $B'(0,-4)$; средиште дужи $A'B'$ је тачка $M'(0,0)$. Пресечне тачке праве $y=kx$ и првих a и b су $A\left(\dfrac{4}{1+k},\dfrac{4k}{1+k}\right)$, $k\neq-1$, односно $B\left(\dfrac{4}{1-k},\dfrac{4k}{1-k}\right)$, $k\neq 1$. Средиште M дужи AB има координате

$$x_M=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+k}+\frac{4}{1-k}\right)=\frac{4}{1-k^2},\quad y_M=\frac{1}{2}\left(\frac{4k}{1+k}+\frac{4k}{1-k}\right)=\frac{4k}{1-k^2}.$$

Елиминацијом параметра k из ових веза ($k\neq\pm1$) добијамо $k=\pm\sqrt{1-\frac{4}{x}}$, па је $y=\pm x\sqrt{1-\frac{4}{x}}=\pm\sqrt{x^2-4k}$, $x\neq 0$, тј. $y^2=x^2-4x$. Укључивањем тачке $M'(0,0)$ добијамо да је тражено геометријско место хипербола $y^2=x^2-4x$, тј. $(x-2)^2-y^2=4$.

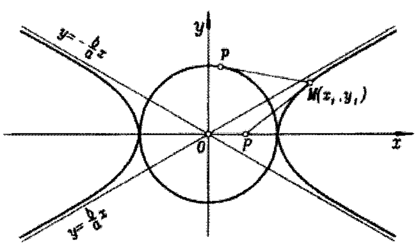
1066. Координате тачке M су $M\left(x_1, \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}\right)$ (в. слику), а једначина праве кроз M паралелне асимптоти $y=\frac{b}{a}x$ је

$$y-\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-x_1),\quad \text{тј.}\quad ay-bx+b(x_1-\sqrt{x_1^2-a^2})=0.$$

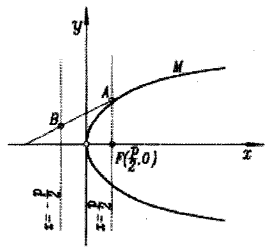
Будући да је P на x-оси ордината тачке P је $y_2=0$, а апсциса се добија из последње једначине за $y=0$. Биће $x_2=x_1-\sqrt{x_1^2-a^2}$. Дакле, $P(x_1-\sqrt{x_1^2-a^2},0)$, па је

$$MP=\sqrt{(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}-x_1)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}.$$

Из правоуглог троугла OMD је $MD=\sqrt{MO^2-DO^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$, па је $MP=MD$.



Сл. уз зад. 1066



Сл. уз зад. 1070

1067. Једначина тангенте конструисане у тачки $M(x_1,y_1)$ дате хиперболе је $b^2xx_1-a^2yy_1=a^2b^2$. Ова права сече праве $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ у тачкама $A\left(\frac{a^2b}{x_1b-y_1a}, \frac{ab^2}{x_1b-y_1a}\right)$ и $B\left(\frac{a^2b}{x_1b+y_1a}, \frac{-ab^2}{x_1b+y_1a}\right)$.

а) Координате средишта S дужи AB су

$$x_S=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{x_1b-y_1a}+\frac{a^2b}{x_1b+y_1a}\right)=\frac{x_1a^2b^2}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}=x_1$$
$$y_S=\frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{x_1b-y_1a}+\frac{-ab^2}{x_1b+y_1a}\right)=\frac{y_1a^2b^2}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}=y_1,$$

па је $S(x_1,y_1)$, односно $S\equiv M$.

б) Како је

$$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\text{ апс.вр.}\begin{vmatrix}\frac{a^2b}{x_1b-y_1a} & \frac{ab^2}{x_1b-y_1a}\\ \frac{a^2b}{x_1b+y_1a} & \frac{-ab^2}{x_1b+y_1a}\end{vmatrix}=2|ab|,$$

то је површина троугла OAB константна и једнака $|ab|$ без обзира на положај тачке M на хиперболи.

1068. Из услова да елипса и хипербола имају заједничке фокусе имамо

$$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2,\quad \text{тј.}\quad a_1^2-a_2^2=b_1^2+b_2^2. \tag{1}$$

Дате елипса и хипербола секу се у четири тачке, чије су координате

$$x = \pm a_1 a_2 \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}}, \quad y = \pm b_1 b_2 \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}}.$$

Ако уведемо смену $\sqrt{\dfrac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}} = t$, обзиром на (1), биће $x = \pm a_1 a_2 t$, $y = \pm b_1 b_2 t$. Довољно је доказати да се тангенте елипсе и хиперболе у једној од тачака пресека, на пример $A(a_1a_2t, b_1b_2t)$ секу под правим углом. Једначине ових тангенти су

$$b_1^2 a_1 a_2 t x + a_1^2 b_1 b_2 t y = a_1^2 b_1^2, \quad \text{односно}, \quad b_1^2 a_1 a_2 t x - a_2^2 b_1 b_2 t y = a_2^2 b_2^2,$$

а њихови коефицијенти правца су $k_1 = -\dfrac{b_1 a_2}{a_1 b_2}$, $k_2 = \dfrac{b_2 a_1}{a_2 b_1}$. Очигледно је да је $k_1 k_2 = -1$, тј. тангенте су међу собом управне.

1069. Због симетрије хиперболе у односу на координатне осе можемо узети да је тачка у првом квадранту: $M\left(t, \dfrac{b}{a}\sqrt{t^2 - a^2}\right)$, $t > a$. Права кроз тачку M паралелна асимптоти $y = \dfrac{b}{a}x$ има једначину $y - \dfrac{b}{a}\sqrt{t^2 - a^2} = \dfrac{b}{a}(x - t)$ и сече праву $y = -\dfrac{b}{a}x$ у тачки $A\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2 - a^2}, \dfrac{b}{2a}\sqrt{t^2 - a^2} - \dfrac{bt}{2a}\right)$. Одстојање тачке M од асимптоте $y = -\dfrac{b}{a}x$ је $d = \dfrac{b\sqrt{t^2 - a^2} + bt}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, па је површина поменутог паралелограма:

$$\begin{aligned}
P = OA \cdot d &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \cdot d = \sqrt{x_A^2 + \frac{b^2}{a^2} x_A^2} \cdot \frac{b\sqrt{t^2 - a^2} + bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{x_A}{a}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{b\sqrt{t^2 - a^2} + bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \left(\frac{t}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{t^2 - a^2}\right)(b\sqrt{t^2 - a^2} + bt) \\
&= \frac{b}{2a}(t - \sqrt{t^2 - a^2})(t + \sqrt{t^2 - a^2}) = \frac{b}{2a}(t^2 - t^2 + a^2) = \frac{ab}{2}.
\end{aligned}$$

1070. Нека су A и B тачке пресека тангенте параболе у тачки $M(x_1, y_1)$ са фокалном сечицом и директрисом (в. слику). Једначина тангенте је $y_1 y = p(x + x_1)$, фокалне сечице $x = \frac{1}{2}p$, а директрисе $x = -\frac{1}{2}p$, па су координате тачака A и B: $A\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{y_1}\left(x_1 + \dfrac{p}{2}\right)\right)$, $B\left(-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{y_1}\left(x_1 - \dfrac{p}{2}\right)\right)$, а дужине дужи AF и FB су

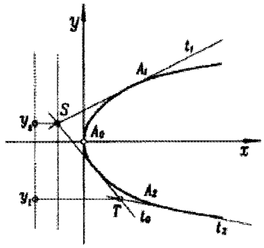
$$\begin{aligned}
AF &= \left|\frac{p}{y_1}\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|y_1 + \frac{p^2}{y_1}\right|, \\
BF &= \sqrt{p^2 + \frac{p^2}{y_1^2}\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(y_1 + \frac{p^2}{y_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|y_1 + \frac{p^2}{y_1}\right|,
\end{aligned}$$

дакле $AF = BF$.

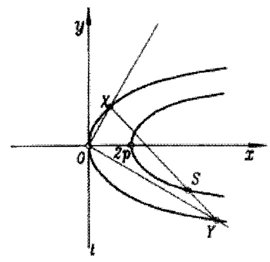
1071. Нека су $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ фиксиране тачке на датој параболи, а $A_0(x_0, y_0)$ произвољна тачка те параболе (в. слику). Тангенте t_0, t_1, t_2 у тачкама A_0, A_1, A_2 су одређене једначинама:

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0), \quad x - x_1 = \frac{y_1}{p}(y - y_1), \quad x - x_2 = \frac{y_2}{p}(y - y_2).$$

Нека је $S(x_S, y_S)$ пресек правих t_0 и t_1, а $T(x_T, y_T)$ пресек правих t_0 и t_2. Лако се проверава да је $y_S = \frac{1}{2}(y_1 + y_0)$, $y_T = \frac{1}{2}(y_2 + y_0)$. Како је директриса параболе паралелна y-оси, то је дужина пројекције дужи ST на директрису једнака $|y_S - y_T| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$, дакле не зависи од положаја тачке A_0.



Сл. уз зад. 1071



Сл. уз зад. 1072

1072. а) Нека су једначине правих OX и OY: $y = tx$ $(t > 0)$, односно $y = -\dfrac{1}{t}x$ (в. слику). Координате тачака X и Y су $X\left(\dfrac{2p}{t^2}, \dfrac{2p}{t}\right)$, $Y(2pt^2, -2pt)$, а средишта S дужи XY је $S\left(p\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right), p\left(-t + \dfrac{1}{t}\right)\right)$. Ако је $x = p\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)$, $y = p\left(-t + \dfrac{1}{t}\right)$, елиминацијом параметра t добија се једначином траженог геометријског места $y^2 = p(x - 2p)$. Једноставно се проверава да је свака тачка ове параболе средиште једна од дужи XY за неко $t > 0$.

б) Једначина праве XY је

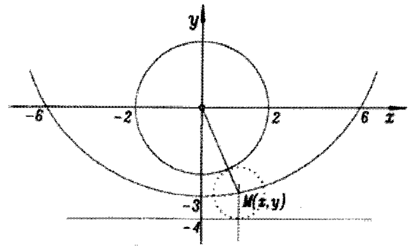
$$\left(x - \frac{2p}{t^2}\right) : \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) = \left(y - \frac{2p}{t}\right) : \left(-t - \frac{1}{t}\right).$$

Непосредно се проверава да за свако $t > 0$ ову једначину задовољава тачка чије су координате $(2p, 0)$.

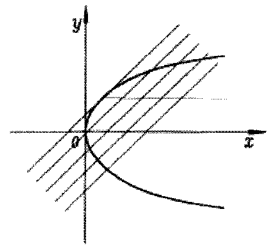
1073. Нека је $S\left(-\frac{1}{2}p, y_0\right)$ тачка на директриси $x = -\frac{1}{2}p$ параболе $y^2 = 2px$. Једначина праве која садржи тачку S (и различита је од директрисе) је облика $y - y_0 = k\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$. Заједничке тачке ове праве и параболе се налазе као решења система једначина $y - y_0 = k\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$, $y^2 = 2px$. Елиминацијом непознате x добијамо квадратну једначину $ky^2 - 2py + kp^2 + 2py_0 = 0$, чија је дискриминанта $D = 4p^2 - 4k^2p^2 - 8kpy_0$. Услов да права додирује параболу је $D = 0$. По Вијетовим формулама из једначине $4k^2p^2 + 8kpy_0 - 4p^2 = 0$ добијамо $k_1k_2 = \dfrac{-4p^2}{4p^2} = -1$, што значи да је су тангенте параболе конструисане из тачке $S\left(-\frac{1}{2}p, y_0\right)$ међу собом управне.

1074. Ако је $M(x, y)$ произвољна тачка геометријског места (в. слику), тада је $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = |y + 4|$, одакле добијамо да је тражено геометријско место тачака парабола чија је једначина $x^2 - 12y - 36 = 0$. Једноставно се проверава да свака тачка добијене параболе представља средиште неког од поменутих кругова.

1075. Нека је $A(x, y)$ тачка која припада траженом геометријском месту. По услову задатка тачка $M(x, 2y)$ припада параболи, па је $4y^2 = 2px$, тј. $y^2 = \frac{1}{2}px$. Дакле, тражено геометријско место је парабола $y^2 = \frac{1}{2}px$.



Сл. уз зад. 1074



Сл. уз зад. 1076

1076. Једначина тангенте параболе у тачки $T(x_0, y_0)$ је $yy_0 = p(x+x_0)$. Тетиве параболе паралелне овој тангенти (в. слику) припадају правим $y = \dfrac{p}{y_0}x + b$ $(y_0 \neq 0)$. Координате крајњих тачака ових тетива налазе се као решења система једначина $y = \dfrac{p}{y_0}x + b$, $y^2 = 2px$. Елиминацијом променљиве x добијамо квадратну једначину $y^2 - 2y_0y + 2y_0b = 0$, из које, по Вијетовим формулама, добијамо $\dfrac{y_1+y_2}{2} = \dfrac{2y_0}{2} = y_0$. Дакле, средишта свих тетива припадају полуправој паралелној x-оси: $y = y_0$ за $x > x_0$.

1077. Нека је $M(x_0, y_0)$. Једначина тангенте параболе у тачки M је $yy_0 = p(x+x_0)$, па су координате тачке $A(-x_0, 0)$. Како су координате тачке $B(x_0, 0)$, очигледно је да је O средиште дужи AB.

1078. Нека је $M(x_0, y_0)$. Једначина тангенте параболе у тачки M је $yy_0 = p(x+x_0)$, па је $N(-x_0, 0)$. Координате фокуса параболе су $F\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$. Биће

$$NF = \left|\frac{p}{2} + x_0\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + px_0 + x_0^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + x_0^2 - px_0 + y_0^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2} = MF.$$

1079. Нека је $T(x, y)$, тј. $T\left(\dfrac{y^2}{2p}, y\right)$ тачка на параболи и $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ жижа. Тада је $TO^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{y^4}{4p^2} + y^2$, $TF^2 = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{y^4}{4p^2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{p^2}{4}$. Из $TO^2 + TF^2 = \dfrac{y^4}{2p^2} + \dfrac{3y^2}{2} + \dfrac{p^2}{4} = k^2$ добијамо $y^4 + 3p^2y^2 + \frac{1}{2}p^4 - 2p^2k^2 = 0$. Ова једначина има два реална решења:

$$T_1\left(\frac{-3p + \sqrt{7p^2 + 8k^2}}{4}, \sqrt{\frac{-3p^2 + p\sqrt{7p^2 + 8k^2}}{2}}\right)$$
$$T_2\left(\frac{-3p + \sqrt{7p^2 + 8k^2}}{4}, -\sqrt{\frac{-3p^2 + p\sqrt{7p^2 + 8k^2}}{2}}\right).$$

Глава VII – Математичка индукција. Низови

1080. а) Означимо $P(n)$: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbf{N}$. Проверавамо, прво, тачност исказа $P(1)$. Заменом $n=1$, налазимо $1=\frac{1(1+1)}{2}$, што је, очигледно, тачно. Претпоставимо сада да је $P(n)$ тачно, дакле, да је за произвољан природан број n,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Одавде следи да је

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

што можемо писати у облику

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2},$$

а то је тврђење $P(n+1)$. Доказали смо да за сваки природан број n важи импликација $P(n)\implies P(n+1)$. Пошто смо проверили и да је $P(1)$ тачно, методом математичке индукције смо доказали да је $P(n)$ тачно за све природне бројеве.

1082. а) За $n=1$ имамо $1\cdot 1!=2!-1$, односно $1=1$. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број n. Тада је

$$\begin{aligned}1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!+(n+1)\cdot(n+1)! &= (n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)!\\ &=(n+1)!\cdot(n+1+1)-1=(n+2)\cdot(n+1)!-1=(n+2)!-1,\end{aligned}$$

што значи да је тада тврђење тачно и за $n+1$.

1083. а) За $n=2$ добијамо $\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$ што је, очигледно, тачно. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број n. Тада је

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)&=\frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)n(n+2)}{2n(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}\end{aligned}$$

односно тврђење је тачно и за $n+1$.

1084. а) Означимо $f(n)=5^n+2^{n+1}$. Треба доказати да за сваки природан број n, постоји цео број k, такав да је $f(n)=3k$.

За $n=0$ имамо да је $f(0)=5^0+2^{0+1}=3$, дакле $f(0)$ је дељиво са 3.

Претпоставимо да је $f(n)$ дељив са 3 и посматрајмо број $f(n+1)$:

$$\begin{aligned}f(n+1)&=5^{n+1}+2^{n+1+1}=5\cdot 5^n+2\cdot 2^{n+1}\\ &=5\big(f(n)-2^{n+1}\big)+2\cdot 2^{n+1}=5f(n)-3\cdot 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Користећи се индуктивном претпоставком да је број $f(n)$ дељив са 3, налазимо да је и $f(n+1)$ дељив са 3, па како смо већ проверили да је број $f(0)$ дељив са 3, значи да су сви бројеви $f(n)$ дељиви са 3.

з) Означимо $f(n)=4^{2n}-3^{2n}-7$. За $n=1$ имамо $f(1)=0$, па је $f(1)$ дељив са 84. Ако је $f(n)$ дељив са 84, онда је дељив и са 7 и са 12, чиме ћемо се у даљем користити. Успоставићемо везу између $f(n+1)$ и $f(n)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}f(n+1)&=4^{2(n+1)}-3^{2(n+1)}-7=16\cdot 4^{2n}-9\cdot 3^{2n}-7\\ &=16\big(f(n)+3^{2n}+7\big)-9\cdot 3^{2n}-7=16f(n)+7\cdot 3^{2n}+7\cdot 15.\end{aligned}$$

Пошто је $f(n)$ дељив са 7, одатле закључујемо да је број $f(n+1)$ дељив са 7. Да бисмо доказали да је $f(n+1)$ дељив са 84, довољно је доказати да је број $g(n) = 3^{2n} + 15$ дељив са 12 за све $n \in \mathbf{N}$. Ово ћемо, такође, доказати математичком индукцијом.

За $n = 1$ је $g(1) = 3^2 + 15 = 24$, што је дељиво са 12.

Претпоставимо да је $g(n)$ дељиво са 12. Онда је $g(n+1) = 3^{2(n+1)} + 15 = 9 \cdot 3^{2n} + 15 = 9\big(g(n) - 15\big) + 15 = 9g(n) - 120$, одакле закључујемо да је $12 \mid g(n)$, па и $84 \mid f(n)$, за све природне бројеве n.

1085. а) Доказаћемо, применом математичке индукције да се број $f(n) = 2^{2^n}$ завршава цифром 6 за све $n \geq 2$. Имамо да је $f(2) = 2^{2^2} = 2^4 = 16$, $f(n+1) = 2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = [f(n)]^2$. Ако се број $f(n)$ завршава цифром 6, онда се и његов квадрат завршава цифром 6.

1086. а) За $n = 2$ имамо $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}$. Претпоставимо да је тврђење тачно за природан број n и докажимо да важи и за $n+1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} &> \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1087. а) За $n = 5$ имамо $2^5 > 5^2$, тј. $32 > 25$, што је тачно. Претпоставимо да је $2^n > n^2$. Тада је $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 > (n+1)^2$, јер је $2^n > n^2$ обзиром на претпоставку, а $2n^2 > (n+1)^2$ је еквивалентно са $n^2 > 2n+1$, тј. $(n-1)^2 > 2$, што је тачно због $n \geq 5$. Закључујемо да је $2^{n+1} > (n+1)^2$.

б) За $n = 4$ имамо тачну неједнакост $4! = 24 > 16 = 2^4$. Претпоставимо да је $n! > 2^n$ и докажимо да из тога следи да је $(n+1)! > 2^{n+1}$. Имамо да је $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, одакле на основу индуктивне претпоставке следи да је $(n+1)! > (n+1) \cdot 2^n$. За све природне бројеве, који су већи од 1, важи $n + 1 > 2$, па је за посматране бројеве $(n+1)! > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

1088. а) Очигледно је $x_1 = 1 = 1!$ и $x_2 = 2 = 2!$. Претпоставимо да је $x_{n-1} = (n-1)!$ и $x_n = n!$. Онда је

$$x_{n+1} = n(x_{n-1} + x_n) = n\big((n-1)! + n!\big) = n(n-1)!\,(1+n) = (n+1)n(n-1)! = (n+1)!\ .$$

д) Имамо да је $a_0 = 2^0 + 0 \cdot 2^0 = 1$ и $a_1 = 2^1 + 1 \cdot 2^1 = 4$. Претпоставимо да је $a_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1}$ и $a_n = 2^n + n \cdot 2^n$. Тада је

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= 4\big(2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1}\big) - 4(2^n + n \cdot 2^n)\\ &= 8 \cdot 2^n + 8n \cdot 2^n + 8 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^n - 4n \cdot 2^n = 12 \cdot 2^n + 4n \cdot 2^n\\ &= 2^{n+2} + (n+2) \cdot 2^{n+2}.\end{aligned}$$

1089. а) За $n = 1$ имамо тачну неједнакост $\frac{3}{5} < \sqrt{\frac{3}{7}}$. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број n. Тада је

$$\frac{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)(4n+3)}{6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)(4n+5)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}} \cdot \frac{4n+3}{4n+5} < \sqrt{\frac{3}{4n+5}}.$$

Прва неједнакост је последица претпоставке, а друга је еквивалентна са

$$\sqrt{\frac{3(4n+3)}{(4n+5)^2}} < \sqrt{\frac{3}{4n+5}}, \quad \text{тј. са } \frac{4n+3}{4n+5} < 1.$$

1090. а) За $n = 1$ тврђење је тачно јер је $\sin\alpha = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Претпоставимо да је тврђење тачно за природан број n. Тада је

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin(n+1)\alpha\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{n\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{(n+2)\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\frac{n+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

в) *Упутство.* Доказати да је $\dfrac{1}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha$, $\alpha \neq \dfrac{m\pi}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

1091. За $n = 2$, $\cos\dfrac{\pi}{2^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ је ирационалан број. Ако је за неко $n \geq 2$, $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ ирационалан број, онда из једнакости $\cos\dfrac{\pi}{2^n} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}} - 1$ следи да је и $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ ирационалан број. Наиме, ако би $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ био рационалан број, онда би и $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ био рационалан број.

1092. Лако се види да је $a_2 = \dfrac{2x}{1+x}$. Претпоставимо да је $a_{n+1} = \dfrac{2^n x}{2^n + x - 1}$. Тада

$$a_{n+2} = \frac{2xa_{n+1}}{a_{n+1}+x} = \frac{2x\dfrac{2^n x}{2^n+x-1}}{\dfrac{2^n x}{2^n+x-1}+x} = \frac{2^{n+1}x^2}{2^n x+2^n x+x^2-x} = \frac{2^{n+1}x}{2^{n+1}+x-1}.$$

1093. Очито је $f^1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Претпоставимо да је $f^n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Тада је

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+n(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+n\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+x^2+nx^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

1094. а) $2n^3-3n^2+n = n(n-1)(2n-1)$. Од бројева n, $n-1$ један је паран. Ако бројеви n и $n-1$ нису дељиви са 3, онда је са 3 дељив број $n+1$, па и број $2n-1 = 2(n+1)-3$. б) $n^3+3n^2+5n+3 = n(n+1)(n+2)+3(n+1)$. Сваки од ова два сабирка је дељив са 3.

1095. а) $m^3 - m = m(m^2-1) = (m-1)m(m+1)$. Производ три узастопна цела броја дељив је са 2 и са 3, па према томе и са 6. б) *Упутство*: $m^5 - m = m(m^4-1) = m(m^2+1)(m-1)(m+1)$.

1096. а) Ако је p прост број различит од 3, онда је p облика $3k \pm 1$, $k \in \mathbf{N}$. Тада је $8p^2+1 = 8(3k\pm1)^2+1 = 72k^2 \pm 48k + 9$ број дељив са 3, па је једино могуће да буде $p = 3$. Тада је $8p^2 + 1 = 73$ — прост број.

б) $p = 3$. в) $p = 3$.

г) За $p = 2$ је $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ — сложен број. Ако је $p = 3$, $2^3 + 3^2 = 17$ је прост број. Нека је $p > 3$. Тада је p облика $6k+1$ или $6k+5$, $k \in \mathbf{N}$. Ако је $p = 6k+1$, важиће $2^6 \equiv 1 \pmod 3$ и $2^{6k} \equiv 1 \pmod 3$ и $p \equiv 1 \pmod 3$, $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, па је $2^p + p^2 \equiv 3 \pmod 3$. Ако је $p = 6k+5$, биће $2^{6k+5} \equiv 2^5 \equiv -1 \pmod 3$ и $p^2 \equiv 5^2 \equiv 1 \pmod 3$, па је и у овом случају $2^p + p^2$ дељив са 3. Дакле, једини број који задовољава постављене услове је $p = 3$.

1097. а) Ни за један број p; б) $p = 13$.

1098. Дати број може се написати у облику

$$\frac{p_2p_3\cdot\ldots\cdot p_n + p_1p_3\cdot\ldots\cdot p_n + \cdots + p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_{n-1}}{p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_n}$$

Тај број није цео јер бројилац разломка није дељив са p_1 (први сабирак у њему није дељив са p_1, а сви остали јесу).

1099. *Упутство*: $10\overline{abc} - \overline{bca} = 999a$, а број 999 је дељив са 37.

1100. Нека је тај број $\overline{xyy} = 100x + 10y + y = 100x + 11y = 2(x+2y) + 7(14x+y)$. Како је овај број дељив са 7, биће и израз $2(x+2y)$ дељив са 7, односно збир цифара датог броја $x + 2y$ такође је дељив са 7.

1101. Број $(n-2)(n-1)n(n+1) = (n^2-n-2)(n^2-n) = (n^2-n-1-1)(n^2-n-1+1) = (n^2-n+1)^2 - 1$ не може бити потпун квадрат јер је облика $M^2 - 1$.

1102. а) Број је дељив са 9 ако је збир његових цифара дељив са 9. Најмањи број овог облика је $N = 10101010101010101$ (9 јединица и 8 нула).

б) Број је дељив са 99 ако је дељив са 9 и са 11, а дељив је са 11 ако му је разлика збира цифара на парним и непарним местима дељива са 11. Најмањи број овог облика дељив са 99 има 99 јединица и 98 нула.

1103. а) Како је дати број дељив са 9, то је и збир његових цифара дељив са 9, тј. $9 \mid 4 + x + y$. То је могуће само ако је $x + y = 5$ или $x + y = 14$. Дати број може се написати у облику $\overline{199300} + 10x + y = 8k + 8x + (2x + y)$, $k \in \mathbf{N}$, па је он дељив са 8 ако и само ако је $8 \mid 2x + y$. Ако је $x + y = 5$, тада је $2x + y = x + 5$ дељив са 8 ако и само ако је $x = 3$ и $y = 2$. У овом случају тражени број је 199332. Ако је $x + y = 14$, тада је $2x + y = x + 14$ дељив са 8 ако и само ако је $x = 2$ и $y = 12$, што је немогуће, јер је y цифра.

б) Три решења: 34056, 34452, 34956.

1104. $(mn + pq) - (mq + np) = (m-p)(n-q)$.

1105. а) Нека је n тражени број. Непосредно се установљава да је број $n+1$ дељив са 2, са 3, са 4, са 5 и са 6, а пошто је $\text{НЗС}(2,3,4,5,6) = 60$, то је $n + 1 = 60$, односно $n = 59$.

б) $\text{НЗС}(2,3,\ldots,10) - 1 = 2519$. в) $n = 60 \cdot 4 - 2 = 238$.

1106. а) Како је $n^2+n+2 = \frac{1}{4}((2n+1)^2+7)$, закључујемо да $(2n+1)^2$ мора бити дељив са 49. Одавде следи да број $n^2 + n + 2$ не може бити дељив са 49, јер при дељењу са 49 даје остатак 7.

б) Број $n^2 + 3n + 5$ може се написати у облику $\frac{1}{4}((2n+3)^2 + 11)$.

1107. а) Како је $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, то је и $(2^3)^{33} \equiv 1 \pmod 7$, па је $2^{100} \equiv 2 \pmod 7$.

б) Из $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$ следи $5^{20} \equiv 1 \pmod{24}$; в) 12; г) 8.

1108. а) Како је $10^3 - 1 = 999 = 37 \cdot 27$, то је $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$, па је и $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$. б) Степеновати са n релацију $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$.

1109. в) Како је $7^2 \equiv 1 \pmod{18}$, то је и $(7^2)^{12} = 7^{24} \equiv 1 \pmod 8$. Како је $7^3 - 1 = 342 = 19 \cdot 18$, то је $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$, па је и $7^{24} \equiv 1 \pmod{19}$. Најзад, може се показати да је $6^{24} \equiv 1 \pmod{13}$, а број $7^{24} - 1 = (13-6)^{24} - 1$ је дељив са 13 ако и само ако је $6^{24} - 1$ дељиво са 13.

1110. а) Нека је $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n$, где су $a_0, a_1, \ldots, a_n$ цифре. Сабирањем релација

$$a_0 \equiv a_0 \pmod 9, \quad 10a_1 \equiv a_1 \pmod 9, \quad \ldots \quad 10^n a_n \equiv a_n \pmod 9$$

добијамо $M \equiv (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \pmod 9$. Значи, број је дељив са 9 ако и само ако је збир цифара тога броја дељив са 9.

1111. Како је $5^5 - 1 = 3124 = 11 \cdot 284$, $4^5 - 1 = 1023 = 11 \cdot 93$ и $3^5 - 1 = 242 = 11 \cdot 22$, то је $5^5 \equiv 1 \pmod{11}$, $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$, $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$, па је $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n} \equiv 5 + 4^2 + 1 \equiv 22 \equiv 0 \pmod{11}$. *Напомена*: Доказ се може извести и применом математичке индукције.

1112. а) Ако је $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, биће $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$; ако је $n = 3k+1$, биће $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$, а ако је $n = 3k+2$, биће $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$. Значи број $2^n - 1$ је дељив са 7 ако и само ако је n дељиво са 3.

б) Ако је $n = 3k$, биће $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, ако је $n = 3k+1$, биће $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$, а ако је $n = 3k+2$, биће $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$.

1113. Размотримо ове случајеве:

1° $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$: $19 \cdot 8^{2k} + 17 = 19 \cdot 64^k + 17 = 19(63+1)^k + 17 \equiv 19 + 17 \equiv 0 \pmod 3$.

2° $n = 4k+1$, $k \in \mathbf{N}$: $19 \cdot 8^{4k+1} + 17 = 152 \cdot 8^{4k} + 17 = 143 \cdot 8^{4k} + 9 \cdot 64^{2k} + 17 = 143 \cdot 8^{4k} + 9 \cdot (65-1)^{2k} + 17 \equiv 9 + 17 \equiv 0 \pmod{13}$.

3° $n = 4k+3$, $k \in \mathbf{N}$: $19 \cdot 8^{4k+3} + 17 = 20 \cdot 8^{4k+3} - 8^{4k+3} + 17 = 20 \cdot 8^{4k+3} - 512 \cdot 8^{4k} + 17 = 20 \cdot 8^{4k+3} - 515 \cdot 8^{4k} + 3 \cdot 8^{4k} + 17 = 20 \cdot 8^{4k+3} - 515 \cdot 8^{4k} + 3 \cdot 64^{2k} + 17 = 20 \cdot 8^{4k+3} - 515 \cdot 8^{4k} + 3(65-1)^{2k} + 17 \equiv 3 + 17 \equiv 0 \pmod 5$.

1114. Нека је $2k+1$ произвољан непаран цео број. Како је $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$, то је $(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$. Претпоставимо да су сви бројеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и b непарни. Тада је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 5 \pmod 8$, а $b^2 \equiv 1 \pmod 8$, па је једнакост $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$ немогућа.

1115. Како је $7 \equiv 4 \pmod 3$, то је $7^{2n} \equiv 4^{2n} \pmod 3$, а пошто је $7 \equiv -4 \pmod{11}$, то је $7^{2n} \equiv 4^{2n} \pmod{11}$. Бројеви 3 и 11 су прости, па је $7^{2n} \equiv 4^{2n} \pmod{33}$.

1116. Како је $3^3 \equiv -2^3 \pmod{35}$, степеновањем са $2k$ или $2k+1$ ($k \in \mathbf{N}$) добијамо да је $3^{3n} \equiv -2^{3n} \pmod{35}$, ако је $n = 2k+1$, односно $3^{3n} \equiv 2^{3n} \pmod{35}$, ако је $n = 2k$. Према томе, ако је n непаран број, $3^{3n} + 2^{3n}$ је дељив са 35, а ако је n паран број, тада је $3^{3n} - 2^{3n}$ дељив са 35.

1117. а) За $n > 1$ је $2^n - 1 \equiv 3 \pmod 4$, па $2^n - 1$ не може бити потпун квадрат, јер за целе бројеве k важи $k^2 \equiv 1 \pmod 4$ или $k^2 \equiv 0 \pmod 4$. Дакле, $n = 1$ и $2^n - 1 = 1$.

б) Нека је $2^n + 1 = l^2$, $l \in \mathbf{Z}$. Тада је $2^n = (l+1)(l-1)$, одакле следи да мора бити $l + 1 = 2^m$, $l - 1 = 2^k$, $m, k \in \mathbf{N}$. Одавде добијамо $2^m - 2^k = 2$. Последња релација је могућа са за $m = 2$, $k = 1$, односно $n = 3$, па је $2^n + 1 = 9$.

1118. Како је $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ и $4^3 \equiv -1 \pmod{13}$, то је $3^{3 \cdot 35} \equiv 1 \pmod{13}$ и $4^{3 \cdot 35} \equiv -1 \pmod{13}$, тј. $3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{13}$. Из $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ и $4^5 \equiv 1 \pmod{13}$, следи $3^{5 \cdot 21} \equiv 1 \pmod{11}$ и $4^{5 \cdot 21} \equiv 1 \pmod{11}$, па је $3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod{11}$.

1119. а) Имамо да је $4^5 = 1024$ и $3^5 = 243$, па како је $1024 + 243 = 181 \cdot 7$, то је $4^5 \equiv -3^5 \pmod{181}$, одакле, степеновањем са 21, добијамо $4^{105} \equiv -3^{105} \pmod{181}$, тј. $4^{105} + 3^{105} \equiv 0 \pmod{181}$. Како је $4^7 = 16384$, а $3^7 = 2187$ и $4^7 + 3^7 = 16384 + 2187 = 49 \cdot 379$, то је $4^7 \equiv -3^7 \pmod{49}$, одакле степеновањем са 15, налазимо $4^{105} \equiv -3^{105}$

(mod 49).

б) Како је $9 \equiv -1 \pmod 5$, то је $9^{44} \equiv 1 \pmod 5$. Из $4 \equiv -1 \pmod 5$ следи $4^{99} \equiv -1 \pmod 5$. Сабирањем добијамо $9^{44} + 4^{99} \equiv 0 \pmod 5$.

1120. Доказаћемо најпре да бројеви $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ припадају различитим класама конгруенције по модулу p. Наиме, ако би било која два од ових бројева припадала истој класи, онда би њихова разлика, која је облика ka, $k < p$, $k \in \mathbf{Z}$, била дељива са p, што је немогуће јер је p прост број и a није дељиво са p. На основу доказане чињенице закључујемо да важи:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod p.$$

Бројеви $1, 2, \dots, p-1$ су узајамно прости са p, па се последња конгруенција може „скратити". Добијамо $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

1121. По малој Фермаовој теореми је $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, па је и $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$. Једноставно се утврђује да је $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$, па је $2^{70} \equiv -3 \pmod{13}$ (1). Пошто је $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, то је и $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$, па је $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ (2). Из (1) и (2) следи да је $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$.

1122. Како је $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, то је $a^{p-1} + p - 1 \equiv p \equiv 0 \pmod p$.

1123. а) По малој Фермаовој теореми: $a^6 \equiv 1 \pmod 7$, па је $a^{12} \equiv 1 \pmod 7$.

б) Како је $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ и $a^4 \equiv b^4 \equiv 1 \pmod 5$, па и $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \pmod 5$, то је и $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \pmod{65}$, тј. $a^{12} - b^{12} \equiv 0 \pmod{65}$.

1124. а) Како је $42 : 24 = 1 + 18$, $24 : 18 = 1 + 6$, $18 : 6 = 3$, то је НЗД$(24, 42) = 6$. Из $24 = 1 \cdot 18 + 6$, $6 = 24 - 1 \cdot 18$ и $42 = 1 \cdot 24 + 18$, $18 = 42 - 1 \cdot 24$, налазимо решење једначине $24x + 42y = 6$. Како је $6 = 24 - (42 - 24) = 24 - 42 + 24 = 2 \cdot 24 - 42$, одакле налазимо посебно решење једначине: $(2, -1)$. Опште решење је $x = 2 + 42t$, $y = -1 - 24t$, $t \in \mathbf{Z}$.

б) $x = -19 + 1000t$, $y = 2 - 105t$, $t \in \mathbf{Z}$;

в) НЗД$(27, 59) = 1$, $x = -480 + 59t$, $y = 220 - 27t$, $t \in \mathbf{Z}$.

1125. а) Из $x-y < x+y$, следи $x-y < \sqrt{105}$, тј. $x-y < 10$, па је једначина $(x-y)(x+y) = 105$ еквивалентна дисјункцији следећих система: (1) $x-y = 1$, $x+y = 105$; (2) $x-y = 3$, $x+y = 35$; (3) $x-y = 5$, $x+y = 21$; (4) $x-y = 7$, $x+y = 15$. Решења су: $(53, 52)$, $(19, 16)$, $(13, 8)$, $(11, 4)$.

б) Из $(2x - 3y)(x + 4y) = 28$ и $x + 4y \geq 5$ налазимо да је једино решење $(8, 5)$;

в) $(36, 37)$; г) $(495, 494)$, $(33, 10)$;

д) Једначина је еквивалентна са $4x^2 + 12x + 96 = 4y^2$, тј. $(2x + 3)^2 + 87 = 4y^2$, односно $(2y-2x-3)(2y+2x+3) = 3 \cdot 29$. Анализирањем свих могућности добијамо да су решења: $(5, 8)$ и $(20, 22)$.

1126. Дати систем је еквивалентан систему:

$$x(yzu - 1) = 1993, \quad y(xzu - 1) = 993, \quad z(xyu - 1) = 93, \quad u(xyz - 1) = 3,$$

одакле закључујемо да сви x, y, z, u морају бити непарни. Међутим, тада је број $xyzu - x$ паран и не може бити једнак 1993. Дакле, дати систем нема целобројних решења.

1127. а) Ако је $y \equiv 0 \pmod 3$, биће и $y^2 \equiv 0 \pmod 3$, ако је $y \equiv \pm 1 \pmod 3$, биће $y^2 \equiv 1 \pmod 3$. Дакле, квадрат целог броја даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3. Међутим, $3x^2 + 8 \equiv 2 \pmod 3$.

б) Слично као у претходном задатку може се доказати да квадрат целог броја даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4, па је $x^2 + 4x - 8y \equiv 0 \pmod 4$ или $x^2 + 4x - 8y \equiv 1 \pmod 4$. С друге стране $11 \equiv 3 \pmod 4$.

в) Разматрати случајеве $x \equiv 0 \pmod 3$ и $x \equiv \pm 1 \pmod 3$.

г) Најпре доказати да број облика $5m+2$, $m \in \mathbf{Z}$, не може бити потпун квадрат целог броја.

1128. а) $-2, \frac{3}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{16}, \frac{6}{23}$; б) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$; в) $0,1,0,1,0$; г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$.

1129. а) $a_n = \frac{n}{2^n}$; б) $a_n = \frac{2^{n-1}}{1+(n-1)\cdot 100}$; в) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$; г) $a_n = (-1)^{n-1}\cdot n$.

1130. а) Имамо да је $a_n = \frac{2^{n-1}}{1+(n-1)\cdot 100}$. Како је

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^{n-1}}{1+(n-1)\cdot 100}}{\frac{2^n}{1+n\cdot 100}} = \frac{1+100n}{2\big(1+100(n+1)\big)} = \frac{100n+1}{200n-98} < 1,$$

низ је строго растући. б) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$, низ је строго опадајући. в) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, низ је строго опадајући.

1131. а) Нека је $(a_n) = (x_n + y_n)$, $(b_n) = (x_n - y_n)$, $(c_n) = (x_n)\cdot(y_n)$, $(d_n) = \frac{(x_n)}{(y_n)}$, $(e_n) = 2(x_n) + (-1)(y_n)$. Тада је $a_n = n + n^2$, $b_n = n - n^2$, $c_n = n^3$, $d_n = 1/n$, $e_n = 2n - n^2$.

1132. а) $|a_n| = 1$, па је низ ограничен. в) $0 < a_n \le 2$, па је низ ограничен. г) $0 < a_n \le 1$ — низ је ограничен. ж) $1 \le a_n \le 15$ — низ је ограничен. з) $0 < a_n < 3$ — низ је ограничен. Ограничени су и низови д) и е), а нису ограничени низови б), ђ) и и).

1133. а) Како је $n < n+1$, низ је строго растући. б) Због $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, низ је строго опадајући. в) Низ није монотон, јер је, на пример, за сваки природан број k испуњено $a_{2k-1} < a_{2k}$, али и $a_{2k+1} < a_{2k}$. г) Како је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, низ је строго растући. д) Имамо да је $a_n - a_{n+1} = n^2 - 8n + 12 - \big((n+1)^2 - 8(n+1) + 12\big) = -2n + 7$. За $n \ge 4$ ова разлика је негативна, па је за $n \ge 4$ низ строго растући. ђ) Строго растући. е) Строго опадајући. ж) Строго опадајући. з) Строго растући, јер је $\log_2 n < \log_2(n+1)$. и) Низ није монотон.

1134. а) $1,2,3,4,5,6$; б) $10,5,0,-5,-10,-15$; в) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

1135. а) Како је $a_1 = -3$, $d = -4$, биће $a_8 = -3 + (8-1)\cdot(-4) = -31$; б) $a + 8 = 15$; в) $a_8 = -5/3$.

1136. Из $(a_1 + d) - (a_1 + 5d) + (a_1 + 3d) + 7 = 0$ и $(a_1 + 7d) - (a_1 + 6d) - 2(a_1 + 3d) = 0$ налазимо $a_1 = -5$ и $d = 2$.

1137. $a_1 = 13$, $d = -1$.

1138. Из $a_n = a_1 + (n-1)d$, налазимо $10 + (n-1)\cdot(-2) = 0$, одакле је $n = 6$.

1139. Требало би да је за неки природан број n испуњено $347 = 1 + (n-1)\cdot 4$, а то је немогуће јер број 346 није дељив са 4.

1140. $a_1 = -2$, $d = 1$.

1141. Имамо да је $a_1 = S_1 = 1$. Из $S_2 = 10$, добијамо $a_2 = S_2 - S_1 = 9$. Како је $d = a_2 - a_1 = 8$, то је $a_3 = a_2 + d = 17$.

1142. Да бисмо одредили петнаести члан, треба прво наћи разлику овог аритметичког низа. Користећи се формулом општег члана $a_n = a_1 + (n-1)d$ налазимо да је за $n > 1$: $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$. У нашем случају је $d = \frac{23-2}{7} = 3$. Због тога је $a_{15} = 2 + (15-1)\cdot 3 = 44$.

1143. 69 или 87. **1144.** 20, 50, 80.

1145. Означена прва три члана тог низа са $x-d, x, x+d$. Из $x-d+x+x+d=27$ следи $x=9$, а из $(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=275$ имамо $3x^2+2d^2=275$, одакле је $d^2=16$ и, како је низ растући, $d=4$. Дакле, тражени низ је 5,9,13,17,... .

1146. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ или $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

1147. Низ природних бројева је аритметички низ, његов први члан је $a_1=1$, а n-ти $a_n=n$. Због тога је $S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1148. Имамо да је $a_3+a_9=8$, односно $a_1+2d+a_1+8d=8$, тј. $a_1+5d=4$. С друге стране, $S_{11}=\dfrac{11}{2}(2a_1+10d)=11(a_1+5d)=44$.

1149. $S_{19}=1064$.

1150. Како је $d=\dfrac{a_m-a_k}{m-k}$, у нашем случају је $d=\dfrac{75-25}{20-10}=5$. Из $a_{10}=a_1+9d=a_1+45=25$, налазимо $a_1=-20$. Сада је $S_{10}=\frac{10}{2}(-20+25)=25$.

1151. Низ троцифрених непарних природних бројева је аритметички низ, чији је први члан $a_1=101$ и разлика $d=2$. У овом низу има 450 природних бројева, па имамо $S=\frac{450}{2}(2\cdot 101+449\cdot 2)=247500$.

1152. Из $2y=x+z$ следи $x^2+8yz=x^2+8\cdot\dfrac{x+z}{2}z=(x+2z)^2$.

1153. Из $2x+3=\dfrac{(x+1)+(6x-1)}{2}$ налазимо да је $x=2$.

1154. Решавањем система једначина

$$(a_1+2d)+(a_1+4d)=22 \quad \wedge \quad (a_1+d)\cdot(a_1+3d)=55$$

добијамо да је $a_1=2$, $d=3$.

1155. $a_1=3$, $a_8=17$. Применом формуле $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$ добија се $d=\frac{17-3}{7}=2$, па је аритметички низ $3,5,7,\ldots,17$.

1156. $d=y-x$. **1157.** $n=13$.

1158. Нека су a, b, c странице правоуглог троугла при чему је $a<b<c$. По услову задатка је $c^2=a^2+b^2$. Како су странице чланови аритметичког низа то је $a=x-d$, $b=x$, $c=x+d$. На основу претходног добијамо систем једначина

$$\begin{aligned}(x-d)^2+x^2&=(x+d)^2\\(x-d)x&=48\end{aligned} \qquad \text{односно} \qquad \begin{aligned}x^2-4xd&=0\\x^2-xd&=48\end{aligned}$$

чија су решења $d_1=2$, $d_2=-2$. Како су странице позитивне величине узима се $d=2$ и $x=8$. Према томе, дужине страница троугла су $a=6\,\mathrm{cm}$, $b=8\,\mathrm{cm}$, $c=10\,\mathrm{cm}$.

Напомена. Задатак се може решити и на следећи начин. По услову задатка је $b=\frac{1}{2}(a+c)$, односно $c=2b-a$. Заменом $c=2b-a$ у $a^2+b^2=c^2$ и из $P=\frac{1}{2}ab$, добија се систем једначина

$$a^2+b^2=(2c-a)^2 \quad \wedge \quad ab=48$$

чија су решења $a=6$ и $b=8$. **1159.** $x=2$, $y=3$.

1160. а) $\left(6,-3,\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{8},-\dfrac{3}{16},\dfrac{3}{32},-\dfrac{3}{64},\ldots\right)$; б) $(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ldots)$;

в) $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\ldots\right)$; г) $(2,4,8,16,32,64,128,256,\ldots)$.

1161. а) Непосредно налазимо $a_1 = \frac{5}{7^1} = \frac{5}{7}$. Знамо да је $q = \frac{a_2}{a_1}$ и због тога рачунамо прво $a_2 = \frac{5}{7^2} = \frac{5}{49}$, па је $q = \frac{5/49}{5/7} = \frac{1}{7}$. б) $a_1 = -1$, $q = -1$. в) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$.

1162. Нека је $a_n = -81$. Тада је $-81 = (-1)\cdot 3^{n-1}$, одакле је $81 = 3^{n-1}$, тј. $3^4 = 3^{n-1}$, па је $n = 5$. Дакле, број -81 јесте члан овог геометријског низа и индекс му је 5.

1163. $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_5 = -192$, $a_8 = 3\cdot 4^6$.

1164. $\frac{a_8}{a_2} = q^6$, па је $q^6 = 64$, одакле се добија $q = 2$ или $q = -2$.

1165. Имамо да је $a_1 + a_1q^2 = 20$, $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 26$, одакле је $a_1q = 6$, односно $q = \frac{6}{a_1}$. Ако ово уврстимо у прву једначину добијамо $a_1 + 36/a_1 = 20$. Решења ове квадратне једначине су $a_1' = 2$ и $a_1'' = 18$. Пошто је услов да је низ растући мора бити $q > 1$, па долази у обзир само прво решење. Дакле $a_1 = 2$, $q = 3$.

1166. $\left(\frac{1}{5}, 1, 5, 25, \dots\right)$.

1167. $d = 3$, $a_1 = 5$, $a_{11} = a_1 + 10d = 35$.

1168. $\frac{6-\sqrt{6}}{6}, 1, \frac{6+\sqrt{6}}{6}$.

1169. $-10, -7, -4, -1, 2, 5, \dots$ или $2, -1, -4, -7, -10, -13, \dots$. **1170.** $a_{10} = 41$.

1171. Доказати да је $\frac{1}{c+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b}\right)$ ако и само ако је $b^2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2)$.

1174. $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$. **1175.** $c = 0$.

1176. Општи члан низа је $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2+5n}{4} - \frac{(n-1)^2+5(n-1)}{4} = \frac{n+2}{2}$ па је $d = a_n - a_{n-1} = \frac{n+2}{2} - \frac{(n-1)+2}{2} = \frac{1}{2}$.

1177. Имамо да је $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 65$ и $a_1q + 10 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1q^2)$. Из друге једначине налазимо $a_1 = \frac{15}{q}$, па ако то заменимо у прву, добијамо квадратну једначину $15q^2 - 50q + 15 = 0$ чија су решења $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$. Дакле, постоје два решења $(5, 15, 45)$ и $(45, 15, 5)$.

1178. 5 или 20.

1179. Како је $S_3 = a_1+a_2+a_3 = 105$ и $S_2 = a_1+a_2 = 25$, биће $a_3 = S_3 - S_2 = 80 = a_1q^2$, одакле је $a_1 = \frac{80}{q^2}$. Из $a_1 + a_1q = 25$ имамо $\frac{80}{q^2} + \frac{80}{q} = 25$, па је $80 + 80q = 25q^2$. Решења ове квадратне једначине су $q_1 = -\frac{4}{5}$ и $q_2 = 4$, па је $a_1 = 125$ или $a_1 = 5$.

1180. $S_5 = 31$. **1181.** $q = 3$, $a_1 = 2$, $S_6 = 728$.

1182. $(0,0)$ или $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ или $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{10}\right)$.

1183. 54, 18, 6, 2. **1184.** 2. **1185.** 3, 6, 12.

1186. Из $b + bq + bq^2 = 26$ и $2(bq+4) = b + bq^2$ налазимо $q = \frac{6}{b}$, а из $b + 6 + \frac{36}{b} = 26$, $b_1 = 2$, $b_2 = 18$, па су тражени бројеви 2, 6, 18 (или обрнуто).

1187. $a_n = 35351 = a_1 + 7 + 2\cdot 7 + \dots + (n-1)\cdot 7$, $a_1 = 1$, $n = 101$.

1188. Постоје две тројке бројева са оваквим својствима: $(13, 21, 29)$ и $(31, 21, 11)$.

1189. Уочимо да важи $a_2 - a_1 = d_1 = 1$, $a_3 - a_2 = d_2 = 3$, $a_4 - a_3 = d_3 = 5$, $\dots$, $a_{500} - a_{499} = d_{499} = 2 \cdot 499 - 1 = 997$. Сабирањем левих и десних страна ових једнакости добијамо $a_{500} - a_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 997 = 499^2$, па је $a_{500} = 2 + 499^2 = 249\,003$.

1190. Општи члан првог низа је облика $17+4k$, а другог $16+5l$, где је $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Из једнакости $17 + 4k = 16 + 5l$ следи $5l = 4k + 1$. Решења последње једначине у скупу природних бројева су следећи парови (k, l): $(1,1)$, $(6,5)$, $(11,9)$, $(16,13)$, ... Заједнички чланови две прогресије чине следећу прогресију: $21, 41, 61, 81, \dots$. Збир првих 100 чланова последњег низа једнак је $21 + 41 + \cdots + (21 + 99 \cdot 20) = 101100$.

1191. $a_1(1+q+q^2) = 13$, $a_1^2(1+q^2+q^4) = 91$. *Решење*: $q = 3$, $a_1 = 1$ или $q = \dfrac{1}{3}$, $a_1 = 9$.

1192. $b_1 = 3$, $q = 2$ или $b_1 = 12$, $q = \dfrac{1}{2}$.

1193. $(7, -28, 112, -448)$ или $\left(-11\dfrac{2}{3}, -46\dfrac{2}{3}, -186\dfrac{2}{3}, -746\dfrac{2}{3}\right)$.

1194. Означимо чланове аритметичког низа са $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, а геометријског са $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тада је $a_1 = b_1$, $a_1 + 2d = b_2$, $a_1 + 6d = b_3$.

а) Из $b_2^2 = b_1 b_3$ следи $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d)$, одакле је $a_1 = 2d$ и $q = \dfrac{a_1 + 2d}{a_1} = 2$.

б) $b_4 = 16d = a_1 + 14d = a_{15}$.

в) Из $3 = \dfrac{15}{2}(2a_1 + 14d)$ и $a_1 = 2d$, добија се $a_1 = \dfrac{2}{45}$ и $d = \dfrac{1}{45}$.

1195. Нека су a, aq и aq^2 прва три члана геометријског низа ($a \neq 0$). Тада је

$$a + aq + aq^2 = 91. \tag{1}$$

Пошто бројеви $a + 25$, $aq + 27$ и $aq^2 + 1$ образују аритметички низ, биће

$$aq + 27 - (a + 25) = aq^2 + 1 - (aq + 27),$$

односно

$$a(q-1)^2 = 28. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\dfrac{1+q+q^2}{(1-q)^2} = \dfrac{91}{28}$, одакле добијамо квадратну једначину $3q^2 - 10q + 3 = 0$, чија су решења $q_1 = 3$, $q_2 = \dfrac{1}{3}$. Из (2) налазимо да је $a = 7$ или $a = 63$, па је седми члан aq^6 једнак 5103 или $\dfrac{7}{81}$.

1196. Чланови аритметичког низа су a_1, $a_1 q + 8$ и $a_1 q^2$, а геометријског a_1, $a_1 q + 8$ и $a_1 q^2 + 64$. Одавде добијамо релације

$$2(a_1 q + 8) = a_1 + a_1 q^2 \qquad \text{и} \qquad (8 + a_1 q)^2 = a_1(a_1 q^2 + 64),$$

или после сређивања

$$a_1(q^2 - 2q + 1) = 16 \tag{1}$$

$$a_1(4 - q) = 4. \tag{2}$$

Из (1) и (2) добија се $q' = 3$, $q'' = -5$ и $a_1' = 4$, $a_1'' = \frac{4}{9}$, па су тражени бројеви $(4, 12, 36)$, $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

1197. Нека су посматрани бројеви a, b и c. Тада је $2b = a + c$. Ако прву релацију квадрирамо, а другу напишемо у облику $b^2 = |ac|$, добијамо

$$a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|.$$

Ако су бројеви a и c истог знака, добијамо једначину

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0, \quad \text{тј.} \quad (a-c)^2 = 0,$$

одакле је $a = c$, па је и $a^2 = c^2$, а количник геометријског низа $q_1 = 1$. Ако су a и c супротних знакова, добијамо једначину

$$a^2 + 6ac + c^2 = 0,$$

одакле, дељењем са a^2, налазимо

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6\frac{c}{a} + 1 = 0, \quad \text{тј.} \quad \frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}.$$

Пошто је $\dfrac{c^2}{a^2} = q^2$, то је $q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$. Бројеви a^2, b^2, c^2 су позитивни, па мора бити $q > 0$. Због тога је $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}$.

1198. 1. Ако је $0 < q < 1$, онда је за $a_1 > 0$ низ строго опадајући, а за $a_1 < 0$ строго растући.

2. Ако је $q = 1$, низ је константан.

3. Ако је $q > 1$, за $a_1 > 0$ низ је строго растући, а за $a_1 < 0$ строго опадајући.

4. Ако је $-1 < q < 0$, низ није монотон — његови чланови су наизменично позитивни и негативни за $a_1 > 0$, односно негативни и позитивни за $a_1 < 0$. У овим случајевима чланови низа опадају по апсолутној вредности.

5. Ако је $q = -1$, онда су сви чланови непарног индекса једнаки a_1, док су сви чланови парног индекса једнаки $-a_1$.

6. Ако је $q < -1$ низ није монотон (као у 4.). Низ апсолутних вредности чланова оваквог низа строго расте.

1199. Једини такав квадар је коцка ивице $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

1200. а) Имамо да је $a_1 = 1$ и $q = 2$. Дакле, $S_n = 1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.

б) Како је $a_1 = 1$, $q = -\dfrac{1}{3}$, биће

$$S_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

в) Ако је $x = 0$, онда је $S_n = y^{n-1}$. Ако је $x = y$, онда су сви чланови једнаки x^{n-1}, па је $q = 1$ и $S_n = nx^{n-1}$. Ако је $x \neq 0$ и $x \neq y$, тада је S_n збир првих n чланова геометријског низа у коме је $a_1 = x^{n-1}$ и $q = y/x$. Стога је

$$S_n = x^{n-1} \cdot \frac{(y/x)^n - 1}{(y/x) - 1} = \frac{y^n - x^n}{y - x} = \frac{x^n - y^n}{x - y},$$

одакле добијамо познату једнакост

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

1201. а) Искористити чињеницу да је

$$\underbrace{99\cdots9}_{k \text{ деветки}} = 10^k - 1. \qquad S_n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n.$$

б) $S'_n = \dfrac{7}{9}S_n$, Искористити резултат а). **1202.** $n = 6$.

1203. а) Уочавамо да је S_n збир првих $n+1$ чланова низа, који представља производ једног аритметичког низа (a_n) и једног геометријског низа (b_n). Низ следећих једнакости показује како се може израчунати овај збир:

$$\begin{aligned} S_n \cdot q &= q + 3q^2 + 5q^3 + \cdots + (2n-1)q^n + (2n+1)q^{n+1}, \\ S_n - S_n \cdot q &= 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^n - (2n+1)q^{n+1}, \\ S_n(1-q) &= 1 + 2(q + q^2 + \cdots + q^n) - (2n+1)q^{n+1}. \end{aligned}$$

Ако је $q \neq 1$, тада је

$$S_n = \frac{1 + 2q\dfrac{1-q^n}{1-q} - (2n+1)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 + q - (2n+3)q^{n+1} + (2n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}.$$

Ако је $q = 1$, тада је

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2,$$

као збир првих $n+1$ чланова аритметичког низа, чији је први члан једнак 1 разлика једнака 2.

б) $S_n = \dfrac{1}{1-x}\left[\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}\right]$, $x \neq 1$, односно $S_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$;

в) $S_n = 3 - \dfrac{3+2n}{2^n}$.

г) $T_n = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) + (3q + 3q^2 + \cdots + 3q^n) + (5q^2 + \cdots + 5q^n) + \cdots + (2n+1)q^n$; одавде се добија $T_n = \dfrac{1}{1-q}\big(S_n - (n+1)^2q^{n+1}\big)$, где је $S_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$ (упоредити са а)). Како је

$$S_n = \frac{2(1-q^{n+1})}{(1-q)^2} - \frac{1 + (2n+1)q^{n+1}}{1-q},$$

добијамо

$$T_n = \frac{2(1-q^{n+1})}{(1-q)^3} - \frac{1 + (2n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)^2q^{n+1}}{1-q}.$$

д) $S_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.

1204. Нека је $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$. Из Виетових формула налазимо:

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_3 + x_4 = 12, \quad x_1x_2 = A, \quad x_3x_4 = B.$$

Из прве две једнакости следи $x_3 + x_4 = x_1q^2 + x_2q^2 = (x_1 + x_2)q^2$, одакле је $q^2 = 4$.

Ако је $q = 2$, онда из $x_1 + x_2 = 3$ имамо $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, па је $A = 2$, а из $x_3 + x_4 = 12$ следи $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, дакле $B = 32$.

Ако је $q = -2$, онда $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, дакле $A = -18$ и $x_3 = -12$, $x_4 = 24$, тј. $B = -288$.

1205. Како је $10^n + 10^{n-1} + \cdots + 1$ збир чланова геометријског низа са количником 10, то је

$$\begin{aligned} (10^n + 10^{n-1} + \cdots + 1)(10^{n+1} + 5) + 1 &= \frac{10^{n+1} - 1}{9} \cdot (10^{n+1} + 5) + 1 \\ &= \frac{10^{2(n+1)} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

1206. а) Имамо да је $2 = 3 - 1$, $5 = 6 - 1$, $11 = 12 - 1$, $\ldots$, $3 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. Сабирањем свих ових једнакости добијамо

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 11 + \cdots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1) &= 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - n \\ &= 3 \cdot \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} - n = 3(2^n - 1) - n. \end{aligned}$$

б) $\frac{1}{4}\big(n(n+1) + 8(2^n - 1)\big)$.

1207. Како је $S_n = a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, то је

$$\frac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S_{n-2}} = \frac{a_1 \frac{1-q^{n+2}}{1-q} - a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}{a_1 \frac{1-q^n}{1-q} - a_1 \frac{1-q^{n-2}}{1-q}} = \frac{q^n - q^{n+2}}{q^{n-2} - q^n} = q^2;$$

дакле, овај израз зависи само од q.

1208. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^2}}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^3}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{1}{n^3}\right)} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right) =$
$\dfrac{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} \cdot \left(3 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{4} \cdot 3 = \dfrac{3}{2}.$

1209. а) Поделимо бројилац и именилац са n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{4n^2 + n - 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}} = \frac{3}{4}.$$

б) Поделимо бројилац и именилац са n^4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^4 + 2n^2 - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^4}} = 0.$$

в) Поделимо бројилац и именилац са n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 1}{n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = +\infty.$$

1210. а) 3; б) $\dfrac{15}{17}$; в) $-\dfrac{3}{2}$; г) $-\dfrac{3}{4}$.

1211. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1) - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; б) 0; в) 1.

1212. а) Поделити бројилац и именилац са 2^n; резултат 1;

б) поделити бројилац и именилац са 3^n; резултат 3;

в) искористити чињеницу да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$; резултат 0; г) 1.

1213. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}(n(n+1))}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) 1; г) $\dfrac{4}{3}$;
д) $-\dfrac{1}{3}$; ђ) $-\dfrac{3}{2}$; е) $-\dfrac{3}{2}$; ж) $\dfrac{1}{2}$.

1214. Применити формулу за збир првих n чланова геометријског низа. Резултати: а) $\frac{7}{8}$; б) 0; в) $\frac{1-b}{1-a}$.

1215. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$; б) 1; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$.

1216. $|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ ако и само ако је $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, тј. $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Према томе, ако је $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, где $[x]$ означава највећи цео број који није већи од x, биће за све $n > n_0(\varepsilon)$ испуњено $|a_n - 0| < \varepsilon$, тј. сви ови чланови низа (a_n) су у ε-околини нуле: $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Непосредно се попуњава таблица:

ε	1	1/9	1/100	1/1000	1/4624
n_0	1	3	10	31	68

Тако се, на пример, у околини $(-1/4624, 1/4624)$ налазе чланови (a_n) са индексима $69, 70, 71, 72, \ldots$.

1217. $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Јасно је да се за n_0 може одабрати и било који већи природан број.

1218. а) Треба, за свако $\varepsilon > 0$ одредити n_0 тако да се сви чланови низа са индексом већим од n_0 налазе у ε-околини тачке 2, тј. да су на растојању мањем од ε од тачке 2: $|a_n - 2| < \varepsilon$. Та неједнакост за наш низ гласи $\left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| < \varepsilon$, односно $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ и испуњена је ако је $n > 7/\varepsilon - 5$. Зато узимамо $n_0 = [7/\varepsilon - 5]$.

1219. а) $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right| = \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}$ (за $n \geq 2$) $< \frac{5n}{3(3n^2-4)} < \frac{5n}{3\cdot 2n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ за $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Довољно је узети $n_0 = \max([1/\varepsilon], 2)$.

1220. а) $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Одавде се једноставно показује да је дати низ — нула-низ. Да је монотоно опадајући следи из следећег низа еквивалентних формула:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} < x_n &\iff \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\\
&\iff \sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}\\
&\iff n+2+2\sqrt{n(n+2)} + n < 4(n+1)\\
&\iff \sqrt{n(n+2)} < n+1\\
&\iff n(n+2) < (n+1)^2\\
&\iff n^2+2n < n^2+2n+1.
\end{aligned}$$

1221. Претпоставимо да је $a > 1$. За $0 < a < 1$ тврђење се доказује слично. Нека је $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, $h > 0$. Применићемо Бернулијеву неједнакост $(1+h)^n > 1 + nh$, $h > 0$,

$n > 2$. Добијамо $a = (1+h)^n > 1 + nh$, одавде је $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 = h < \frac{a-1}{n}$, па је $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, за $n > (a-1)/\varepsilon$, тј. можемо узети $n_0 = [(a-1)/\varepsilon]$.

1222. Претпоставимо да је $a \neq b$. Тада би за две различите тачке a и b постојале дисјунктне околине, на пример $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$; довољно је одредити ε тако да буде $\varepsilon < \frac{1}{2}|b-a|$. Скоро сви чланови низа морали би се налазити у свакој од ових околина, што је, очигледно, немогуће.

1223. Бесконачно много чланова овог низа имају вредност 1, а бесконачно много вредност -1. Ако одаберемо две дисјунктне околине ових тачака, на пример $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ни у једној од њих не могу се налазити скоро сви чланови овог низа, па бројеви 1 ни -1 нису граничне вредности низа $a_n = (-1)^n$. Такође, ни ма који реалан број a ($a \neq 1$, $a \neq -1$) не може бити гранична вредност овог низа, јер је тада чак могуће одабрати околину тачке a у којој уопште нема чланова низа. Пошто нема граничну вредност, низ $a_n = (-1)^n$ је дивергентан.

1225. a) Ако је $c = 0$, очигледно је да је $(c\alpha_n)$. Претпоставимо да је $c \neq 0$. Пошто је (α_n) нула низ, то за сваки позитиван број ε постоји природан број n_0, такав да је за све $n > n_0$: $|\alpha_n| < \varepsilon/|c|$. Тада важи и $|c\alpha_n| = |c|\,|\alpha_n| < \varepsilon$ за све $n > n_0$, па је $(c\alpha_n)$ нула-низ.

1226. Биће

$$\begin{aligned} a_n - a_n q &= (1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}) - (q + 2q^2 + \cdots + (n-1)q^{n-1} + nq^n) \\ &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} - nq^n, \end{aligned}$$

одакле је

$$a_n(1-q) = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n \quad \text{тј.} \quad a_n = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}.$$

Како је $|q| < 1$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

1227. $a_n = S_n - S_{n-1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

1228. a) Докажимо, најпре, да је низ ограничен одоздо, тј. да је, за све $n \in \mathbf{N}$: $a_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \alpha/a_n}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{\alpha}{a_n}} = \sqrt{\alpha}.$$

Показаћемо сада да је низ монотоно опадајући:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2a_n}(\alpha - a_n^2) = \frac{(\sqrt{\alpha} - a_n)(\sqrt{\alpha} + a_n)}{2a_n} \leq 0,$$

јер је за све $n \geq 2$: $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ и $a_n > 0$. Дакле, низ је конвергентан, па постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тада је

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{\alpha}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\alpha}{a}\right),$$

одакле налазимо $a = \pm\sqrt{\alpha}$. Долази у обзир само $a = \sqrt{\alpha}$, јер су сви чланови низа позитивни.

б) Доказати да је за све $n \geq 2$ $a_n \geq \sqrt[3]{\alpha}$ и да је низ монотоно опадајући. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{\alpha}$.

1229. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; б) Низ је растући и ограничен одозго бројем 3: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

1230. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right]^{\frac{3n^2}{n^2+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}} = e^3$; б) $\dfrac{1}{e}$; в) 1; г) 0.

1231. Нека је a_0 тренутни број становника града. После n година град ће имати $a_n = a_0\left(1+\frac{1}{80}\right)^n$ становника. По услову задатка је $a_n = 2a_0$, дакле $\left(1+\frac{1}{80}\right)^n = 2$. Одавде је $n = \dfrac{\log 2}{\log 81 - \log 80} \approx 55{,}8$. Дакле, број становника ће се удвостручити за $[n]+1 = 56$ година.

1232. а) 2; б) $\dfrac{3}{5}$; в) $\dfrac{x}{1-x}$; г) $\dfrac{1}{1+x}$; д) $\dfrac{1}{1-2x}$; ђ) $\dfrac{1}{9}$; е) $2\log 5$; ж) $\dfrac{1}{1-\sin x}$; з) $\dfrac{\sqrt{a+1}(\sqrt{a+1}+1)}{a}$; и) $\sqrt{a+2}(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1})$.

1233. $a = 4 - 2\sqrt{2}$.

1234. а) $0{,}(3) = 0{,}333\ldots = \dfrac{3}{10}\left(1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\cdots\right) = \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$;

б) $3{,}2(27) = 3{,}2272727\ldots = 3+\dfrac{2}{10}+\dfrac{27}{1000}\left(1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\cdots\right) = 3+\dfrac{2}{10}+\dfrac{27}{1000}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}} = 3+\dfrac{2}{10}+\dfrac{27}{990} = \dfrac{3195}{990} = \dfrac{71}{22}$; в) $\dfrac{4}{33}$; г) $\dfrac{1709}{3960}$; д) $\dfrac{13633}{330}$; ђ) $\dfrac{1247}{140}$.

1235. $q = \dfrac{1}{11}$, b_1 — произвољно. **1236.** $q = \dfrac{1}{7}$. **1237.** $|x| < \dfrac{1}{3}$.

1238. *Упутство.* Увести смену $\log_2 x = t$. Решење је $\dfrac{1}{2} < x < 2$.

1239. Полупречник првог круга је $r_1 = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Други троугао је сличан првом (коефицијент сличности је $\frac{1}{2}$), па је $r_2 = \frac{1}{2}r_1 = \frac{a}{12}\sqrt{3}$, $r_3 = \frac{1}{2}r_2$, итд. Збир површина свих кругова је $\dfrac{\pi r_1^2}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{9}\pi a^2$.

1240. $P_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $P_2 = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$, $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{3}{4}$. Збир свих површина једнак је $\dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

1241. $P_1 = 234$, $q = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{1}{4}$, $S = \dfrac{P_1}{1-q} = 312$.

1242. Збир површина је $S_p = 2a^2$. Збир обима је $S_o = 4a(2+\sqrt{2})$.

1243. Низ полупречника је r, $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{r}{2}$, …, па је збир полупречника $S_r = r\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$, а збир површина $S_p = 2\pi r^2$.

1244. $a_1 = a$, $r_1 = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$, $a_2 = r_1 = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, $r_2 = \dfrac{a_2}{2}\sqrt{3} = \dfrac{3a}{4}$; $q = \dfrac{3}{4}$, $S_1 = 6a^2\sqrt{3}$, $S_2 = 3a^2\pi$.

1245. $S = 2a^2H$. **1246.** $S = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2(3\sqrt{3}-1)}$.

1247. $K_3 = K\left(1+\dfrac{60}{100}\right)^3 = 6\,000\,000\cdot 1{,}6^3 = 24\,576\,000$.

1248. $K = \dfrac{K_5}{\left(1+\frac{50}{100}\right)^5} = \dfrac{2\,000\,000}{1{,}5^5} = 263\,374$.

1249. $r = Kq^{m-1}\cdot\dfrac{q-1}{q^m-1} = 100\,000\cdot 1{,}3^4\cdot\dfrac{1{,}3-1}{1{,}3^5-1} = 315\,832$.

1250. $K = 2\,000\,000$; $q = 1,2$; $r = 500\,000$, па из једначине

$$2\,000\,000 = 1{,}2^m = \frac{500\,000 \cdot 1{,}2}{1{,}2-1}(1{,}2^m - 1)$$

добијамо $1{,}2^m = 3$, одакле (приближно) $m = 6$.

1251. $n = 7$. **1252.** $r = 159\,507\,280\,000$. **1253.** $1\,800\,000$.

1254. а) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2^2$, …, $x_n = 2^n$;

б) $x_0 = a$, $x_1 = -\frac{1}{10}a$, $x_2 = \frac{1}{10^2}a$, …, $x_n = \frac{(-1)^n}{10^n}a$;

в) Имамо да је $x_1 - x_0 = -2$, $x_2 - x_1 = 0$, $x_3 - x_2 = 2$, …, $x_n - x_{n-1} = 2(n-1) - 2$, $x_{n+1} - x_n = 2n - 2$. Сабирањем свих ових једнакости добијамо

$$x_{n+1} - x_0 = 2(1 + 2 + \cdots + n) - (n+1)\cdot 2 = n(n+1) - (n+1)\cdot 2,$$

па је $x_{n+1} = n^2 - n$ и $x_n = n^2 - 3n + 2$ за све $n \in \mathbf{N}$.

1255. а) Решења карактеристичне једначине $r^2 = 5r - 6$ су $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, па је $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$. За $n = 0$ добијамо $C_1 + C_2 = 2$ (1), а за $n = 1$: $2C_1 + 3C_2 = 5$ (2). Из (1) и (2) налазимо $C_1 = C_2 = 1$, па је $a_n = 2^n + 3^n$ за све $n \in \mathbf{N}$.

б) $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$; в) $a_n = 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$.

1256. а) Решења карактеристичне једначине $r^2 - 3r + 2 = 0$ су $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тражено решење је $a_n = 2^n + 1$.

б) Решења карактеристичне једначине $r^2 - r + 1 = 0$ су $r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Тражено решење је $a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$. *Напомена*: Може се доказати да је $a_n = 2\cos\frac{n\pi}{3}$

в) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Овај низ се назива Фибоначијев низ.

г) $a_n = 3^n + 2 \cdot (-1)^n$.

1257. а) Карактеристична једначина има двоструки корен $r_1 = r_2 = 1$. Решење једначине је облика $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n$. Из услова $C_1 + C_2 = 5$, $C_1 + 2C_2 = 7$ добија се $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, па је тражено решење $a_n = 2n + 3$.

б) Карактеристична једначина има двоструки корен $r_1 = r_2 = 2$. Решење је $a_n = 2^n + n \cdot 2^n$.

в) Карактеристична једначина $r^3 = 3r^2 - 3r + 1$ има троструки корен $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, па је решење једначине облика $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n + C_3 \cdot n^2 \cdot 1^n$. Из датих услова (за $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$) добијамо $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, $C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 4$, одакле је $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$, па је $a_n = n^2$ за све $n \in \mathbf{N}$.

1258. а) Из $2x_{n+1} - x_n = 1$, $2x_n - x_{n-1} = 1$ следи $2x_{n+1} - x_n = 2x_n - x_{n-1}$, тј. $2x_{n+1} - 3x_n + x_{n-1} = 0$. Карактеристична једначина ове једначине је $2r^2 - 3r + 1 = 0$ и њена решења су $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 1$, па је $x_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2$. Непосредно се провери да је $x_1 = \frac{3}{2}$, па имамо $x_0 = C_1 + C_2 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 = \frac{3}{2}$, одакле је $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, па је $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$.

б) $x_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1)$; в) $x_n = 3^n - 2^n$.

1259. а) Карактеристична једначина је $r^2 = \frac{1}{2}(r+1)$, тј. $2r^2 - r - 1 = 0$. Њена решења су $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = 1$, одакле је $a_n = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 1^n$. За $n = 0$, $n = 1$ имамо $a_0 = C_1 + C_2 = a$, $a_1 = -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = b$. Решавањем овог система једначина добијамо $C_1 = \frac{2}{3}(a-b)$, $C_2 = \frac{1}{3}(a+2b)$, па је $a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^n \cdot \frac{a-b}{3 \cdot 2^{n-1}}$. б) $a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

Глава VIII – Комплексни бројеви и полиноми

1260. а) 1° $-i$; 2° 1; 3° $-i$; 4° i; 5° $-i$; б) 1° $-i$; 2° -1; 3° $-\frac{1}{4}$.

1263. а) $z_{1,2} = \frac{1}{2}\big(2+i+\sqrt{(2+i)^2-4i}\big) = \frac{1}{2}\big(2+i\pm\sqrt{3}\big) = 1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$.* б) $z_1 = -\frac{1}{2}(1+i)$, $z_1 = \frac{1}{2}(3-5i)$; в) $D = -2i = (1-i)^2$, $z_1 = 1-i$, $z_2 = \frac{2}{5}(2-i)$.

1264. б) $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}\big(z_1\bar{z}_2\big) \le 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1|\cdot|\bar{z}_2| = 2|z_1|\cdot|z_2|$.

в) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2 \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\,|z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$ (примењена је неједнакост доказана у б)).

д) Применити математичку индукцију и тврђење б).

1265. Релацију $1+z+z^2=0$ помножимо са z и добијамо $z^3 = -z-z^2 = -(z+z^2) = -(-1) = 1$. а) $(az^2+bz)(bz^2+az) = abz^4 + a^2z^3 + b^2z^3 + abz^2 = abz + a^2 + b^2 + abz^2 = a^2 + ab(z+z^2) + b^2 = a^2 - ab + b^2$.

1266. а) Ако је $z + \dfrac{1}{z} = 1$, биће $z^2 - z + 1 = 0$, па је и $(z+1)(z^2-z+1) = 0$, тј. $z^3+1=0$, односно $z^3 = -1$. б) $z^{1000} = z^{999}\cdot z = (z^3)^{333}\cdot z = -1\cdot z = -z$. Дакле, $z^{1000} + \dfrac{1}{z^{1000}} = -z + \dfrac{1}{-z} = -\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = -1$.

1267. а) Полураван „испод“ праве $y = 1-x$. б) Круг са центром у $(0,0)$ полупречника 2. в) Круг са центром у $(1,0)$ полупречника 1, јер је $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$. г) Из $(x+iy)(x-iy)+(1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy) = 0$ налазимо $x^2+y^2+2x-2y=0$, тј. $(x+1)^2+(y-1)^2 = 2$, дакле круг са средиштем у тачки $(-1,1)$ полупречника $\sqrt{2}$. д) $z=0$. ђ) Елипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21} = 1$. е) Хипербола $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9} = 1$.

1268. а) $z_1 = 6+8i$, $z_2 = 6+17i$. б) Нека је $z = x+iy$. Једначине постају

$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy-2)^2} = 4 \quad \text{и} \quad \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},$$

одакле се налази $x = -y$. Заменом овог резултата у прву једначину добијамо $x_{1,2} = \pm 1$, па је $y_{1,2} = \mp 1$ и решења система су $z_1 = 1-i$ и $z_2 = -1+i$. в) $z = -\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$.

1269. а) Како је $a=0$, $b=6$, $r=6$ и вектор који представља број $6i$ припада позитивном делу Oy-осе, онда је *аргумент* комплексног броја $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, па је:

$$6i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{или} \quad 6i = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right), \quad k\in\mathbf{Z}.$$

б) Имамо да је $a=3$, $b=3$, $r=|z|=\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Тачка која представља $z = 3+3i$ налази се у првом квадранту па је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a} = 1$, односно $\psi = \dfrac{\pi}{4}$. Следи да је $(k\in\mathbf{Z})$:

$$3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \text{ или } 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right).$$

---

* Приметимо да у формули за решење квадратне једначине у комплексном подручју није потребан знак $\pm$, него се ставља само $+$ јер сам квадратни корен из комплексног броја има две вредности, док се у случају квадратне једначине са реалним коефицијентима подразумева да је реч о аритметичком корену из $|D| = |b^2-4ac|$.

в) $-2+2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;
д) $-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

1270. $z=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

1271. а) Како је $|z_1|=\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{8}$, онда је $|z_1z_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$. Аргумент производа датих бројева је збир углова $\psi_1+\psi_2=\frac{11\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}=\frac{25\pi}{8}$. Следи да је:

$$z_1z_2=4\left(\cos\frac{25\pi}{8}+i\sin\frac{25\pi}{8}\right),\quad \text{или}\quad z_1z_2=4\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

б) $6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; г) $10\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; д) $\cos 7+i\sin 7$;
ђ) $8(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.

1272. а) $\frac{z_1}{z_2}=10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$=\frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
б) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; в) $\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$; г) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

1273. а) Ако са $z_1=i-1$ означимо бројилац датог броја, тада је: $|z_1|=\sqrt{2}$ и $\psi_1=\frac{3\pi}{4}$. Из $z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ добија се $|z_2|=1$ и $\psi_2=\frac{\pi}{3}$, па је

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad \text{тј.}\quad z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

б) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$.

1274. а) По Моавровој формули добија се:

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

б) Дати број написаћемо у тригонометријском облику. Како је $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$. Тачка која представља дати број z, налази се у четвртом квадранту комплексне равни, па је $\operatorname{tg}\psi=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, тј. $\psi=-\frac{\pi}{6}$. Даље је $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Применом Моаврове формуле добија се:

$$\left(\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{10}=3^5\left(\cos\left(-10\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-10\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=3^5\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=3^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)\right)$$
$$=243\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{243}{2}(1+\sqrt{3}i).$$

в) $(i-\sqrt{3})^{13} = 2^{12}(i-\sqrt{3})$; г) -1.

1275. а) Напишимо i у тригонометријском облику: $i = 0 + 1\cdot i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$. Из формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right), \quad k = 0,1,2,\dots,n-1,$$

где је $\sqrt[n]{r}$ аритметички корен, добија се

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right), \quad k = 0,1,$$

одакле добијамо:

$$\text{за } k=0, \quad z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$\text{за } k=1, \quad z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

б) $z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\dfrac{0+2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{0+2\pi k}{3} = \cos\dfrac{2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{2\pi k}{3}$. Одатле редом добијамо:

$$z_0 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1, \qquad z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

в) $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

1276. а) $2^{12}(1+i)$; б) $2^9(1-i\sqrt{3})$; в) $(2-\sqrt{3})^{12}$.

1277. а) Пошто је $i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, то је $z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$, тј. $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$, $z_1 = \cos\dfrac{5\pi}{8} + i\sin\dfrac{5\pi}{8}$, $z_2 = \cos\dfrac{9\pi}{8} + i\sin\dfrac{9\pi}{8}$, $z_3 = \cos\dfrac{13\pi}{8} + i\sin\dfrac{13\pi}{8}$.

б) $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$, $z_1 = \sqrt{2}(-1+i)$, $z_2 = \sqrt{2}(-1-i)$, $z_3 = \sqrt{2}(1-i)$.

1278. а) $(\sqrt{3}-i)^{100} = 2^{100}\left(\cos\left(-\dfrac{100\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{100\pi}{6}\right)\right)$, или $(\sqrt{3}-i)^{100} = = 2^{100}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

б) Одредимо прво модул $|z|$:

$$|z| = \left|1 + \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right| = \sqrt{\left(1+\cos\frac{10\pi}{9}\right)^2 + \left(\sin\frac{10\pi}{9}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos\frac{10\pi}{9}} = 2\sqrt{\left(\cos\frac{5\pi}{9}\right)^2} = 2\left|\cos\frac{5\pi}{9}\right| = -2\cos\frac{5\pi}{9}.$$

Да бисмо одредили аргумент ψ, решавамо систем једначина

$$\cos\psi = \frac{a}{|z|} = \frac{1+\cos\frac{10\pi}{9}}{-2\cos\frac{5\pi}{9}}, \quad \sin\psi = \frac{b}{|z|} = \frac{\sin\frac{10\pi}{9}}{-2\cos\frac{5\pi}{9}}.$$

Уочимо да је $\sin\psi < 0$ и $\cos\psi > 0$, те је угао ψ у IV квадранту и, дакле, $\operatorname{tg}\psi < 0$. Дељењем прве једначине другом добијамо:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\frac{10\pi}{9}}{1+\cos\frac{10\pi}{9}} = \frac{2\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}}{2\cos^2\frac{5\pi}{9}} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{9},$$

одакле је $\psi = \dfrac{5\pi}{9} - \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Један од аргумената је $\psi_1 = \dfrac{14\pi}{9}$ (за $k = 2$). Дакле, $z = -2\cos\dfrac{5\pi}{9}\left(\cos\dfrac{14\pi}{9} + i\sin\dfrac{14\pi}{9}\right)$.

1279. а) Решавање једначине своди се на одређивање вредности корена $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$. Овде је $r = \sqrt{64+3\cdot 64} = 16$, угао ψ у III квадранту и $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{3}$. То даје за угао једно решење $\psi_1 = 240^\circ$. Даље је $z_k = 2(\cos(60^\circ + 90^\circ\cdot k) + i\sin(60^\circ + 90^\circ\cdot k))$, $k = 0,1,2,3$. Дакле,

$$z_0 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z_1 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_2 = 2(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_3 = 2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i.$$

в) $z_0 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$, $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{8\pi}{9} + i\sin\dfrac{8\pi}{9}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{14\pi}{9} + i\sin\dfrac{14\pi}{9}\right)$.

г) $z_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{6k+1}{15}\pi + i\sin\dfrac{6k+1}{15}\pi\right)$, $k = 0,1,2,3,4$.

1280. -64.

1281. а) У Моавровој формули за $r = 1$ и $n = 2$ добијамо

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, или $\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

Из услова једнакости два комплексна броја следи:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \text{и} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

б) У Моавровој формули за $r = 1$ и $n = 3$ добијамо:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha, \quad \text{или}$$
$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha - i\sin^3\alpha = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha.$$

Из услова једнакости два комплексна броја следи:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

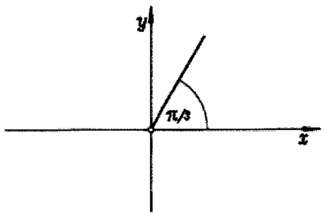
1282. Нека је r модул и ψ аргумент комплексног броја z ($r > 0$ и $0 \le \psi < 2\pi$). Тада је $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ и дата једначина добија облик $r^2(\cos 2\psi + i\sin 2\psi) + r = 0$. Дакле, или $r = 0$ и $z_1 = 0$, или $r\cos 2\psi + 1 + ir\sin\psi = 0$, односно

$$\sin 2\psi = 0, \quad r\cos 2\psi + 1 = 0.$$

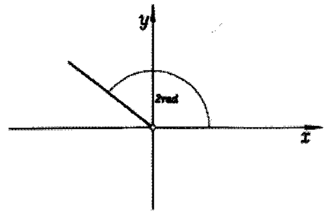
Прву једначину задовољавају вредности $\psi = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$, а пошто из друге једначине следи $\cos 2\psi < 0$, остају само $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\psi = \dfrac{3\pi}{2}$. При томе се, у оба случаја из друге једначине добија $r = 1$, тако да добијамо још два решења:

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

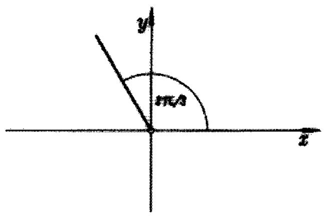
1283. а) Све тачке полуправе на слици под а); б) све тачке полуправе на слици под б); в) све тачке области на слици под в).



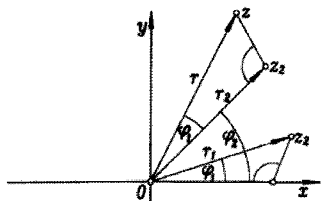
Сл. уз зад. 1283 а)



Сл. уз зад. 1283 б)



Сл. уз зад. 1283 в)



Сл. уз зад. 1284

1284. а) Нека је

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Тада је $\angle z_2Oz = \varphi_1$, а пошто је $r = r_1 r_2$, тј. $r_1 : 1 = r : r_2$, видимо да су троуглови OEz_1 и Oz_2z слични (в. слику), где је $E(1,0)$. На основу ове сличности једноставно одређујемо положај тачке z.

г) Ако је $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, биће $z_1 \cdot i = r_1\left(\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, па је множење бројем i ротација око тачке O за угао $\frac{\pi}{2}$ у позитивном смеру.

1285. Имамо да је $z_2 - z_0 = i(z_1 - z_0)$, тј. $z_2 = i(z_1 - z_0) + z_0$, $z_3 - z_0 = i(z_2 - z_0) = -(z_1 - z_0)$, па је $z_3 = 2z_0 - z_1$ и $z_4 - z_0 = i(z_3 - z_0) = i(z_0 - z_1)$, па је $z_4 = i(z_0 - z_1) + z_0$.

1286. *Прво решење*: Нека је $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$. Тада је

$$\begin{aligned} w &= \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}{1 + (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= \frac{2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} + 2i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + 2i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \\ &= \frac{2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\left(\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}{2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\left(\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} = \frac{2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}, \end{aligned}$$

а тај број је реалан.

Друго решење: Имамо редом једнакости:

$$w = f(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1 z_2} + 1} = f\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = f\left(\frac{z_1\bar{z}_1}{z_1}, \frac{z_2\bar{z}_2}{z_2}\right)$$
$$= f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \overline{f(z_1, z_2)} = \overline{w},$$

па је w реалан број.

1287. Како је $|z| = 1$, то је $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Увођењем смене $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$ имамо $\cos\varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{2t}{1+t^2}$, тако да је

$$z = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+2ti-t^2}{1+t^2} = \frac{(1+it)^2}{(1+it)(1-it)} = \frac{1+it}{1-it}.$$

1288. Дата једнакост еквивалентна је са $z^2 + 1 = 2z\cos\alpha$. Решење ове квадратне једначине је $z_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Имамо да је

$$\begin{aligned} z^n + z^{-n} &= (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} \\ &= \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha + \cos(-n\alpha) \pm i\sin(-n\alpha) \\ &= \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha + \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha = 2\cos n\alpha. \end{aligned}$$

1289. $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + i\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2n}$
$= \left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2n}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2n} = \left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2n}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$

1290. а) $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right).$

1291. а) $z_1 = i+2$, $z_2 = -i-2$, $z_3 = -1+2i$, $z_4 = 1-2i$. Корени су темена квадрата са центром у координатном почетку.

б) $z^3 = \dfrac{2i-5}{2+5i} = \dfrac{(2i-5)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{29i}{29} = i$, па је $z_k = \cos\dfrac{\pi+4k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi+4k\pi}{6}$ за $k = 0, 1, 2$, тј.

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2},$$
$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Како је $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_0| = |z_0 - z_1| = \sqrt{3}$, тачке z_0, z_1, z_2 су темена једнакостраничног троугла са центром у координатном почетку.

в) $z_k = i + \operatorname{ctg}(4k+1)\dfrac{\pi}{16}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

1292. а) Треба да буде $z^2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$. Одавде добијамо $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$ и $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$. б) $z_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$. в) Како је $z^2 = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то је

$\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, па је $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\sin\varphi}{2}}$ и $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$. Дакле,

$$z_0 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{5}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)}\right) = 1+2i,$$

а $z_1 = -z_0 = -1-2i$.

1293. а) Прикажимо детаљно алгоритам дељења полинома полиномом:

$$\begin{array}{l}
(x^5 - x^3 + x + 1) : (x^2 + x + 1) = x^3 - x^2 - x + 2 \\
\underline{\ x^5 + x^4 + x^3\qquad} \\
\qquad - x^4 - 2x^3 + x + 1 \\
\qquad \underline{- x^4 - \ \ x^3 - x^2\qquad} \\
\qquad\qquad - x^3 + x^2 + x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{- x^3 - x^2 - x\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 2x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2x^2 + 2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 1
\end{array}$$

Дакле, $q(x) = x^3 - x^2 - x + 2$, $r(x) = -1$; б) $q(x) = x^3 + 2x^2 - 6$, $r(x) = -5x + 11$; в) $q(x) = 5x^2 + 3x + 9$, $r(x) = 0$; г) $q(x) = x^3 + x$, $r(x) = x$.

1294. $(x^5 - x^3 + x + 2) : (x^2 + x + 1) = x^3 - x^2 - x + 2$.

1295. а) Дељењем полинома $a(x)$ са $b(x)$ добијамо количник $x^2 + 2x - 3$ и остатак $(p-14)x + q + 12$. Да би остатак био нула неопходно је и довољно да буде $p = 14$, $q = -12$. б) $p_1 = -7$, $q_1 = -1$; $p_2 = -12$, $q_2 = -2$; в) $p = q = -\frac{13}{4}$; г) $p_1 = 0$, $q_1 = 1$; $p_2 = 2$, $q_2 = 1$; $p_3 = 0$, $q_3 = -1$; $p_4 = -2$, $q_4 = -1$.

1296. а) $p(1) = 5$; б) $p(1-2i) = -9 + 8i$.

1297. Како је $p(x) = (x-1)q_1(x) + 3$ и $p(x) = (x-2)q_2(x) + 4$, то је $p(1) = 3$, $p(2) = 4$. Ако у релацији

$$p(x) = (x-1)(x-2)q_3(x) + ax + b$$

заменимо $x = 1$ и $x = 2$ добијамо $p(1) = a + b = 3$, $p(2) = 2a + b = 4$, одакле је $a = 1$, $b = 2$, паје остатак једнак $x + 2$.

1298. $x + 2$.

1299. а) $p(x) = (x-1)(x-3+i)(x+4)(x-i)$; б) $p(x) = (x-2)^2(x-i)^3$; в) $p(x) = x^4 - \frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}x^2 + 1$.

1300. $p(-2-i) = -1 - 44i$.

1301. а) Из $x^{99} + x^3 + 10x + 5 = q(x)\cdot(x^2+1) + ax + b$ за $x = i$ добијамо $8i + 5 = ai + b$, па је $a = 8$, $b = 5$, а остатак је $8x + 5$. б) $x - 3$. в) $x - 2$.

1302. Нека је $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x^3 - x)\cdot q(x) + ax^2 + bx + c$. За $x = 0$ добијамо $1 = c$, за $x = 1$: $n + 1 = a + b + c$ и за $x = -1$: $1 = a - b + c$, ако је n парно и $0 = a - b + c$ ако је n непарно. 1° Ако је n парно, тада је, дакле, $c = 1$, $a - b = 0$, $a + b = n$, па је $a = b = \frac{n}{2}$ и остатак $r(x) = \frac{n}{2}x^2 + \frac{n}{2}x + 1$. 2° Ако је n непарно, тада је $c = 1$, $a - b = -1$, $a + b = n$, па је $a = \frac{n-1}{2}$, $b = \frac{n+1}{2}$, а остатак $r(x) = \frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n+1}{2}x + 1$.

1303. Нека је $p(x) = (x+1)(x^2+1)q(x) + ax^2 + bx + c = (x+1)(x^2+1)q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a$. Дакле, $bx + c - a = 2x + 3$, па је $b = 2$, $c - a = 3$. С друге стране, за $x = -1$ добијамо $p(-1) = 4 = a - b + c$, одакле је $a + c = 6$. Из $a + c = 6$, $c - a = 3$ налазимо $a = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{2}$. Дакле, тражени остатак је $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$.

1304. При дељењу $p(x)$ са $x^2 + d$ добијамо количник $x^2 - x + (a - d)$ и остатак $x(d + b) + c - d(a - d)$, а при дељењу $p(x)$ са $x^2 - d$ добијамо количник $x^2 - x + (a + d)$ и остатак $(b - d)x + c + (a + d)d$. Дакле,

$$x(d+b) + c - d(a-d) = x \quad \text{и} \quad x(b-d) + c + (a+d)d = -x,$$

односно $d + b = 1$, $b - d = -1$, $c - d(a - d) = 0$, $c + d(a + d) = 0$, одакле налазимо $b = 0$, $d = 1$, $a = 0$, $c = -1$.

1305. а) $p(x) = x^n - nxa^{n-1} + na^n - a^n = x^n - a^n - na^{n-1}(x-a) = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1})$. Ако означимо $q(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1}$, биће $q(a) = 0$, дакле $q(x) = (x - a)r(x)$ за неки полином $r(x)$, па је $p(x) = (x - a)^2 r(x)$.

б) $p(x) = (x^n - 1)^2 - n^2x^{n-1}(x - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot f(x)$, где је $f(x) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)^2 - n^2x^{n-1}$. Пошто је $f(1) = n^2 - n^2 = 0$, то је и $f(x)$ дељиво са $x - 1$, па је $p(x) = (x - 1)^3 g(x)$, за неки полином $g(x)$.

1306. Нека је $p(x) = (mx^2 + nx + p)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2mp)x^2 + 2npx + p^2$. Тада је $m = \pm 1$, $p = \pm 1$, $2mn = a$, $n^2 + 2mp = b$, $2np = -8$. Решавањем овог система једначина налазимо $a_1 = -8$, $b_1 = 18$ или $a_2 = 8$, $b_2 = 14$.

1307. Корени полинома $x^2 + 1$ су $x_{1,2} = \pm i$. Довољно је доказати да је $p(i) = p(-i) = 0$. Имамо

$$p(i) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - i\sin n\varphi = 0,$$
$$p(-i) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n - \cos n\varphi + i\sin n\varphi = 0.$$

1308. *Прво решење*: Нека су α_k $(k = 1, 2)$ корени једначине $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 0$, тј. $\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Довољно је да се покаже да су α_1 и α_2 корени полинома $p(x)$. Будући да је $\alpha_k^3 = 1$ $(k = 1, 2)$, то је $\alpha_k^{991} = \alpha_k^{990} \cdot \alpha_k = (\alpha_k^3)^{330} \cdot \alpha_k = \alpha_k$, а $\alpha_k^{344} = \alpha_k^{342} \cdot \alpha_k^2 = \alpha_k^2$, тако да је $p(\alpha_k) = \alpha_k^{991} + \alpha_k^{344} + 1 = \alpha_k + \alpha_k^2 + 1 = 0$.

Друго решење: Представимо полином $p(x)$ у облику: $p(x) = x(x^{990} - 1) + x^2(x^{342} - 1) + x^2 + x + 1$. Полиноми $x^{990} - 1$ и $x^{342} - 1$ су дељиви са $x^2 + x + 1$, јер је $x^3 - 1$ дељиво са $x^2 + x + 1$.

1309. Нека су α_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ корени једначине $q(x) \equiv \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} = 0$, тј. $\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Довољно је показати да су α_k корени полинома $p(x)$. Будући да је $\alpha_k^5 = 1$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, то је $\alpha_k^{44} = \alpha_k^{40+4} = (\alpha_k^5)^8 \cdot \alpha_k^4 = \alpha_k^4$. Слично је $\alpha_k^{33} = \alpha_k^3$, $\alpha_k^{22} = \alpha_k^2$, $\alpha_k^{11} = \alpha_k$, па је $p(\alpha_k) = \alpha_k^{44} + \alpha_k^{33} + \alpha_k^{22} + \alpha_k^{11} + 1 = \alpha_k^4 + \alpha_k^3 + \alpha_k^2 + \alpha_k + 1 = 0$.

1310. а) Нека су β_k $(k = 1, 2)$ корени једначине $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = 0$, тј. $\beta_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Довољно је одредити услов под којим су β_k $(k = 1, 2)$ корени полинома $p(x)$. Будући да је $\beta_k^3 = -1$ $(k = 1, 2)$, биће $p(\beta_k) = (-1)^m - (-1)^n\beta_k + (-1)^p\beta_k^2 = (-1)^m - (-1)^p + \beta_k[(-1)^p - (-1)^n] = 0$ ако и само ако су бројеви m, n, p исте парности. б) $m, p, n + 1$ исте парности.

1311. а) $n = 6m + 1$ или $n = 6m + 5$, $m \in \mathbf{N}$; б) $n = 3m + 1$ или $n = 3m + 2$, $m \in \mathbf{N}$.

1312. Пошто су нуле полинома $q(x)$ бројеви 1 и α, довољно је доказати да је $p(1) = 0$ и $p(\alpha) = 0$. Ако је $\alpha = 1$, тада је број 1 двострука нула полинома $q(x)$. Међутим, тада је

$p(x) = nx^{n+1} - (1+n)x^n + 1 = nx^n(x-1) - (x^n - 1) = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - 1) = (x-1) \cdot f(x)$, где је $f(1) = n - n = 0$, па је $p(x)$ дељиво са $(x-1)^2$.

1313. Нека су x_1, x_2, x_3 корени дате једначине. Тада је $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2}$. Решавањем овог система добијамо $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_1x_2 = -3$, $a = -3$. Из $x_1 + x_2 = 1$ и $x_1x_2 = -3$ добијамо да је $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13})$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ (или обрнуто).

1314. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{5}{2}$. **1315.** $a = \pm 6$.

1316. Применити Вијетове формуле. Резултат: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p$.

1317. Пошто је $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p$, $x_1x_2x_3 = -q$ и $x_1x_2x_3 = x_1 + x_2$, то је $x_1x_2x_3 = -q = x_2 + x_1 = -x_3$, па је $x_3 = q$. Заменом у једначину добијамо једну везу: $q^3 + pq + q = 0$.

1318. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

1319. $a' = 2$, $x'_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x'_3 = 2$; $a'' = \frac{25}{8}$, $x''_{1,2} = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{5})$, $x''_3 = -\frac{5}{2}$.

1320. $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 1 \cdot \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = -1.$

1321. а) -1; б) $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)] - x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = \dfrac{b}{a}\left(1 - \dfrac{2b}{a}\right) + \dfrac{b}{a} = \dfrac{2b(a-b)}{a^2}$.

1322. Из Вијетових формула добијамо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

Пошто је $q \neq 0$, сви корени полинома $p(x)$ су различити од нуле. С друге стране $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$, па је $p = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < 0$.

1323. Из Вијетових формула налазимо

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ &= \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{2a_2}{a_0} = \frac{a_1^2 - 2a_2a_0}{a_0^2} < 0, \end{aligned}$$

па не могу сви корени $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полинома да буду реални.

1324. Услов да $p(x)$ има пар супротних корена еквивалентан је услову

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = 0 \\ \iff\ & x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 2x_1x_2x_3 = 0 \\ \iff\ & (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = 0 \\ \iff\ & c - ab = 0. \end{aligned}$$

1325. По Вијетовим формулама за нуле овог полинома важи $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 20$ и $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{20} = 1$. Како је аритметичка средина бројева једнака геометријској средини ако и само ако су ти бројеви једнаки и како је овде

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}}{20} = 1 = \sqrt[20]{x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{20}},$$

то је $x_1 = x_2 = \ldots = x_{20} = 1$ и $p(x) = (x-1)^{20}$.

1326. По Вијетовим формулама је $x_1+x_2+x_3=\frac{5}{2}$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\frac{5}{4}$ и $x_1x_2x_3=-\frac{33}{8}$, па је $(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1)=5$, $(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)=5$, $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=1$. Тако добијамо једначину $y^3-5y^2+5y-1=0$, чија су решења $y_1(=x_1+x_2)=2+\sqrt{3}$, $y_2(=x_2+x_3)=1$ и $y_3(=x_3+x_1)=2-\sqrt{3}$, одакле налазимо да је $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, $x_3=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

1327. $-q=(p-q)^2$, $\gamma=-(\alpha+\beta)=\alpha\beta$.

1328. По Вијетовим формулама је $x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a$, $x_1x_2x_3=-a$, па је $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=36-2a$ и $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3x_1x_2x_3=216-18a-3a=216-21a$. Сада је $(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3-9(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+27(x_1+x_2+x_3)-81=216-21a-9(36-2a)+27\cdot 6-81=-3a-27=0$ за $a=-9$.

1329. а) Из $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a$ добијамо $S+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=a^2$, па је $S=a^2(1-2mn)$. б) Ако једначина (2) нема реална решења, њена дискриминанта $D=4-8mn=4(1-2mn)$ је мања од нуле, па је $S<0$, што значи да нису сва три броја x_1,x_2,x_3 реална.

1330. а) $S=b^2-2ac$.

1331. На основу Вијетових формула добијамо $\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=-1$, па је

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix} &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]\\ &=-p(p^2-3q)=3pq-p^3.\end{aligned}$$

1332. а) Пошто је $x_1=1-3i$, то је $x_2=1+3i$. Како је $(x-x_1)(x-x_2)=(x-1+3i)(x-1-3i)=x^2-2x+10$ и $(x^4-4x^3+9x^2-10x-50):(x^2-2x+10)=x^2-2x-5$, то x_3 и x_4 добијамо као корене једначине $x^2-2x-5=0$. Добија се $x_{3,4}=1\pm\sqrt{6}$. б) $x_2=1+2i$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{5}$; в) $x_2=-i$, $x_3=1$, $x_4=2$.

1333. $p(x)=a_0(x+2)^2(x-1+2i)(x-1-2i)=a_0(x+2)^2(x^2-2x+5)$. Из $p(-3)=20$, добијамо $a_0=1$.

1334. а) $p=-5$, $q=3$; б) $x_2=1-i$, $x_{3,4}=\frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13})$.

1335. Очигледно је да је $x_2=i\sqrt{3}$. Имамо да је $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+3$ и $p(x):(x^2+3)=9x^3-6x^2-5x+2$. Полином $9x^3-6x^2-5x+2$ има целобројну нулу $x_3=1$. Како је $(9x^3-6x^2-5x+2):(x-1)=9x^2+3x-2$, нуле x_4 и x_5 налазимо као решења квадратне једначине $9x^2+3x-2=0$. Добија се $x_4=-\frac{2}{3}$, $x_5=\frac{1}{3}$.

1336. Нека је број $\dfrac{p}{q}$ корен датог полинома. Тада је $a_0\left(\dfrac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{p}{q}+a_n=0$, одакле је

$$(1)\qquad a_0\frac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+\cdots+a_nq^{n-1}=0 \quad \text{и}$$

$$(2)\qquad a_0p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}+a_n\frac{q^n}{p}=0.$$

Из (1) следи да $q\mid a_0$, а из (2) следи да $p\mid a_n$.

а) Ако је $\dfrac{p}{q}$ корен датог полинома, тада долази у обзир $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$, $q \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Провером се може установити да је број $\frac{3}{10}$ корен датог полинома. б) Нека је $\dfrac{p}{q}$ корен датог полинома. Пошто мора бити $p \mid 2$ и $q \mid 9$ долазе у обзир само следећи рационални корени: ±1, ±2, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{9}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{2}{9}$. Провером се налазе корени $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

1337. Нека је $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Тада је за два цела броја a и b:

$$p(a) - p(b) = a_0(a^n - b^n) + a_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(a - b),$$

тј. $(a-b) \mid (p(a) - p(b))$. а) $p(6) - p(2) = 6 - 4 = 2$, па је нетачно да $4 \mid (p(6) - p(2))$ и такав полином $p(x)$ не постоји. б) $p(62) - p(19) = 1$, а $62 - 19 = 43$, па овакав полином $p(x)$ не постоји.

1338. а) Означимо $x^2 - y^2 = u$, $-xy = v$. Дати систем добија облик $u + v = -11$, $uv = -180$, одакле је $u_1 = 9$, $v_1 = -20$; $u_2 = -20$, $v_2 = 9$, тј. $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 20$; $x^2 - y^2 = -20$, $xy = -9$. Решавајући ова два система добијамо две биквадратне једначине. Решења су $(\pm5, \pm4)$, $(\pm4i, \mp5i)$, $\left(\pm\sqrt{-10+\sqrt{181}}, \mp\dfrac{9}{\sqrt{-10+\sqrt{181}}}\right)$, $\left(\pm i\sqrt{-10-\sqrt{181}}, \mp\dfrac{9i}{\sqrt{-10-\sqrt{181}}}\right)$. б) *Упутство*: Увести смене $x(x+1) = u$, $3x^2 + 5y = v$. Решења су $(3, -3)$ и $(-4, -\frac{36}{5})$.

1339. а) $(2,3)$, $(3,2)$; б) $(-1,-2)$, $(2,1)$.

1340. а) Кад другу једначину помножимо са 3 и саберемо са првом, добијамо еквивалентан систем:

$$(x+y)^3 = 27, \quad x^2y + xy^2 = 6.$$

Пошто је $(x+y)^3 = 27$ еквивалентно са $x+y = 3$, добијамо да је дати систем еквивалентан систему:

$$x + y = 3, \qquad x^2y + xy^2 = 6,$$

чија су решења $(1,2)$ и $(2,1)$. б) Решава се као и задатак а). Решење је $(1,1)$. в) $(-1,2)$, $(2,-1)$.

1341. а) Како је $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) = 481$ и $x^2 + xy + y^2 = 37$, следи да је $x^2 + y^2 - xy = 13$, па је дати систем еквивалентан систему:

$$x^2 + y^2 - xy = 13, \qquad x^2 + y^2 + xy = 37.$$

Решења су $(4,3)$, $(-4,-3)$, $(3,4)$, $(-3,-4)$. б) $(-3,-2)$, $(-2,-3)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

1342. а) Пошто је $y = \dfrac{3}{x}$, то段 заменом у прву једначину система добијамо $x^4 + \dfrac{81}{x^4} = 82$, тј. биквадратну једначину $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$ из које одређујемо да је $x^4 = 1$ или $x^4 = 81$, тј. $x_{1,2} = \pm1$, $x_{3,4} = \pm i$, $x_{5,6} = \pm3$, $x_{7,8} = \pm3i$. Решења су: $(1,3)$, $(-1,-3)$, $(i,-3i)$, $(-i,3i)$, $(3,1)$, $(-3,-1)$, $(3i,-i)$, $(-3i,i)$. б) $(2,3)$, $(3,2)$; в) $(1,2)$, $(2,1)$.

1343. а) Увести смену $y^2 = z$. Решења су: $(2,1)$, $(2,-1)$, $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$, $(-2,i)$, $(-2,-i)$, $(-1,\sqrt{2}i)$, $(-1,-\sqrt{2}i)$. б) $(14,-11)$, $11, -14$.

1344. $(2,1)$, $(1,2)$, $(-2,1)$, $(1,-2)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$.

1345. $(2,2)$. **1346.** $(4,2)$, $(-4,-2)$.

1347. $(3,-1)$, $(1,-3)$, $\left(\frac{1}{2}(-3+3\sqrt{3}i), \frac{1}{2}(-1-3\sqrt{3}i)\right)$, $\left(\frac{1}{2}(-3-3\sqrt{3}i), \frac{1}{2}(-1+3\sqrt{3}i)\right)$.

1348. $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,1)$, $(1,-2)$.

1349. а) Како је $x^2+y^2=\frac{78}{xy}$, након квадрирања обеју страна ове једначине и замене у другу једначину добијамо: $97+2(xy)^2=\frac{78^2}{(xy)^2}$. Решења су $(-3,-2)$, $(-2,-3)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

б) Увести смене $xy=u$, $x+y=v$. Добија се $u+v=5$ или $u+v=-3$, односно $u-v=-3$ или $u-v=1$, па за непознате u и v имамо четири пара решења: $(1,4)$, $(3,2)$, $(-3,0)$ и $(-1,-2)$. Дати систем има осам парова решења: $\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{15}),\frac{1}{2}(1-i\sqrt{15})\right)$, $\left(\frac{1}{2}(1-i\sqrt{15}),\frac{1}{2}(1+i\sqrt{15})\right)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$, $(1,-2)$ и $(-2,1)$.

1350. Од петог степена прве једначине одузмемо другу једначину система и добијамо:

$$xy(x^3+y^3)+2x^2y^2+6=0. \tag{1}$$

Ако прву једначину система степенујемо са 3, добијамо $x^3+y^3=1-3xy$, односно, након замене у (1), $x^2y^2-xy-6=0$, одакле је $xy=3$ или $xy=-2$. Комбиновањем ових двеју релација са $x+y=1$ добијамо четири пара бројева: $(2,-1)$, $(-1,2)$, $\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}),\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})\right)$, $\left(\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}),\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})\right)$. Једноставно се проверава да сви ови парови задовољавају дати систем једначина.

1351. а) Прво једначину напишемо у облику $x+y=-z$ и квадрирамо је. Заменом у другу једначину налазимо xy. Реешења су: $(-2,5,-3)$, $(5,-2,-3)$, $(2,-5,3)$ и $(-5,2,3)$.

б) Прву и трећу једначину написати у облику $x+y=1-z$, односно $x^3+y^3=1-z^3$. Решења: $((2,-2,1))$, $(-2,2,1)$, $(1,2,-2)$, $(2,1,-2)$, $(-2,1,2)$ и $(1,-2,2)$.

1352. а) $(1,-1,2)$, $(1,2,-1)$, $(-1,1,2)$, $(-1,2,1)$, $(2,1,-1)$, $(2,-1,1)$; б) $(1,-2,3)$, $(1,-3,2)$, $(2,-1,3)$, $(2,-3,1)$, $(3,-1,2)$, $(3,-2,1)$.

1353. Другу једначину система можемо написати у облику $(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=bx^2y^2$, па заменом axy уместо x^2+y^2 из прве једначине добијамо $(a^2-2-b)x^2y^2=0$.

Постоје две могућности. 1° $a^2-2-b\neq 0$. Једноставно се утврђује да у овом случају једначина има само једно решење: $(0,0)$. 2° $a^2-2-b=0$. У овом случају друга једначина система се добија квадрирањем леве и десне стране прве једначине. Дакле, акоје (x_0,y_0) пар бројева који задовољава прву једначину, задовољаваће и другу. Систем има бесконачно много решења. За произвољно x је

$$y=\frac{ax\pm\sqrt{a^2x^2-4x^2}}{2}=\frac{x(a\pm\sqrt{a^2-4})}{2}.$$

1354. а) Из једнакости

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \tag{1}$$

у складу са другом једнакошћу датог система добијамо

$$xy+yz+zx=0. \tag{2}$$

Пошто је

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz, \tag{3}$$

на основу датих једначина и (2) закључујемо да је $xyz=0$. Ако је нпр. $z=0$, тада се систем своди на $x+y=a$, $x^2+y^2=a^2$, $x^3+y^3=a^3$. Одузимањем друге једначине од квадриране прве добијамо $2xy=0$, па је и нпр. $y=0$, а тада је $x=a$. Због симетрије система (не мења се пермутацијама тројке (x,y,z)), решења су: $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ и $(0,0,a)$. Ако је $a=0$ то се своди на јединствено решење $(0,0,0)$.

б) На основу Вијетових формула уверавамо се да су x, y, z решења кубне једначине $t^3 - at^2 + a^2t - a^3 = 0$, тј. $(t-a)(t^2+a^2) = 0$, одакле налазимо $t_1 = a$, $t_2 = ia$, $t_3 = -ia$. Решења система су $(a, ia, -ia)$, $(a, -ia, ia)$, $(ia, a, -ia)$, $(ia, -ia, a)$, $(-ia, a, ia)$, $(-ia, ia, a)$.

Глава IX – Тестови

9.1.

1. B; 2. D; 3. E; 4. C; 5. A; 6. E; 7. A; 8. E; 9. E; 10. B.

9.2.

1. A; 2. A; 3. B; 4. B; 5. D; 6. C; 7. C; 8. E; 9. D; 10. C.

9.3.

1. D; 2. E; 3. A; 4. D; 5. E; 6. C; 7. B; 8. C; 9. A; 10. B.

9.4.

1. D; 2. A; 3. D; 4. D; 5. B; 6. C; 7. C; 8. E; 9. D; 10. A.

9.5.

1. D; 2. A; 3. D; 4. C; 5. A; 6. B; 7. E; 8. B; 9. A; 10. E.

9.6.

1. E; 2. E; 3. D; 4. A; 5. C; 6. D; 7. E; 8. B; 9. A; 10. C.

9.7.

1. C; 2. C; 3. E; 4. D; 5. A; 6. B; 7. B; 8. C; 9. E; 10. C.

9.8.

1. E; 2. E; 3. E; 4. B; 5. D; 6. D; 7. B; 8. A; 9. C; 10. A.

9.9.

1. A; 2. D; 3. B; 4. B; 5. A; 6. C; 7. E; 8. C; 9. D; 10. C.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Ašić i dr.: *Savezna i republička takmičenja srednjoškolaca*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1984.

[2] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић: *Припремни задаци за такмичења средњошколаца из математике*, Друштво математичара Србије, Београд 2008.

[3] M. Veljković, Ž. Joksimović, S. Ognjanović: *Zbirka zadataka iz matematike*, Stručna knjiga, Beograd, 1984.

[4] Виленкин, Шварцбурд: *Математический анализ*, Наука, Москва, 1969.

[5] В. Драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић: *Републичка и савезна такмичења из математике 1990–2001*, Друштво математичара Србије, Београд, 2002.

[6] В. Драговић, П. Младеновић, С. Огњановић: *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа*, Друштво математичара Србије, Београд, 1999.

[7] Ž. Ivanović, B. Đerasimović-Milić: *Matematika – rešeni zadaci za III razred usmerenog obrazovanja*, Stručna knjiga, Beograd, 1986.

[8] Z. Kadelburg, V. Mićić, V. Janković: *Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, diferencne jednačine*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1976.

[9] Д. В. Клетеник: *Сборник задач по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1969.

[10] L. Milin, Ž. Ivanović, S. Ognjanović: *Matematiskop 4 – zbirka zadataka za II razred*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[11] L. Milin, Ž. Ivanović, S. Ognjanović: *Matematiskop 5 – zbirka zadataka za III razred*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[12] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Друштво математичара Србије, Београд, 2004.

[13] V. Mićić, S. Ognjanović, Ž. Ivanović: *Matematika sa zbirkom zadataka za II razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja*, Naučna knjiga, Beograd 1989.

[14] П. С. Моденов: *Аналитическая геометрия*, Наука, Москва, 1969.

[15] С. Огњановић: *Математика 4^{+} (Решени задаци са пријемних испита на универзитетима у Србији)*, Круг, Београд, 2004.

[16] I. V. Proskurjakov: *Zbirka zadataka iz linearne algebre (prevod)*, Beograd, 1988.

[17] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский: *Сборник задач по высшей алгебре*, Наука, Москва, 1977.

[18] V. Hvorostanski: *Zbirka zadataka iz stereometrije*, Beograd, 1958.

[19] О. Н. Цубербиллер: *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1970.

[20] Н. Чепинац: *Збирка задатака из стереометрије*, Београд, 1958.