Живорад Ивановић Срђан Огњановић

МАТЕМАТИКА

1

Збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа

пето прерађено издање

„КРУГ“
БЕОГРАД, 2003.

Аутори: *Живорад Ивановић*, професор
Мр Срђан Огњановић, професор

МАТЕМАТИКА 1

Збирка решених задатака за I разред гимназија и техничких школа
пето прерађено издање

Издавач: „КРУГ", Београд

За издавача: *Маријана Милошевић*

Рецензент: *Јасна Филиповић*, професор IX гимназије у Београду

Уредник: *Живорад Ивановић*

$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX-обрада: *др Зоран Огњановић, Иван Огњановић*

Коректура: *аутори*

Слике: *Ива Стојановић*

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.3)(076)

ИВАНОВИЋ, Живорад
Математика 1 : збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа / Живорад Ивановић, Срђан Огњановић ; [цртежи Ива Стојановић]. - 5. прерађено изд.- Београд : Круг, 2003 (Бор : Трејд).- 256 срт. : граф. прикази ; 24 cm

Тираж 3.000. - Библиографија: стр. [256].

ISBN 86-7136-097-0
1. Огњановић, Срђан

COBISS.SR-ID 107234572

Тираж: 3000 примерака

Штампа: „*Графомед-Трејд*", Бор

Предговор

Садржај ове збирке обухвата нове програме математике за I разред гимназија и стручних школа у којима се математика предаје 3 и 4 часа недељно и примењује се од почетка школске 1990/91. године. Збирка обухвата задатке из следећих тема:

1. Логика и скупови
2. Реални бројеви
3. Пропорционалност
4. Увод у геометрију
5. Подударност
6. Рационални алгебарски изрази
7. Сличност
8. Тригонометрија правоуглог троугла

Свака од наведених тема обрађена је у посебној глави, а свака глава је подељена на већи број одељака. На почетку сваког одељка дате су дефиниције и тврђења чије је познавање неопходно за решавање задатака. На крају сваке главе, у оквиру одељка *Додатак уз главу*, дати су задаци који на одређен начим повезују и обједињавају садржај те главе.
Задаци у збирци су решени и поређани почев од најједноставнијих, ради репродукције научених садржаја, ка тежим за чије је решавање потребно уложити одређен степен креативности.
Срдачно захваљујемо рецензентима Мирјани Вељковић и Милораду Јоковићу који су прочитали рукопис и дали низ корисних примедби и сугестија.
Све примедбе чији би циљ био побољшање квалитета ове збирке примићемо са захвалношћу.

У Београду, августа 1994. Аутори

Предговор петом прерађеном издању

У циљу уједначавања захтева који се постављају пред ученике, у најновијем издању направљена је једна оријентациона подела задатака из збирке у три групе-лакши (ниво оцена 2 и 3-обојени зеленом бојом), тежи (ниво оцена 4 и 5-жутом) и најтежи задаци (из додатка уз главу-обојени црвеном бојом). При овоме жеља нам је била да помогнемо ученицима и њиховим наставницима у савлађивању планираног градива, а при томе смо свесни да је оваква подела на три групе задатака груба и непрецизна, па ће се, можда, у неким наредним издањима појавити нека побољшања и корекције.

Како се на пријемним испитима, али све више и у редовној настави користе тестови као *поуздан* и *једноставан* начин проверавања знања, почевши од четвртог издања, ова збирка је допуњена једном групом тестова на крају књиге, који треба да послуже као *предлог* и *модел* како састављати нове тестове. При томе се залажемо за развијање мисаоности, тачности, радозналости, креативности, стваралаштва и комбиновања тестова са другим начинима провере знања, а никако само за коришћење приложених тестова.

Срдачно захваљујемо рецензенту Јасни Филиповић, која је својим сугестијама у многоме утицала на квалитет избора и редоследа задатака.

У Београду, августа 2003. Аутори

Грчки алфабет

Α α алфа	Ι ι јота	Ρ ρ ро
Β β бета	Κ κ капа	Σ σ сигма
Γ γ гама	Λ λ ламбда	Τ τ тау
Δ δ делта	Μ μ ми	Υ υ ипсилон
Ε ϵ епсилон	Ν ν ни	Φ φ фи
Ζ ζ зета	Ξ ξ кси	Χ χ хи
Η η ета	O o омикрон	Ψ ψ пси
Θ θ тета	Π π пи	Ω ω омега

При томе слова A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, T и X читамо као слова латинице.

САДРЖАЈ

440

Глава I

ЛОГИКА И СКУПОВИ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

1° *Константе.* Знаци, као 1, 2, 7, -3, $\sqrt{2}$, π и сл. који служе за означавање одређених математичких предмета називају се *константе.*

2° *Променљиве.* Знаци као x, y, z, A, B, C, x_1, y_1, z_1, ... обично служе као заједничке ознаке за више одређених предмета. То су тзв. *променљиве.* Променљиве које се јављају у једначини зову се *непознате.*

3° *Операцијски знаци.* Знаци као $+$, $\cdot$, $-$, $\cup$, $\cap$, и други који обично служе за означавање операција су тзв. *операцијски знаци.*

4° *Релацијски знаци.* Знаци као $=$, $\cong$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\perp$, $\parallel$ обично служе за означавање релација; то су тзв. *релацијски знаци.*

5° *Знаци логичких операција.* Знаци као $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, су знаци основних логичких операција.

6° *Изрази.* Знаци констаната и променљивих као и константе и променљиве везане знацима операција су *изрази.* На пример: (1) x је израз; (2) 5 је израз; (3) $x+5$ је израз; (4) $y-1$ је израз; (5) $(x+5)(y-5)$ је израз. Код израза заграде имају помоћну улогу.

7° *Формуле.* Математичким симболима записана реченица (која има смисла) назива се формула.

8° *Исказ.* Реченица која има тачно једну истинитосну вредност: $\top$-тачно или $\perp$-нетачно, назива се исказ. Истинитосна вредност исказа p означава се са $\tau(p)$.

9° *Исказна формула.* Исказне константе ($\top$, $\perp$), исказна слова (A, B, ..., P, Q, p, q, m ...) и сви сложени искази настали помоћу знакова логичких операција ($\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$) називају се исказне формуле.

10° *Таутологије.* Исказне формуле које су тачне за све вредности исказних слова називају се таутологијама.

11° *Универзални квантификатор* $\forall$. Обрнуто слово A као почетно слово енглеске речи *all* = сви, а значи „сваки", „ма који ", „било који".

12° *Егзистенцијални квантификатор* $\exists$. Обрнуто слово E као почетно слово енглеске речи *exist* = постоји, а значи „најмање један", „макар један", „неки", „постоји бар један".

1.1. ОСНОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА ИСКАЗИМА

Конјункција исказа p и q је исказ $p \wedge q$ чија је истинитосна вредност одређена таблицом 1.

Дисјункција исказа p и q је исказ $p \vee q$ чија је истинитосна вредност одређена таблицом 2.

Импликација исказа p и q је исказ $p \Rightarrow q$ чија је истинитосна вредност одређена таблицом 3.

Еквиваленција исказа p и q је исказ $p \Leftrightarrow q$ чија је истинитосна вредност одређена таблицом 4.

Негација исказа p је исказ $\neg p$ чија је истинитосна вредност одређена таблицом 5.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Таблица 1

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Таблица 2

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Таблица 3

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Таблица 4

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Таблица 5

1. Испитати тачност формуле ($x \in \mathbf{R}$):

а) $(-x)^2 = x^2$; б) $x^4 \cdot x^2 = x^8$; в) $3x^3 - x^3 = 3$; г) $2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$;

д) $50x + 10x \cdot 10 = 600x$; ђ) $6x^3 \cdot 3x^2 - 5x \cdot x^4 = 13x^5$;

е) $(10 - 5x) - (8 - 4x) = x$; ж) $2x^2 - x^2(1 - x) + x^3 = x^2$.

2. Одредити да ли су следеће реченице искази и ако јесу одредити им истинитосну вредност:

а) $5 = 2 + 3$; б) $6 < 5$;

в) сваки троугао има три угла;

г) постоји највећи природан број;

д) реченица: „Да ли је данас петак?" је исказ;

ђ) ε је врло мали број;

е) једначина $1 - (1 - (2 - x)) = 5$ нема решење.

3. Одредити истинитосну вредност следећих реченица:

а) $2 + 2 = 4 \wedge 2 + 3 = 4$; б) $2 + 2 = 4 \vee 2 + 3 = 4$;

в) $2 + 2 = 4 \Rightarrow 2 + 3 = 4$; г) $2 + 2 = 4 \Leftarrow 2 + 3 = 4$;

д) $2 + 2 = 4 \Leftrightarrow 2 + 3 = 4$; ђ) $1 > 2 \Rightarrow 3 > 4$;

е) $3 = 7 \Leftrightarrow 5 = 6$; ж) $\neg(2 = 1) \Rightarrow 2 = 1$;

з) $\neg(2 = 1) \Leftarrow 2 = 1$; и) $\neg(3 = 2) \Leftrightarrow 5 > 6$.

4. Дати су искази p и q и формула F. Наћи вредност формуле F ако је

а) $p : (1\frac{2}{9} + 1\frac{1}{6}) \cdot (2 - 1\frac{25}{42}) = (5\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}) : \frac{3}{2}$, $q : (\frac{2}{3} + 3 : \frac{6}{5}) : \frac{1}{3} = 9\frac{1}{2}$, $F : (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$;

б) $p : 1\frac{2}{5} - 3\frac{1}{2} : 1\frac{3}{7} = 7\frac{1}{6} : (-7\frac{1}{6}) - \frac{1}{20}$, $q : \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{7}{8} : \frac{3}{4} < (-\frac{1}{14} - \frac{2}{7}) : (-3) - 6\frac{1}{13} : (-6\frac{1}{13})$, $F : (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$.

5. Између следећих исказа поставити одговарајући симбол $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, или $\Leftrightarrow$

а) $a + b = a + c \cdots b = c$; б) $ab = ac \cdots b = c$;

в) $a + b > a + c \cdots b > c$; г) $a - b > a - c \cdots b < c$;

д) $a + b = 0 \cdots a = -b$; ђ) $a \cdot b = 1 \cdots a = \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$;

е) $a > 0 \cdots a^2 > 0$; ж) $a < 0 \cdots a^2 > 0$;

з) $a = 0 \cdots a^2 = 0$; и) n је паран $\cdots$ n^2 је паран;

ј) $x = |x| \cdots x > 0$; к) $x = |x| \cdots x \geq 0$,

где су $a, b, c, x, \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

6. Уместо ... ставити речи НЕОПХОДНО (ПОТРЕБНО) или ДОВОЉНО тако да се добије тачна реченица

а) Да је цео број дељив са 10 ... је да је дељив са 5, а ... је да је дељив са 100.

б) Да се налазимо у Југославији ... је да се налазимо у Београду.

в) Да је природан број већи од 100 ... је да је једнак 1000.

г) Да је четвороугао квадрат ... је да је ромб.

7. Одредити све вредности променљиве x из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ тако да следеће формуле буду тачне:

а) $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \Rightarrow x = 3$; б) $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$;

в) $x = 1 \Leftrightarrow x = 2$; г) $x \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$;

д) $x \geq 2 \wedge x \geq 5$; ђ) $x \geq 2 \vee x \geq 5$;

е) $x \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$; ж) $x \in \{2, 3\} \wedge x \in \{3, 4, 5\}$;

з) $x \in \{2, 3\} \vee x \in \{3, 4, 5\}$; и) $x \in \{2, 3\} \Leftrightarrow x \in \{3, 4, 5\}$.

8. Саставити таблицу истинитости за следеће формуле:

а) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; б) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

в) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$; г) $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$.

9. а) Познато је да је $p \Rightarrow q$ тачно, а $p \Leftrightarrow q$ лажно. Шта се може рећи о исказу $q \Rightarrow p$?

б) Познато је да је $p \Leftrightarrow q$ тачно. Шта се може рећи о исказима $\neg p \Leftrightarrow q$, $\neg p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$?

10. Саставити таблицу истинитости за следеће формуле и одредити које од њих су таутологије:

а) $(p \wedge q) \Rightarrow r$; б) $(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$;

в) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$; г) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$;

д) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)$;

ђ) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$; е) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

11. Испитати да ли су следеће формуле таутологије:

К.РОГИ. а) $p \wedge \neg p$; б) $p \vee \neg p$;

в) $(p \Rightarrow (p \wedge \neg p)) \Rightarrow \neg p$; г) $[(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg p)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$;

д) $[[\neg p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \wedge (r \Leftarrow \neg p) \wedge (q \Rightarrow \neg r)] \Rightarrow \neg r$;

ђ) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow q$; е) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

12. Доказати да су следеће формуле таутологије:

а) $p \vee \neg p$ (Закон искључења трећег);

б) $\neg(p \wedge \neg p)$ (Закон непротивречности);

в) $\left.\begin{array}{l}\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q,\\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q\end{array}\right\}$ (Де Морганови закони);

г) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Закон контрапозиције);

д) $\left.\begin{array}{l}p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p,\\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p\end{array}\right\}$ (комутативност операција $\wedge$, $\vee$);

ђ) $\left.\begin{array}{l}(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),\\ (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)\end{array}\right\}$ (асоцијативност операција $\wedge$, $\vee$);

е) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (дистрибутивност $\vee$ према $\wedge$, тј. $\wedge$ према $\vee$).

13. Полазећи од супротне претпоставке да за неке вредности исказних слова формула има вредност $\perp$ (свођењем на апсурд) доказати да су следеће формуле таутологије:

а) $(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))) \Rightarrow (q \Rightarrow (s \vee t))$;

б) $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r) \vee ((s \wedge \neg t) \Rightarrow (r \vee p))$;

в) $(p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((q \wedge s) \Rightarrow (t \vee p))$;

г) $((\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \vee s)) \vee ((r \wedge t) \Leftrightarrow p)$.

14. Доказати да је формула $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ таутологија и користећи ово расуђивање доказати: Ако је број a цео и ако је a^2 паран, онда је и a паран број.

15. Доказати импликацију: $(x + y \neq 5 \Rightarrow x \neq 1 \vee y \neq 4)$.

16. а) Доказати да је формула $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ таутологија и користећи тврђење $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$, доказати тврђење: $xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

б) Применом претходног тврђења, решити формулу $x(x-1) \neq 0$.

17. Доказати да је формула $(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ таутологија и на основу тога следеће тврђење: Ако је број дељив са 2 и није дељив са 6, онда он није дељив са 3.

18. Дата је формула $p \vee q$. Наћи њој еквивалентну формулу, која се састоји само од слова p, q и везника $\Rightarrow$.

19. Дата је таблица:

а)

p	q	
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

б)

p	q	
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Наћи бар једну формулу алгебре исказа, која задовољава ову таблицу.

20. Описати све исказне формуле x такве да је $(p \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow q$, где су p и q дати искази.

1.2. КВАНТИФИКАТОРИ (КВАНТОРИ)

Симболи $\forall$ и $\exists$ називају се *универзални*, односно *егзистенцијални* квантификатор и користе се као ознаке за:

$(\forall x)\alpha(x)$ – „за сваки x важи $\alpha(x)$",

$(\exists x)\alpha(x)$ – „постоји x за које важи $\alpha(x)$".

Често су у употреби и тзв. *ограничени* (или *условни*) квантификатори:

$$(\forall x \in A)\alpha(x) - (\forall x)(x \in A \Rightarrow \alpha(x))$$
$$(\exists x \in A)\alpha(x) - (\exists x)(x \in A \wedge \alpha(x))$$

Понашање квантификатора у односу на негацију види се из следећих увек тачних формула:

$$\neg(\forall x)\alpha(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x);$$
$$\neg(\exists x)\alpha(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\alpha(x).$$

21. Које од следећих реченица су тачне у скупу природних бројева?

а) $(\exists x)(x < 5)$; б) $(\forall x)(x \geq 0)$; в) $(\exists x)(3x + 2 = 3)$;

г) $(\exists x)(x + 7 = 11)$; д) $(\forall x)(x \cdot 1 = 1)$; ђ) $\neg(\exists x)(x \geq 2)$;

е) $(\exists x)(x < 5 \wedge x > 10)$; ж) $\neg(\forall x)(x > 10 \vee x < 5)$.

22. Испитати тачност формуле у скупу природних бројева:

а) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$; б) $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$; в) $(\forall x)(\exists y)(x > y)$;

г) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$;

д) $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = x)$.

23. Испитати које од следећих формула су тачне у скупу реалних бројева:

а) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(xz + y = 0)$; б) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(xz + y \neq 0)$;

в) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(xz + y = 0)$; г) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(xz + y \neq 0)$;

д) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x(xz + y) = 0)$; ђ) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(x + y = x + z)$.

24. Написати негације следећих реченица

а) $(\forall x)(x = 0)$; б) $(\exists x)(x^2 < 0)$;

в) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$; г) $(\exists x)(x$ је цео број $\wedge\ x + 5 > 0)$;

д) $(\exists x)(x$ је природан број $\wedge\ x > 0)$;

ђ) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Z})$.

25. Користећи логичке операције, записати следеће реченице:

а) z је најмањи заједнички садржалац за x и y;

б) x је потпун квадрат;

в) постоји највише један број чији је квадрат нула;

г) постоји тачно један број чији је квадрат нула;

д) постоје највише два различита броја, чија је апсолутна вредност једнака 3;

ђ) ниједан прост број није једнак 1;

е) између свака два различита рационална броја постоји рационалан број;

ж) постоји најмањи природан број;

з) ван сваке праве постоји бар једна тачка;

и) две мимоилазне праве не припадају истој равни;

ј) за свако x постоји највише једно $y \geq 0$ тако да је $x^2 = y$.

1.3. СКУПОВИ И СКУПОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

Уобичајено је да се користе ознаке:

$a \in A$–елемент a припада скупу A;

$a \notin A$–елемент a не припада скупу A;

$A = \{a|\alpha(a)\}$– скуп свих елемената за које важи $\alpha(a)$;

$\emptyset$–празан скуп, тј. скуп без елемената;

$A = B$–скупови A и B су једнаки ако и само ако су сви елементи једног скупа елементи и другог и обрнуто, тј: $A = B$ акко $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$;

$A \subset B$–скуп A је подскуп скупа B ако и само ако $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Најважније скуповне операције: *пресек*, *унија*, *разлика* и *комплемент* дефинишу се на следећи начин:

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$
$$A' = \{x|x \notin A\}.$$

Партитивни скуп $P(A)$ скупа A је скуп свих подскупова скупа A.

Ако су елементи двочланог скупа $\{a, b\}$ поређају у низ, тј. одреди се који је елемент први, а који други, добија се *уређени пар*. Уређени пар чији је први елемент a, а други b означава се (a, b).

За уређене парове важи:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{ акко } a_1 = a_2 \ \wedge \ b_1 = b_2.$$

> ***Декартов производ*** скупова A и B је скуп $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
>
> На сличан начин дефинишу се уређене тројке, четворке, ..., n-торке елемената и Декартови производи три, четири, ..., n-скупова.

26. Дати су скупови $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, c, e\}$. Одредити скупове $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

27. Дати су скупови $A = \{m, n, p, q\}$, $B = \{m, n, r\}$, $C = \{m, p, q\}$. Одредити скупове:

а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A \cap C) \cup B$; в) $(A \setminus B) \setminus C$.

28. Дати су скупови $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 \leq 4\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge x - 2 < 3\}$, $C = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge x | 12\}$, $D = \{x | x$ је прост број $\wedge\ x < 8\}$, $E = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge |x| \leq 3\}$, $F = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge |x| \leq 4\}$. Одредити скупове:

а) $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$; б) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$;

в) $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$; г) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D)$;

д) $(E \cap C) \cup (F \cap D)$; ђ) $(B \setminus C) \cup (F \setminus A)$;

е) $(E \cap F) \setminus (D \cap B)$; ж) $(F \setminus D) \cap (B \setminus E)$.

29. Дати су скупови $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ и $B = \{b, c, e, f, g\}$. Одредити скуп X који задовољава услове $A \cap X = \{c, d\}$ и $B \cup X = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

30. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. Одредити онај скуп X за који важи $A \cup X = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ и $A \cap X = \{3, 6\}$.

31. Одредити скупове A и B ако је $A = \{x \in \mathbf{R} | 4x - 1 < 2x + 1\}$ и $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x \leq 4x - 6\}$, а затим скупове $A \cap \mathbf{N}$ и $B \cap \mathbf{N}$, при чему је $\mathbf{N}$ скуп природних, а $\mathbf{R}$ скуп реалних бројева.

32. Ако су $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b) уобичајене ознаке за затворене, полуотворене и отворене интервале на бројној оси, израчунати:

а) $[0, 3] \cap (1, 7)$; б) $(-5, 2] \cup (2, 4)$;

в) $(-\infty, 0) \cup (-2, 3)$; г) $(-\infty, -1) \cap (-2, +\infty)$;

д) $((-\infty, -1) \cup (1, +\infty)) \cap (-2, 2)$; ђ) $((-5, 4] \cup (7, 9]) \cap (0, 10]$;

е) $((-\infty, 3) \cap [0, +\infty)) \cup (-5, 5]$; ж) $((-2, 0] \cup (2, +\infty)) \cap [-1, 3)$.

33. Одредити партитивне скупове следећих скупова:

а) $A = \{a\}$; б) $B = \{a, b\}$; в) $C = \{a, b, c\}$.

34. Решити „једначину”:

а) $x \in a$; б) $x \subset a$,

при чему је $a = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$.

35. Одредити скупове $A = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge 1 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge -5 < 3x - 1 \leq 2\}$ и $C = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge 2|x| + 5 \leq 9\}$, а затим скупове $A \cap B$, $B \setminus C$, $B \cup C$, $(B \cap C) \cup (A \setminus C)$.

36. Доказати да важи:

а) $A \cup A = A$; б) $A \cap A = A$;

в) $A \cup B = B \cup A$; г) $A \cap B = B \cap A$;

д) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; ђ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

е) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; ж) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

з) $A \cup (A \cap B) = A$; и) $A \cap (A \cup B) = A$;

ј) $(A \cup B)' = A' \cap B'$; к) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

л) $A \cap A' = \emptyset$; м) $A \cup \emptyset = A$;

н) $A \cap \emptyset = \emptyset$; њ) $A \cap B \subset A \cup B$.

37. Доказати да важи:

а) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$;

б) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B')$;

в) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$;

г) $(A \cup B') \cap (A' \cup B) = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$;

д) $(A \cup B') \cap (A' \cup B') = B'$.

38. Доказати да важи:

а) $\emptyset \setminus A = \emptyset$; б) $A \setminus \emptyset = A$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$; ђ) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

е) $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$;

ж) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; з) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

39. Дати су скупови $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{x, y\}$ Одредити скупове: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ и $B \times B$.

40. Представити графички скуп $X \times Y$, ако је

а) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$;

б) $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 2\}$.

41. Дат је скуп $A \times B = \{(m, 0), (m, 1), (n, 0), (n, 1), (p, 0), (p, 1)\}$. Одредити скупове A и B.

42. Дати су скупови:

а) $E_1 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x + 2y = 10\}$, $E_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x + y = 3\}$;

б) $E_1 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, 3x + 2y = 10\}$, $E_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x + 2y = 5\}$.

Одредити $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$, и $E_1 \times E_2$.

43. Доказати да важи:

а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

б) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

в) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

г) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

д) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

ђ) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

44. Унија два скупа има 15 елемената, један од њих има 8, а њихов пресек 5 елемената. Колико елемената има други скуп?

45. У преводилачкој агенцији раде 52 преводиоца. Међу њима 20 говори руски, 19 француски, а 35 енеглески. Даље, познато је да руски и енглески говори 11 преводилаца, француски и руски 7, а француски и енглески њих 9.

а) Колико преводилаца говори сва три језика?

б) Колико њих говори само руски?

46. Сваки ученик једне школе учи бар један од три страна језика (енглески, руски, француски) и то: 280 ученика учи енглески језик, 230 француски, 230 руски, 120 енглески и француски, 110 енглески и руски, 80 учи француски и руски, а 50 ученика учи сва три језика. Колико у тој школи има ученика?

1.4. РЕЛАЦИЈЕ

Бинарна релација скупа A је сваки подскуп ρ скупа $A \times A$. Ако је $(a, b) \in \rho$ (ово се пише и $a\rho b$) кажемо да су елементи a и b у релацији ρ.

Релација скупа **A** је:

(P) рефлексивна, ако је $(\forall x \in A)(x\rho x)$;

(C) симетрична, ако је $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$;

(A) антисиметрична, ако је $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$;

(T) транзитивна, ако је $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

Релацију $\sim$ која је рефлексивна, симетрична и транзитивна називамо *релација еквиваленције*. Ако је $\sim$ релација еквиваленције на скупу A, тада скуп $C_a = \{x | x \in A, a \sim x\}$, где је $a \in A$ називамо *класом еквиваленције* елемента a. При томе важи:

(1) $\forall a \in A\ C_a \neq \emptyset$;

(2) ако је $a \sim b$, онда је $C_a = C_b$;

(3) ако није $a \sim b$, онда је $C_a \cap C_b = \emptyset$.

Релацију $\prec$ која је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна називамо *релацијом поретка*.

47. На скупу $\{a, b, c\}$ дата је релација $\rho = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$. Направити таблицу и нацртати граф релације ρ.

48. Да ли је релација ρ одређена таблицом

ρ	1	2	3
1	$\bot$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\bot$	$\bot$
3	$\top$	$\top$	$\top$

релација еквиваленције или поретка?

49. У скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ уведена је релација

$$x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; (x+y=3 \wedge x-y=1).$$

Нацртати таблицу ове релације.

50. У скупу $\{0,1,2,3,4\}$ дефинисана је релација

$$x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; y=x-1.$$

Одредити елементе релације ρ, нацртати њен граф и таблицу. Која од својстава рефлексивност, симетрија, транзитивност има релација ρ?

51. У скупу $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ уведене су релације:

а) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x+y=8$; б) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x=3y$.

Нацртати граф релације и испитати која од својстава рефлексивност, симетрија, антисиметрија, транзитивност имају ове релације.

52. Испитати која од својстава рефлексивности, симетричности, антисиметричности и транзитивности имају релације:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x^2-xy+y^2=1$; б) $x\rho y \Leftrightarrow x^2 \le y^2$

у скупу реалних бројева.

53. На скупу $A=\{0,1,2,3\}$ дефинисана је релација ρ:

а) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x+y<2$; б) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x+y>3$;

в) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x+y\le 2$; г) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x+y\ge 3$.

Направити таблицу за релацију ρ и испитати која од својстава: рефлексивност, симетрија, антисиметрија и транзитивност има релација ρ.

54. На скупу $A=\{1,2,3,4\}$ дефинисана је релација:

а) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x>y+1$; б) $x\,\rho\,y \;\Leftrightarrow\; x<y-1$.

Направити таблицу за релацију ρ и испитати која од својстава: рефлексивност, симетрија, антисиметрија и транзитивност има релација ρ.

55. У скупу једначина

$$J=\left\{x+2=0,\; x+1=0,\; 2x+4=0;\; \frac{x}{2}=\frac{-1}{2},\; x^2=4,\; 2x+2=-2\right\}$$

уведена је релација $j_1 \sim j_2 \;\Leftrightarrow\;$ једначине j_1 и j_2 су еквивалентне. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и одредити класе.

56. У скупу $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ дефинисана је релација $x \rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Доказати да је ρ релација еквиваленције и одредити класе.

1.5. ФУНКЦИЈЕ

Пресликавање (функција) скупа A у скуп B у ознаци $f: A \to B$ је релација $f \subset A \times B$ која има својство да је сваки елемент скупа A у релацији f са тачно једним елементом скупа B.

За пресликавање $f: A \to B$ кажемо да је 1-1 ако важи

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

или, што је еквивалентно

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Пресликавање $f: A \to B$ је НА ако

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)).$$

Ако су $f: A \to B$ и $g: B \to C$ пресликавања, тада је $g \circ f: A \to C$ *производ* (композиција) пресликавања f и g и дефинисан је условом

$$(\forall x \in A)((g \circ f)(x) = g(f(x))).$$

Нека је $f: A \to B$ 1-1 и НА пресликавање. Тада постоји *инверзно пресликавање* $f^{-1}: B \to A$, тако да је

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

57. Дат је скуп $A = \{a, b, c, d\}$.

а) Да ли су скупови

$$f = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \text{ и}$$

$$g = \{(a, c), (b, a), (c, a), (d, d)\}$$

пресликавања A у A?

б) Одредити $f(f(a))$, $f(f(b))$, $f(f(f(d)))$, $g(f(g(a)))$, $g(g(c))$.

в) Решити једначину $f(x) = g(x)$.

58. Нека су f, g функције

$$f(x) = 2 + 3x, \qquad g(x) = 2 + x, \qquad x \in \mathbf{N}.$$

а) Наћи $f(1)$, $f(2)$, $g(1)$, $g(2)$, $f(g(1))$, $g(f(1))$;

б) Решити једначине $f(x) = 17$, $f(x) = g(x)$, $g(g(x)) = 10$;

в) Наћи $f(2x)$, $g(3x)$, $g(f(x))$, $f(g(x))$.

59. Нека је $f(x) = 2x - 1$. Одредити:

а) $f(0)$; б) $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$; в) $f(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2})$;

г) $f(1 - \frac{9}{16})$; д) $f(\frac{16}{3} : (8 + \frac{1}{3}))$; ђ) $f(\frac{1,5 - 2,2}{2\sqrt{0.49}})$;

е) $f(x + 1)$; ж) $f(x - 1)$; з) $f(2x)$.

60. Одредити сва пресликавања скупа $\{a, b\}$ у скуп $\{1, 2, 3\}$ и сва пресликавања скупа $\{1, 2, 3\}$ у скуп $\{a, b\}$.

61. Нека је $\mathcal{A}$ скуп свих дужи у равни, а $\mathcal{B}$ скуп свих тачака те равни и $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ дефинисано тако да се свакој дужи AB придружи средиште те дужи. Да ли је f 1-1 и НА?

62. Нека је $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, тако дефинисано да је $f(x)$ збир цифара броја x.

а) Одредити: $f(5)$, $f(12)$, $f(253)$, $f(f(253))$;

б) решити једначину $f(x) = 5$;

в) да ли је f 1-1 и НА?

63. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $f\colon A \to A$. Које од следећих функција су 1-1, а које НА:

а) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ в) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

г) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ д) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ђ) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

64. Дата су пресликавања:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & d & b \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \text{ и } l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Одредити инверзна пресликавања f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}, j^{-1}, k^{-1} и l^{-1}.

65. Нека је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Доказати да је f 1-1 и НА пресликавање и одредити инверзну функцију f^{-1}:

а) $f(x) = 7x - 1$; б) $f(x) = 2x + 3$; в) $f(x) = \frac{5x - 2}{4}$;

г) $f(x) = 5x - \frac{1}{2}$; д) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{12}$; ђ) $f(x) = \frac{x + 2}{3}$.

66. Испитати да ли следеће функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имају својства 1-1 и НА.

а) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; б) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}, x \neq -2$;в) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

67. Ако је $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 5x + 3$, одредити $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ и $g \circ g$.

68. Нека је $f(x) = 1 + 2x$, $g(x) = 1 + x^2$. Наћи $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $g^3 = (g \circ g \circ g)$, $f \circ g^3$.

69. Нека су $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

а) $f(x) = x - 1$, $g(x) = |\, x \,|$; б) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$.

Одредити $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(1)$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

70. Нека је $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Доказати да је

а) $g \circ h = f$; б) $f \circ h = g$;

в) $((f \circ g) \circ h)(x) = x$; г) $((g \circ f) \circ h)(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $x \neq 0$.

71. Ако је $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, израчунати $f(2)$.

72. Решити „функционалне" једначине над $\mathbf{R}$:

а) $g\left(\dfrac{3x-1}{x}\right) = 2x$; б) $f(1-x) = x + 1$; в) $h(x^2) = \dfrac{4}{x}$.

73. Одредити $f(x)$ ако је:

а) $f\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = x + 1$; б) $f\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) = x - 8$;

в) $f\left(\dfrac{x}{5} + 1\right) = x + 4$; г) $f\left(\dfrac{x}{7} - 3\right) = x - 19$;

1.6. ЕЛЕМЕНТИ КОМБИНАТОРИКЕ

Нека су $A_1, A_2, \ldots A_n$ непразни коначни скупови. Означимо са $|A|$ број елемената скупа A.

Правило збира. Ако је за све $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, тада је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Правило производа. Број елемената Декартовог производа је

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

74. а) Колико се троцифрених бројева завршава цифром 3?

б) Колико има троцифрених бројева дељивих са 5?

75. Колико има четвороцифрених бројева, код којих је збир цифара 10, а цифра десетица једнака 5?

76. На правој p дато је пет разних тачака A, B, C, D, E. Колико има и које су то дужи чији су крајеви дате тачке?

77. Нека је $A = \{m, n, p\}$ и $B = \{a, b\}$. Колико има различитих пресликавања скупа A у скуп B?

78. У купеу једног воза налазе се две клупе, окренуте једна према другој са по пет места. Од десет путника, четири жели да седи у смеру кретања воза, троје у супротном смеру, а преосталима је свеједно. На колико начина се путници могу распоредити на места у купеу?

79. Дат је скуп тачака међу којима никоје три тачке нису колинеарне. Колико тачака садржи тај скуп ако је број правих одређених тим тачкама два пута већи од броја тачака?

80. Колико има десетоцифрених бројева дељивих са 25, код којих се цифре не понављају, не почињу цифром 0, а цифра стотина им је:

а) 0 или 5; б) 2 или 3?

81. Из града A у град B води 6 путева, а из града B у град C три пута. Из града A може се стићи у C једино ако се пролази кроз B. На колико различитих начина може да се путује из града A у град C?

82. Да би се стигло из места A до места D може се проћи кроз место B или кроз место C. Од места A до B воде три директна пута, од A до C - четири, од B до C - три, од B до D - два и од C до D - три директна пута. Колико има могућих путева од A до D?

83. Од трга A до трга B воде две једносмерне улице пресечене са 7 двосмерних улица. На колико начина возач може стићи са трга A на трг B?

84. Нека скуп A има n елемената, а скуп B m елемената ($m, n \in \mathbf{Z}$ $m, n \geq 0$). Колико елемената могу имати скупови $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$?

85. Дата је таблица:

Т Р О У Г А О
Р О У Г А О
О У Г А О
У Г А О
Г А О
А О
О

На колико разних начина се може прочитати реч „троугао" ако се чита по једно слово слева на десно или одозго на доле?

86. На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 различитих топова тако да се никоја два међусобно не туку (никоја два се не налазе у истој врсти или истој колони)?

87. Колико различитих делилаца има број 2400?

88. Колико има петоцифрених бројева који се завршавају двема истим цифрама?

89. Колико има различитих аутомобилских таблица које се састоје из два слова азбуке (од 30 слова) и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999)?

90. Колико има петоцифрених бројева дељивих са 4, а у чијим записима не учествују цифре 0, 2, 4, 6?

91. У једној комисији има седам чланова. На колико начина се могу изабрати председник, секретар и записничар те комисије?

92. Дати су четворочлани скупови $A = \{a, b, c, d\}$ и $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Колико има 1-1 и НА пресликавању $f: A \to M$?

93. У равни је дато 12 тачака обијених плавом и 9 обојених црвеном бојом, од којих никоје три не припадају једној правој. Колико има троуглова са теменима у датим тачкама код којих нису сва три темена исте боје?

94. Дате су три праве и на свакој од њих по пет тачака, Колико највише има троуглова чија су темена дате тачке?

95. У равни α су дата два скупа паралелних правих: $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_5$. Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је различитих паралелограма одређено овим правим?

96. Колико на шаховској табли (квадратна мрежа 8×8) има правоугаоника?

97. На колико начина 8 ученика може сести на:

а) 6 различитих столица; б) 12 различитих столица?

98. Колико има четвороцифрених природних бројева написаних помоћу цифара 0, 1, 3, 5, 7, 9 таквих да се:

а) цифре могу понављати; б) цифре не могу понављати;

в) цифре могу понављати и број је дељив са 5;

г) цифре не могу понављати и број је дељив са 5?

99. Колико има шестоцифрених природних бројева код којих је прва цифра паран, друга непаран број, трећа цифра број дељив са три, четврта прост, пета сложен број и последња цифра број који је дељив са 5? (Напомена. Бројеви 0 и 1 нису ни прости ни сложени.)

100. Колико има 100–цифрених природних бројева који се могу записати помоћу цифара 0, 2 и 3?

101. У једној држави регистарске таблице на аутомобилима се састоје од шестоцифреног броја (од 000000 до 999999) и једног великог штампаног слова које се исто пише и чита и ћирилицом и латиницом, осим слова "О". Колико различитих регистарских таблица може постојати у тој држави?

102. Колико има троцифрених бројева код којих је прва цифра паран број, а последња цифра непаран број?

103. На полици се налази 15 књига, од којих су 7 на руском, 3 на енглеском и 5 на француском језику. На колико различитих начина се могу распоредити књиге на полици, ако се књиге на истом језику морају налазити једна уз другу?

104. Колико се шестоцифрених бројева може саставити од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5 уз услов да се свака цифра појављује тачно једном и да су парне цифре једна уз другу. (Напомена: 0 је парна цифра.)

1.7. ДОДАТАК УЗ ПРВУ ГЛАВУ

105. Испитујући да ли за неке вредности својих исказних слова дата формула може имати истинитосну вредност $\perp$, доказати да је та формула таутологија:

а) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$;

б) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$;

в) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r))$;

г) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$;

д) $((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n)) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_n)$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$;

ђ) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$.

106. Доказати да су следеће формуле таутологије ($n \in \mathbf{N}$):

а) $[p \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \cdots p_n)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow p_1) \vee (p \Rightarrow p_2) \vee \cdots (p \Rightarrow p_n)]$;

б) $[p \Rightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots p_n)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow p_1) \wedge (p \Rightarrow p_2) \wedge \cdots (p \Rightarrow p_n)]$;

в) $[(p_1 \vee p_2 \vee \cdots p_n) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow p) \wedge (p_2 \Rightarrow p) \wedge \cdots (p_n \Rightarrow p)]$;

г) $[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots p_n) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow p) \vee (p_2 \Rightarrow p) \vee \cdots (p_n \Rightarrow p)]$.

107. Доказати да је формула
$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$
таутологија и користећи је решити систем једначина $xy = 0$, $yz = 0$, $zx = 0$.

108. Операција „симетрична разлика" скупова дефинише се на следећи начин:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Доказати да за ову операцију важи:

а) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

б) $A \triangle B = B \triangle A$;

в) $A \triangle A = \emptyset$;

г) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;

д) $A \triangle (A \triangle B) = B$;

ђ) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;

е) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

ж) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

з) $(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$.

109. Наћи све скупове X за које је $A\Delta X = B$, ако је

а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e\}$; б) $A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$.

110. Означимо са $P(A)$ партитивни скуп скупа A - тј. скуп свих подскупова скупа A: $P(A) = \{B|B \subset A\}$.

а) Одредити $P(\{1, 2\})$;

б) Одредити $P(\emptyset)$, $P(\{\emptyset\})$, $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$;

в) Доказати $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;

г) Доказати $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

111. Ако из $S \subset A \cup B$ следи $S \subset A$, или $S \subset B$, доказати да је $A \subset B$, или $B \subset A$.

112. Решити „скуповне једначине":

а) $\{1, 2\} \cap X = \{1, 2, 3\}$; б) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$;

в) $\{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 2\}$.

113. Одредити све скупове X који задовољавају услове:

а) $X \setminus \{2\} \subset \{0, 1\}$; б) $\{0\} \subset \{0, 1, 2\} \setminus X$ и $X \subset \{0, 1, 2, 3\}$.

114. Да ли су следећа тврђења тачна за све скупове A, B, C:

а) $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$; б) $A \subset B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$?

115. Да ли постоје такви скупови A, B, C да је $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

116. Наћи све подскупове A и B скупа C тако да за сваки подскуп $X \subset C$ важи $X \cap A = X \cup B$.

117. На једном скупу, међу 20 учесника, 16 говори енглески, 15-француски, а 17-немачки језик. Доказати да бар осам учесника говори сва три језика.

118. У скупу $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ дефинисане су релације

а) $(a, b)\rho_1(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$;

б) $(a, b)\rho_2(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$, $b, d \neq 0$.

Доказати да су ρ_1 и ρ_2 релације еквиваленције и наћи класе.

119. У скупу целих бројева уведена је релација $a \equiv b\,(mod\, m) \Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow a - b = m \cdot k$, где је $m \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{Z}$. Доказати да је конгруенција по модулу m ($\equiv (mod\, m)$) релација еквиваленције и наћи класе.

120. Нека је ρ релација неког скупа A и нека је ρ^{-1} релација истог скупа дефинисана на следећи начин

$$x\,\rho^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,\rho\,x,\ x, y \in A.$$

а) Ако је ρ релација еквиваленције, доказати да је и ρ^{-1} релација еквиваленције.

б) Ако је ρ релација поретка, доказати да је и ρ^{-1} релација поретка.

121. Дат је неки скуп A и једна његова рефлексивна релација ρ, за коју важи:

$$(\forall x, y, z \in A)\ (x\rho z \ \wedge\ y\rho z \ \Rightarrow\ x\rho y).$$

Доказати да је тада

а) ρ - симетрична; б) ρ - транзитивна.

122. Дата је функција $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$. Испитати да ли је f бијекција (1-1 и НА пресликавање):

а) $f\left(\dfrac{2x-3}{x}\right) = \dfrac{4x-9}{2x-3}$; б) $f\left(\dfrac{3x}{2x+1}\right) = \dfrac{2x-1}{x}$;

в) $f\left(\dfrac{5-2x}{4x}\right) = \dfrac{6x+25}{5-2x}$; г) $f\left(\dfrac{3x}{1-2x}\right) = \dfrac{1}{x}$.

123. Дата је функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, x<0 \vee x>1 \\ x^2+1, 0 \le x \le 1 \end{cases}$, б) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, 0 \le x \le 1 \\ x-1, x<0 \vee x>1 \end{cases}$;

Доказати да је f 1-1 и НА пресликавање и одредити $f^{-1}(x)$.

124. Дате су функције:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ x, x \ge 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ -x^2, x \ge 0 \end{cases}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 0 \\ 0, x>0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, x \le 0 \\ 0, x>0 \end{cases}$.

Наћи $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ и $g \circ g$.

125. Нека су $f\colon B \to C$ и $g\colon A \to B$ 1-1 и НА пресликавања. Доказати да је и $h = f \circ g\colon A \to C$ такође 1-1 и НА пресликавање.

126. Доказати да ако функција $f(x)$ задовољава релацију

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$$

тада је $f(x) = 0$ за све $x \ne 0$, $x \ne 1$.

127. Ако је:

а) $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = x$, наћи $f(x)$.

б) $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) + 3f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = x$, наћи $f(x)$.

128. Одредити $f \circ g$ и $g \circ f$, ако важи:

а) $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2g\left(\frac{x-1}{x}\right) = x - 2$, $f\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$, за $x \neq 0$;

б) $f\left(\frac{x}{x-1}\right) + g(2x+1) = 2x$, $f\left(\frac{x}{x-1}\right) - g(2x+1) = x$, за $x \neq 1$.

129. Колико има четвороцифрених бројева који се записују са највише два знака?

130. Колико има седмоцифрених бројева чији је збир цифара паран?

131. У једном насељу свака улица сече сваку улицу и не постоје три улице које се секу у истој раскрсници. Број раскрсница је 21.

а) Колико има улица у том насељу?

б) Колико има стамбених четврти ограничених са свих страна улицама?

132. Колико има целих бројева између 100 и 10 000 код којих су тачно три цифре једнаке?

Марина I 7

Глава II

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

2.1. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Скуп природних бројева је $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. На скупу $\mathbf{N}$ дефинисане су операције сабирања и множења. Уобичајена је ознака $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Скуп целих бројева је $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Осим операција сабирања и множења на скупу $\mathbf{Z}$ је дефинисана и операција одузимања.

За два цела (или природна) броја m и n, $n \neq 0$ се каже да је *број m дељив бројем n* у ознаци $n|m$ ако постоји цео број k такав да је $m = n \cdot k$.

Природан број $n \neq 1$ је *прост* ако су једини његови природни делиоци 1 и n. Природан број $n \neq 1$ је *сложен* ако није прост. Број 1 (по дефиницији) није ни прост ни сложен.

Најмањи заједнички садржалац природних бројева m и n је најмањи природан број дељив и са m и n. Означава се са НЗС(m, n).

Највећи заједнички делилац природних бројева m и n је највећи природан број који се садржи и у m и n. Означава се са НЗД(m, n). Ако је НЗД$(m, n) = 1$ за бројева m и n се каже да су *узајамно прости.*

133. Одредити највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац за следеће бројеве:

а) 180 и 2100; б) 46, 69 и 92;

в) 770, 1078 и 1452; г) 165, 220, 234 и 1014.

134. Израчунати:

а) НЗД(1080, 1260, 3150); б) НЗС(24, НЗД(90, 126));

в) НЗД(НЗС (24, 90), НЗС (24, 126)).

135. Наћи најмањи природан број којим треба помножити број 5880 да би се добио: а) квадрат природног броја; б) куб природног броја.

136. Доказати да је број $m^3 - m$ дељив са 6 за сваки цео број m.

137. Доказати да је број $m^5 - m$ дељив са:

а) 5; б) 30

за сваки цео број m.

138. Доказати да је за све $n \in \mathbf{N}$

а) $6|2n^3 - 3n^2 + n$; б) $3|n^3 + 3n^2 + 5n + 3$;

в) $6|n^3 + 5n$; г) $48|n^3 + 20n$ (n-паран број).

139. Да ли постоји природан број са тачно: а) једним; б) два; в) три природна делиоца?

140. Ниједан природан број чији је збир цифара 1995 не може бити потпун квадрат. Доказати.

141. Одредити последњу цифру броја а) 77^{77}; б) 7^{777}.

142. Доказати да је број $9^{44} + 4^{99}$ дељив са 5.

143. Доказати да је збир било ког двоцифреног природног броја и броја написаног истим цифрама, али обрнутим редом, дељив са 11.

144. а) Наћи најмањи природан број који при дељењу са 2,3,4,5 и 6 даје редом остатке 1,2,3,4 и 5.

б) Одреди најмањи природан број дељив са 7 који при дељењу са 3,4,5 и 6 редом даје остатке 1,2,3,4.

145. Колико има троцифрених бројева дељивих бројем 11 код којих је збир цифара једнак 14?

146. Ако је производ три цела броја непаран број, доказати да је њихов збир такође непаран.

147. За које целе бројеве n је израз $\dfrac{3n+15}{n+2}$ природан број?

2.2. РАЦИОНАЛНИ И ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Скуп свих бројева облика $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ назива се скупом *рационалних бројева* и означава са $\mathbf{Q}$. У скупу $\mathbf{Q}$ дефинисане су операције сабирања, одузимања, множења и дељења (при чему је делилац различит од нуле).

Број који се може написати у облику $n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n}$ ($n_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $n \in \mathbf{N}$) или њему супротан број, назива се *децимални број*.

Децимални запис броја x је бесконачан низ облика $n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$

Карактеристика децималног записа рационалног броја је у томе што се после неке децималне цифре, цифра иза ње, или група цифара понављају. Бројеви код којих то није случај су *ирационални* и они се не могу представити у облику разломка $\frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$.

148. Израчунати вредност израза:

а) $\left(-2\frac{1}{2}\right) + 5\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}$;

б) $\dfrac{3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{2} - 4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$;

в) $3 : \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5} : 2\right) + 5 \cdot \left[0,4 - \frac{2}{5} : (-2)\right] + (-2) : (-1)$;

г) $2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-8) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^3 + \frac{2}{3} \cdot (-9) \cdot \left[2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2$.

149. Написати девет рационалних бројева који су већи од $\frac{1}{4}$, а мањи од $\frac{1}{3}$.

150. Одредити четири разломка a, b, c, d са једноцифреним имениоцима тако да буде $\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}$.

151. Написати у облику разломка бројеве:

а) 0,58; б) 2,3; в) -3,45; г) -2,071.

152. Написати бесконачан децималан запис за бројеве $1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{1}{7}$.

153. Написати у облику разломка следеће бесконачне децималне бројеве:

а) 0,2(3); б) 0,(2); в) 4,9(6); г) 0,(45);

д) -2,2(31); ђ) 0,15(74); е) 29,(119); ж) 0,(142857).

(Запис, на пример, 2,310(245) означава да се ради о бесконачном децималном броју код кога се блок цифара 245 после 0, неограничено понавља.)

154. Ако су a, b, c, d рационални бројеви, доказати да из $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ следи да је $a=c$ и $b=d$.

155. Између која два узастопна цела броја се налази број $a=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$?

156. Доказати да су: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; д) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; ђ) $(1+\sqrt{2})^2$; е) $(\sqrt{3}-2)^2$ ирационални бројеви.

157. Ако су a, b-ирационални, а r рационалан број и a, b, $r\geq 0$ испитати природу бројева:

а) $a+b$; б) $a+r$; в) $\sqrt{a}$; г) $\sqrt{r}$;

д) ab; ђ) ar; е) $\sqrt{a+r}$; ж) $\sqrt{r+\sqrt{a}}$.

158. Доказати да ако су бројеви a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рационални, онда су и бројеви $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ рационални.

159. Ако су α и β ирационални бројеви, а $\alpha+\beta$ рационалан, доказати да су бројеви $\alpha-\beta$ и $\alpha+2\beta$ ирационални.

160. Одредити све рационалне бројеве a и b тако да важи:

а) $b=(a+\sqrt{3})(4-a-\sqrt{3})$; б) $a=(b-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}-b)$.

161. Нека је a рационалан број различит од нуле. Доказати да су бројеви:

а) $(3a+\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$; б) $(2a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$

ирационални.

2.3. УРЕЂЕНО ПОЉЕ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Уређено поље реалних бројева је структура $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ у коме су дефинисане операције сабирања и множења и релација мање или једнако тако да важи:

(P1) $(\forall x, y, z\in\mathbf{R})(x+(y+z)=(x+y)+z)$;

(P2) $(\forall x, y\in\mathbb{R})(x+y=y+x)$;

(P3) $(\forall x\in\mathbf{R})(x+0=x)$;

(P4) $(\forall x\in\mathbf{R})(\exists(-x)\in\mathbf{R})(x+(-x)=0)$;

(P5) $(\forall x, y, z\in\mathbf{R})(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$;

(P6) $(1\neq 0)\wedge(\forall x\in\mathbf{R})(x\cdot 1=x)$;

(P7) $(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbf{R})(x \cdot x^{-1} = 1)$;

(P8) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(x \cdot y = y \cdot x)$;

(P9) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$;

(P10) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(x \leq y \vee y \leq x)$;

(P11) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$;

(P12) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$;

(P13) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;

(P14) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$;

(P15) Сваки непразан, ограничен одозго скуп $S \subset \mathbf{R}$ има супремум.

При томе је скуп $S \subset \mathbf{R}$ *ограничен одозго* ако постоји бар један реалан број m (мајоранта или горња међа скупа S) такав да за сваки $x \in S$ важи $x \leq m$, а *супремум* скупа S је реалан број s такав да је он најмања мајоранта скупа S.

У скупу реалних бројева дефинише се апсолутна вредност броја x (означава се $|x|$) на следећи начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако је } x > 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0, \\ -x, & \text{ако је } x < 0. \end{cases}$$

162. Који од следећих скупова су ограничени одозго:

а) A - скуп простих бројева;

б) B - скуп троцифрених природних бројева;

в) C - скуп негативних реалних бројева;

г) $D = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 2 \vee x > 1\}$;

У случају да је скуп ограничен одозго одредити бар једну мајоранту.

163. Одредити супремуме следећих скупова (ако постоје):

а) $M_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$; б) $M_2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$;

в) $M_3 = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$; г) $M_4 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots\}$;

д) $M_5 = \{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots\}$;

ђ) $M_6 = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \ldots\}$;

е) $M_7 = \{x \in \mathbf{R} | x < 0\}$.

164. Нека је x реалан број. Израчунати:

а) $\dfrac{x+|x|}{2}$; б) $\dfrac{x-|x|}{2}$; в) $\dfrac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$.

165. Наћи све реалне бројеве x такве да је:

а) $|x| < 1$; б) $\frac{1}{3} < |x| \leq 3$; в) $|x| \geq 2$; г) $|x-2| < 1$.

166. Наћи све реалне бројеве x такве да важи:

а) $|x-3| = 5$; б) $|2x+1| = 4$; в) $|3-5x| = 2$;

г) $|6+2x| = 8$; д) $|6+2x| \leq 8$; ђ) $|6+2x| \geq 8$;

е) $|3-x| \leq 5$; ж) $|2x-1| > 3$; з) $|\frac{7}{2} - 3x| < \frac{1}{2}$;

и) $|3x - \frac{2}{3}| > \frac{4}{3}$; ј) $||x|-1| \leq 2$; к) $||2x+1|-5| > 2$.

167. Доказати да је

а) $\frac{1}{2}(|x-y|+x+y) = \max\{x, y\}$; б) $-\frac{1}{2}(|x-y|-(x+y)) = \min\{x, y\}$,

при чему је $\max\{x, y\}$ ознака за већи, а $\min\{x, y\}$ ознака за мањи од бројева x, y.

168. Користећи дефиницију апсолутне вредности реалног броја доказати:

а) $|ab| = |a||b|$; б) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

169. Проверити једнакости:

а) $|2\cdot(-7)| = |2|\cdot|-7|$; б) $|\frac{2}{-7}| = \frac{|2|}{|-7|}$; в) $|\frac{-3}{-1}| = \frac{|-3|}{|-1|}$;

г) $|(-3)\cdot(-1)| = |-3|\cdot|-1|$; д) $|-\frac{1}{2}\cdot 4| = |-\frac{1}{2}|\cdot|4|$.

2.4. ПРИБЛИЖНЕ ВРЕДНОСТИ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Заокругљивање децималних бројева на n децимала врши се по следећим правилима:

(1) Ако је $n+1$-ва децимала мања од 5, онда првих n децимала остају непромењене.

(2) Ако је $n+1$-ва децимала већа од 5, онда се та n-та децимала увећава за један, а првих $n-1$ децимала или остају непромењене (ако је та n-та децимала била мања од 9) или се на одговарајући начин мењају (ако је n-та децимала била једнака 9).

(3) Ако је $n+1$-ва цифра једнака 5 и бар једна цифра после ње није једнака нули, онда се n-та цифра увећава за 1.

(4) Ако је $n+1$-ва цифра једнака 5 и све цифре иза ње су нуле, онда се та n-та цифра не мења ако је парна, а увећава за један, ако је непарна.

Нека је x реалан број и x' приближна вредност тачног броја x.

Апсолутна грешка приближног броја x' је број $\Delta(x') = |x - x'|$.

Релативна грешка приближног броја x' је број $\delta(x') = \dfrac{\Delta(x')}{|x|}$, $x \neq 0$.

Нека је $|x - x'| \leq \varepsilon$, онда се број ε назива *граница апсолутне грешке*, а број $\dfrac{\varepsilon}{|x|}$ *граница релативне грешке*.

Ако је $x = x' \pm \varepsilon_1$ и $y = y' \pm \varepsilon_2$, тада је

(1) $|(x+y) - (x'+y')| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

(2) $|(x-y) - (x'-y')| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

(3) $|xy - x'y'| \leq |x'|\varepsilon_2 + |y'|\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$;

(4) $|\dfrac{x}{y} - \dfrac{x'}{y'}| \leq \dfrac{|x'|\varepsilon_2 + |y'|\varepsilon_1}{|y'|\,||y'| - \varepsilon_2|}$, $y' \neq 0, \varepsilon_2 < |y'|$.

170. Заокруглити на две децимале бројеве:

а) 2,6543; б) 0,6781; в) 5,365;

г) 8,155; д) 29,16501.

171. Дати број заокруглити на једну, две, три, четири, пет децимала:

а) $a = 2,71582034$; б) $b = 2,645755$;

в) $c = 1,414213562$; г) $d = 1,732050807$.

172. Заокруглити број $x = 3,480(561)$ на 2, 3, 4, 5, 6, односно 7 децимала.

173. Одредити апсолутну и релативну грешку следећих приближних вредности:

а) $\frac{6}{25} \approx \frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3} \approx 0,33$; в) $\frac{1}{3} \approx 0,333$; г) $\frac{1}{9} \approx 0,11$.

174. Мерењем производа x и y установљена је њихова маса $x = 35t \pm 10kg$, $y = 72t \pm 10kg$. Одредити апсолутну и релативну грешку мерења тих производа.

175. Мерењем два предмета утврђено је да су им дужине $x = 2,34 \pm 0,02m$ и $y = 1,23 \pm 0,01m$. Које је мерење тачније?

176. Дати су приближни бројеви $a = 1,16 \pm 0,01$, $b = 5,24 \pm 0,02$ и $c = 3,29 \pm 0,03$. Израчунати приближне вредности и границе апсолутне грешке израза:

а) $a + b$; б) $b + c$; в) $a + b + c$;

г) $a - 2b$; д) $a - 3c$; ђ) $a + b - c$.

177. Нека је $a = 7,23 \pm 0,01$ и $b = 3,49 \pm 0,02$. Приближно израчунати вредности израза и проценити грешку:

а) $a \cdot b$; б) $a^2 + b^2$; в) $\frac{a}{b}$.

178. Израчунати $x = a - b + c$, ако је $a = 13,5 \pm 0,05$, $b = 5,8 \pm 0,1$ и $7,30 < c < 7,45$ и проценити апсолутну грешку.

179. Приближно израчунати количник $\frac{a}{b}$, ако је $a = 5,8 \pm 0,1$ и $b = 2,4 \pm 0,1$.

180. Ако је $x = \frac{ab^2}{c^3}$, $a = 4,378 \pm 0,002$, $b = 3,42 \pm 0,005$ и $c = 1,941 \pm 0,001$ израчунати x и проценити апсолутну грешку.

181. Странице правоугаоника су $a = 2,4 \pm 0,1cm$ и $b = 3,7 \pm 0,1cm$. Одредити приближно обим O и површину P и проценити грешку.

182. Нека је $u = \frac{x + 3y}{y(x - y)}$, при чему је $x = 3,23 \pm 0,03$ и $y = 1,775 \pm 0,005$. Одредити приближну вредност за u и границу апсолутне грешке.

183. Одредити приближну вредност функције $y = x^3$ за $x = \sqrt{2}$ ако је приближна вредност аргумента $x' = 1,41$ и оценити границу апсолсутне грешке.

2.5. ДОДАТАК УЗ ДРУГУ ГЛАВУ

184. а) Нека су p и $8p^2 + 1$ прости бројеви. Наћи p.

б) Нека су p, $p + 10$ и $p + 14$ прости бројеви. Наћи p.

185. Ако су p и $2p + 1$ прости бројеви ($p > 3$), доказати да је број $4p + 1$ сложен.

186. а) Ако је p прост број већи од 3, доказати да је број $p^2 - 1$ дељив са 24.

б) Ако су p и q прости бројеви већи од 3, доказати да је број $p^2 - q^2$ дељив са 24.

187. Нека је n природан број. Доказати да број:

а) $n^2 + n + 1$ није дељив са 1994 ни за једно n;

б) $n^2 + n + 2$ није дељив са 1995 ни за једно n.

188. Доказати да број

а) $a = n(n+2)(n+4) + 2^n$; б) $b = (n-4)n(n+1) + 5^n$

није дељив са 1995 ни за један природан број n.

189. а) Доказати да бројеви облика $3m+2$, $m \in Z$ не могу бити квадрати целих бројева.

б) Доказати да једначина $x^2 - 3y = 20$ нема целобројних решења.

190. а) Доказати да бројеви облика $5m+2$, $m \in Z$ не могу бити квадрати целих бројева.

б) Доказати да једначина $x^2 - 5y = 22$ нема целобројних решења.

191. Наћи целобројна решења једначина:

а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; б) $xy - 3y + x = 14$;

в) $xy = 5x + 5y$; г) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 1$.

192. У скупу целих бројева решити једначине

а) $x^2 + y^2 = 2$; б) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$;

в) $x^2 + xy + y^2 = 1$; г) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6$.

193. Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ међусобно различити прости бројеви доказати да број $a = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}$ није цео број.

194. Доказати да између свака два различита рационална броја постоји

а) бар један рационалан број;

б) бесконачно много рационалних бројева.

195. Доказати да не постоји једнакостранични троугао чија су темена у чворовима целобројне мреже у координатном систему.

196. Одредити све целе бројеве a и b за које је $1 + \sqrt{3}$ решење једначине $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$.

197. Доказати да су следећи бројеви ирационални:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{19}$; б) $\sqrt{2} - \sqrt{13} + \sqrt{11}$;

в) $\sqrt{2} - \sqrt{7} + \sqrt{5}$; г) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$.

198. Доказати да је број $a = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ рационалан.

199. Решити једначину $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$ у скупу реалних бројева.

Глава III

ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

3.1. РАЗМЕРЕ И ПРОПОРЦИЈЕ

Размера. Количник $a : b$, односно $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, зовемо размером реалних бројева a и b.

Основно својство размере. Вредност размере се не мења ако се оба њена члана помноже (поделе) бројем различитим од нуле. Дакле, размера $a : b$ еквивалентна је размери $ak : bk$.

Пропорција (сразмера). Једнакост двеју размера $a : b = c : d$ зове се пропорција. Чланови a и d зову се спољашњи, а b и c унутрашњи чланови пропорције.

Основно својство пропорције. Производ спољашних чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова. Важи следећа еквиваленција $a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$, $(abcd \neq 0)$.

Продужена пропорција. Једнакост три или више размера назива се продужена пропорција. На пример $(a, b, c, d, m, n, p, q \neq 0)$ $a : m = b : n = c : p = d : q$ или $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{q}$.

200. Доказати да је за $a, b, c, d \neq 0$ пропорција $a : b = c : d$ еквивалентна свакој од следећих једнакости:

1° $a : c = b : d$;
2° $b : a = d : c$;
3° $ak : bk = c : d$, за $k \neq 0$;
4° $ak : b = ck : d$, за $k \neq 0$;
5° $(a + b) : (c + d) = a : c$, за $c + d \neq 0$;
6° $(a - b) : (c - d) = a : c$, за $c - d \neq 0$.

201. Доказати да из $a : b = c : d$, $(a, b, c, d \neq 0$, и $x, y, z, t \neq 0)$ следи:

1° $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$, за $a \neq b$;

2° $(ax+cy):(bx+dy)=a:b$, за $bx+dy \neq 0$;

3° $(ax+by):(cx+dy)=a:c$, за $cx+dy \neq 0$;

4° $(ax+by):(az+bt)=(cx+dy):(cz+dt)$, за $az+bt \neq 0$.

202. Одредити x из пропорција:

а) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=12:x$; б) $\frac{7}{2}:\frac{1}{3}=x:\frac{1}{6}$;

в) $\frac{5}{6}:x=\frac{1}{3}$; г) $4\frac{4}{5}:6\frac{3}{4}x=9\frac{1}{6}:51\frac{9}{16}$;

д) $0,4x:0,35=0,72:0,07$; ђ) $0,78:0,66=0,5x:0,55$.

203. Користећи пропорције одредити x и y ако је:

а) $x:y=2:3, x+y=10$; б) $x:5=y:3, x-y=6$;

в) $x:y=2a:b, x+y=a+b$; г) $x:y=10,5:10,2x+3y=102$;

204. Из датих пропорција извести продужену пропорцију облика $a:b:c:d=\ldots$:

а) $a:b=3:4, b:c=6:5, c:d=2:3$;

б) $a:b=2:3, b:c=6:7, c:d=3:11$;

в) $a:b=3:4, c:b=5:6, d:a=7:6$;

г) $a:b=1\frac{1}{3}:5\frac{1}{2}, b:c=2\frac{1}{5}:3\frac{1}{2}, c:d=7\frac{1}{2}:4\frac{1}{4}$.

205. Ако за позитивне бројеве a, b, x важи пропорција $a:x=x:b$, каже се да је x геометријска средина бројева a и b; ако је $(a-x):(x-b)=a:b$, каже се да је x хармонијска средина бројева a и b.

Доказати:

а) Ако је x хармонијска средина бројева a и b, онда је $\frac{1}{x}$ аритметичка средина бројева $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.

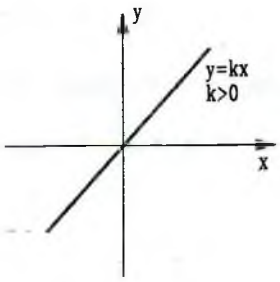
б) Геометријска средина бројева a и b истовремено је геометријска средина њихове аритметичке и хармонијске средине.

206. Доказати особину продужене пропорције да из $a_1:a_2:\cdots:a_n=b_1:b_2:\cdots:b_n$ следи $(a_1+a_2+\cdots+a_n):(b_1+b_2+\cdots+b_n)=a_1:b_1$, или речима: Збир првих чланова продужене пропорције према збиру других чланова односи се исто као и ма која размера одговарајућих чланова.

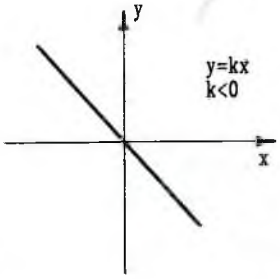
3.2. ДИРЕКТНА И ОБРНУТА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

Нека су m и n дати бројеви ($m, n \neq 0$) и x и y непознати бројеви. Кажемо да су x и y директно пропорционални уколико је $x : m = y : n$, односно $y = \frac{n}{m}x$. А ако је $x : m = n : y$, односно $y = \frac{mn}{x}$, онда су x и y обрнуто пропорционални. Ако уведемо ознаке $k = \frac{n}{m}$ и $a = mn$, онда се *директна пропорционалност* променљивих изражава са $y = f(x) = kx$, а *обрнута пропорционалност* $y = g(x) = \frac{a}{x}$.

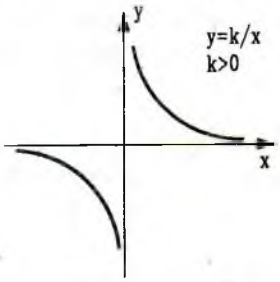
Графици функција $f(x)$ и $g(x)$ дати су на сликама 1 и 2 (то су праве линије), односно на сликама 3 и 4 (те криве се зову хиперболе).



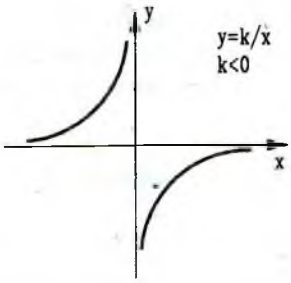
1



2



3



4

207. На карти која има размеру 1:250000 растојање између места A и B је $2cm$. Колико је растојање: а) у природи, б) на карти са размером 1:80000?

208. Из једног бурета напуњено је 160 боца уља од $\frac{3}{4}$ литра. Колико ће се боца напунити из истог бурета, ако оне садрже $0,8$ литара?

209. Од $10kg$ предива се изатка $18m$ штофа. Колико се метара штофа изатка од $35kg$ педива?

210. Колико часова дневно треба да раде четири једнака трактора за 35 дана да би поорали $3640ha$ земљишта, ако 3 таква трактора за 25 дана радећи дневно по 14 часова поору $1820ha$?

211. Колико часова дневно треба да раде 16 радника да би за 15 дана ископали 3600 тона угља, ако 24 радника за 12 дана радећи дневно 7 часова ископају 3780 тона?

212. За греду дужине $6m$, ширине $2dm$, дебљине $1,3dm$ плаћено је 260 динара. Колика се дужина греде добија за 280 динара, ако јој је ширина $21cm$, а дебљина $16cm$?

213. Од $100kg$ брашна испече се 4000 комада кифли од $30gr$. Колико ће се кифли од $50gr$ добити од $650kg$ брашна?

214. Мачка и по ухвати миша и по за дан и по. Колико мишева ухвати пет мачака за шест дана?

215. Шест продаваца обаве инвентарисање једне продавнице за четири дана радећи дневно десет часова. Колико продаваца треба да би инвентарисали исту продавницу за пет дана, ако раде 12 часова дневно?

216. Један посао су започела 33 радника и по плану би га завршили за 80 дана. Међутим, после 16 радних дана, 9 радника је напустило посао. За колико дана је посао завршен?

217. Четири једнака трактора могу да поору неко земљиште за 36 часова. После 12 часова рада један трактор се покварио. За колико часова ће бити пооран остатак земљишта?

218. Петнаест радника заврше један посао за 24 часа. После 10 часова рада посао напусте три радника. Колико још треба да раде преостали радници да би завршили остатак посла?

219. По плану 30 радника треба да заврше посао за 42 дана ако раде по 8 часова дневно. Посао започну сви радници и раде 12 дана, тада 6 радника напусте посао, а радно време се повећа за 2 часа. После колико дана је завршен остатак посла?

220. Колико је потребно брашна за $70kg$ хлеба ако се од $4kg$ брашна добија $5kg$ хлеба?

221. Један посао три радника обаве за 12 дана. За колико дана би исти посао обавила четири радника?

222. За једно купатило потребно је 600 керамичих плочица чије су димензије $15cm \times 15cm$. Колико је потребно керамичких плочица демензије $10cm \times 20cm$ за исто купатило?

223. Осам литара моторног уља плаћено је 192 динара. Колико ће се литара добити за 240 динара?

224. Шест продаваца заврши инвентарисање на крају тромесечја за четири дана. За колико би дана 8 продаваца завршило тај посао, ако имају исти радни учинак?

225. 120 зидара заврше један посао за 12 дана радећи дневно по 8 сати. Колико би требало зидара па да исти посао заврше за 10 дана радећи дневно по 6 сати?

226. Једна пумпа извлачи за 6 минута $15hl$ воде из дубине од $180m$. За које време та иста пумпа може да извуче $20hl$ воде из дубине од $120m$?

227. Од $32kg$ памука добија се $36m$ сукна ширине $0,8m$. Колико кограма памука је потребно за $25m$ сукна ширине $1,8m$?

228. На једној деоници ауто-пута радило је 46 радника, 24 дана, по 6 часова дневно и изградили су пут дужине $27,6km$ и ширине $14m$. Колико радника треба да раде под истим условима да би изградили пут дужине $35km$, ширине $12m$, ако раде 30 дана по 8 часова дневно?

229. Четири радника договоре се да оберу виноград од $10ha$ за 8 дана. Међутим, после 5 дана рада по 9 сати дневно, они оберу само $3ha$. Зато одлуче да потраже помоћ. Колико је још радника потребно да раде заједно са њима преостала 3 дана по 10 сати дневно да би берба винограда била завршена на време?

230. Скицирати графике функција:

а) $y = 2x$; б) $y = \frac{1}{3}x$; в) $y = 3x$;

г) $y = \frac{1}{x}$; д) $y = -\frac{2}{x}$.

3.3. РАЧУН ПОДЕЛЕ И МЕШАЊА

Подела броја N на два дела x и y у директној размери $a : b$, где су a и b реални бројеви, добија се из пропорције $x : y = a : b$ и услова да је $x + y = N$.

1° Применом познате особине пропорције имамо да је:

$$(x+y) : (a+b) = x : a \Rightarrow x = \frac{(x+y)a}{a+b},$$

$$(x+y) : (a+b) = y : b \Rightarrow y = \frac{(x+y)b}{a+b},$$

односно

$$x = \frac{N}{a+b} \cdot a, \quad y = \frac{N}{a+b} \cdot b.$$

2° Ако се број N дели на три дела x, y, z у директној размери $a : b : c$ истим поступком се добија

$$x = \frac{N}{a+b+c} \cdot a, \quad y = \frac{N}{a+b+c} \cdot b, \quad z = \frac{N}{a+b+c} \cdot c.$$

3° Ако се број N дели у обрнутој размери тада је:

$$x = \frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{a}, \quad y = \frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{b},$$

односно

$$x = \frac{N}{a+b} \cdot b, \quad y = \frac{N}{a+b} \cdot a.$$

231. Поделити број на два дела:

а) 60 у размери $7 : 3$; б) 95 у размери $2 : 3$; в) 35 у размери $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$.

232. Поделити број 3840 на делове који су обрнуто пропорционални бројевима 7 и 8.

233. Поделити:

а) број 72 на три дела у размери $7 : 4 : 1$;

б) број 86 на три дела у размери $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} : 2$.

234. Награду од 4530 динара поделити на три радника у размери са њиховим радним данима. Први радник је радио на заједничком послу 5 дана, други 4 дана, а трећи 3 дана.

235. За превоз $32kg$ детерџента, $23kg$ шећера и $45kg$ брашна трошкови превоза износили су 900 динара. Израчунати укупне трошкове по врстама робе у размери са масом робе.

236. Радећи заједнички један посао четири радника зараде зависно од учинка први 12000 динара, други 11500 динара, трећи 10500 динара, четврти 9000 динара. Каснијим обрачуном испоставило се да за тај посао треба да приме још 21452 динара. По колико динара ће добити сваки од њих ако се подела изврши сразмерно њиховим зарадама.

237. Четири ученика су награђени наградом од 3600 динара. Колико добија сваки од њих ако се награда дели у размери $\frac{3}{2} : 2 : \frac{5}{2} : 3$?

238. Своту од 42000 динара треба поделити на четири особе тако да се износи које добијају први и други односе као 2 : 3, други и трећи као 4 : 5, а трећи и четврти као 6 : 7. Колико ће свако од њих добити?

239. Износ од 1235 динара треба поделити између особа A, B, C и D тако да се делови што их добијају C и A односе као 5 : 2, делови што их добијају B и D као 1 : 3, а делови које добијају A и D као 3 : 4. Колико свака особа добија новца?

240. Фабрика за производњу воћних сокова распоредила је $136200kg$ воћа на четири погона, тако да први погон добије 15% мање од трећег, четврти погон добије 10% више од трећег, а трећи 20% више од другог. Колико ће килограма воћа прерадити сваки погон?

241. Трошкови грејања за једну зграду износе 9510 динара и треба да их исплати 5 потрошача према броју ребара радијатора у сваком стану. У првом стану има 65 ребара, у другом 50, у трећем 72, у четвром 80 и у петом 50. Колико ће динара платити на име трошкова грејања сваки станар?

242. У ком односу треба помешати воду температуре $40°C$ и воду температуре $25°C$ да би се добила вода температуре $30°C$?

243. Колико треба узети сумпорне киселине јачине 44%, а колико киселине јачине 80% да би се добило 18 литара киселине јачине 64%?

244. Литар вина кошта 14 динара, а литар соде 4 динара. У којој размери треба помешати вино и соду да би литар шприцера коштао 10 динара?

245. Колико треба узети литара 90%-ог алкохола и колико литара 60%-ог алкохола да би се добила смеша од $50l$ 72%-ог алкохола?

246. Од 40-процентног и 65-процентног раствора сирћетне киселине треба да се припреми $7,5l$ 55-процентног раствора. По колико литара треба да се узме од сваког раствора?

247. Колико литара воде температуре 12° треба помешати са $5l$ воде температуре 70° да би се добила мешавина температуре 37°?

248. За израду накита користи се сребро финоће 600‰ и сребро 900‰ да би се добило сребро финоће 800‰.

а) У ком односу треба помешати ове две врсте сребра?

б) Колико треба грама од сваке врсте да би се добило $60gr$ сребра финоће 800‰?

249. За израду хлеба користе се две врсте брашна по цени од $0,72$ и $0,64$ динара по килограму. Колико треба узети од сваке врсте да би се добила мешавина од $1600kg$ по цени од $0,70$ динара по килограму?

250. Колико литара ракије по цени од $8,50$ динара и $7,20$ динара по литру треба помешати да би се добио 221 литар ракије по цени од 8 динара?

251. У ком односу треба помешати четири врсте кафе по цени од 16, 20, 22 и 25 динара по килограму да би се добила кафа по цени од 21 динар по килограму?

252. Колико сребра финоће 900‰, 850‰, 700‰ и 600‰ треба узети да би се добио пехар масе $18kg$ и финоће 750‰?

253. Један златар легира злато финоће 900‰, 800‰, 750‰ и 650‰. Колико треба да узме од сваке врсте да би добио $21gr$ злата финоће 780‰?

254. У једној чаши направљен је сок од воде и сирупа у размери $2:1$, а у другој у размери $3:2$. Сок из обе чаше пресут је у празан суд при чему је добијена размера воде и сирупа $27:17$. Колики је био однос количина сока у чашама?

255. Колико литара воде треба сипати у мешавину $40l$ 60-процентног алкохола и $60l$ 40-процентног алкохола да би се добио 25-процентни алкохол?

256. У извесну количину 80%-ог алкохола додато је $12l$ воде и добијен је 60%-ни алкохол. Колика је првобитна количина алкохола?

3.4. ПРОЦЕНТНИ РАЧУН

1° p-проценат(процентна стопа) је стоти део неке величине:

$$p = 1\%a = \frac{a}{100} = 0,01a$$

2° G-главница (основна вредност, главна величина, главни износ) представља величину од које се рачунају проценти.

3° P-процентни износ (процентни принос) представља део главнице коме одговара одређени проценат.

Из основне пропорције процентног рачуна

$G : 100 = P : p$ или $G : P = 100 : p$

израчунава се једна од величина ако су друге две познате:

$$G = \frac{P \cdot 100}{p}, \quad P = \frac{G \cdot p}{100}, \quad p = \frac{P \cdot 100}{G}.$$

4° Промил представља хиљадити део главнице, а сав рачун са промилима разликује се од процентног рачуна у томе што уместо броја 100 користимо број 1000:

$$G : P = 1000 : p$$

257. Цена од 12000 динара за неки производ снижена је за 7%. Колико динара износи снижење?

258. Фактура гласи на 16850 динара. На тај износ одобрено је 4,5% рабата. Колико динара износи рабат?

259. Нека роба је калирала $160kg$. Колика је била првобитна тежина ако кало у процентима износи 2,5%?

260. План промета једне трговинске организације, који је износио 7500000 дин, пребачен је за 450000 динара. Колико тај пребачај износи у процентима?

261. У $83l$ алкохолног пића налази се $67l$ воде. Колико у овом алкохолном пићу има процената алкохола?

262. Једна угоститељска радња је премашила свој месечни план за 8,5% и то премашење плана износи 425000 динара. За колико би процената био премашен план да је месечни промет износио 5750000 динара?

263. Цена једне књиге је најпре повећана за 50%, а затим снижена за 50%. Цена друге књиге је најпре снижена за 50%, а затим повећана за 50%. На крају је разлика њихових цена била 6 динара. Колика је била првобитна разлика у цени?

264. Цена једног производа подигнута је за 10%, а затим снижена за 10%. За колико процената се променила цена у односу на првобитну?

265. Цена кошуље је 64 динара. После поскупљења за 20% дошло је до појефтињења за 20%. Колика је нова цена кошуље?

266. Цена једног производа снижена је за 50%. За колико процената треба нову цену подићи да би се добила првобитна?

267. За колико процената се промени површина правоугаоника ако му се дужина повећа за 10%, а ширина смањи за 10%?

268. За колико процената се смањи време путовања на извесном путу ако се брзина повећа за једну четвртину?

269. На једном градилишту број радника повећан је за трећину. За колико процената од предвиђеног времена ће се посао раније завршити?

270. Свеже печурке садрже 90% воде, а суве 12%. Колико килограма сувих печурки се може добити од $22kg$ свежих?

271. Нека је повећањем цена неког производа за x процената, па смањењем нове цене за y процената добијена почетна цена тог производа. Изразити y у функцији од x.

272. Град је уништио 75‰ садница у једном расаднику и то износи 120 садница. Колико је садница било у том расаднику?

273. По одбитку 5‰ провизије банка је исплатила клијенту 59700 динара. Од које суме је провизија рачуната и колика је провизија у динарима?

274. Колико килограма неке руде треба узети да би се добило $57750kg$ чистог метала, ако на шљаку отпада 835‰?

‰ = 1/1000

3.5. КАМАТНИ РАЧУН

Напомена. Садржај који се односи на каматни рачун (задаци 275-286) није у програму редовне наставе.

Формула за процентни износ $P = \dfrac{G \cdot p}{100}$ користи се за израчунавање камате (простог интереса) и капитала.

За каматни рачун је $P = I$-камата или интерес, $G = K$-капитал или главница, p-процентна стопа, t-време, па је

$$I = \frac{K \cdot p}{100} \cdot t.$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ КАМАТЕ (ИНТЕРЕСА)

1° $I = \dfrac{K \cdot p}{100} \cdot g$, време дато у годинама;

2° $I = \dfrac{K \cdot p}{1200} \cdot m$, време дато у месецима;

3° $I = \dfrac{K \cdot p}{36500} \cdot d$, време дато у данима.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ КАПИТАЛА

4° $K = \dfrac{100 \cdot I}{p \cdot g}$, време дато у годинама;

5° $K = \dfrac{1200 \cdot I}{p \cdot m}$, време дато у месецима;

6° $K = \dfrac{36500 \cdot I}{p \cdot d}$, време дато у данима.

7° Интерес на интерес рачуна се по формули

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где је n број година,

8° За месечно камаћење формула је:

$$K_m = K\left(1 + \frac{p}{1200}\right)^m$$

275. Колико износи интерес на зајам од 15000 динара за време од 3 године по стопи 5%?

276. Уложена је сума од 42800 динара за време од 8 месеци у банку која плаћа 4% интереса. Колико износи интерес?

277. Израчунати 7,5% интереса на суму од 62300 динара за време од 9 месеци.

278. Колико је интереса донео капитал од 100260 динара за 60 дана по стопи 4%?

279. На коју је суму обрачунат интерес од 10260 динара за време од 5 година по стопи 6%?

280. На који је капитал израчунат интерес од 340,65 динара за 6 месеци по стопи од 4,5%?

281. Предузеће је платило камату 17710 динара на позајмљена средства за време од 21. марта до 21. јуна по стопи 5,5%. Колико износе позајмљена средства?

282. На колику суму нарасте 200 динара са 20% сложене камате после 5, 10 и 15 година?

283. У банку је уложено 6000 динара са каматном стопом

а) 5%; б) 10%; в) 15%.

Колико ће износити главница после 3 године?

284. Колика се сума мора уложити са каматном стопом од 25% да би после 10 година достигла износ од 5000 динара?

285. На колики износ нарасте 1000 динара са 3% сложене месечне камате после 4, 6, 8 месеци?

286. Колико динара треба уложити да би се после 10 месеци заједно са сложеном каматом од 8% примило 51300 динара?

Глава IV

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

Основни објекти у геометрији су тачке, праве и равни. У формулацијама задатака, и када се то посебно не нагласи, тачке се означавају великим латиничним словом: $A, B, C, \ldots, P, Q, \ldots$, праве малим латиничним словом: $a, b, c, \ldots, p, q, \ldots$, а равни грчким словима: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, \rho, \ldots$

Ако тачка A припада правој a, односно равни α, то се означава са $A \in a$, $A \in \alpha$, а ако права p припада равни π са $p \subset \pi$. (Записи $A \subset \alpha$ и $p \in \pi$ су погрешни!). За пресеке правих и равни коректне су ознаке: $a \cap b = \{M\}$, $p \cap \pi = \{P\}$, $\alpha \cap \beta = s$ (док је погрешно, на пример, $a \cap b = M$ и $p \cap \pi = P$).

Основне релације су "бити између" и "бити подударан". За тачке A, B, C, D: $A - B - C$ означава да је тачка B између тачака A и C, а $\{A, B\} \cong \{C, D\}$ да је пар тачака $\{A, B\}$ подударан пару $\{C, D\}$.

4.1. АКСИОМЕ ПРИПАДАЊА

Аксиома 1. Свака права садржи најмање две различите тачке. Постоје три неколинеарне тачке.

Аксиома 2. Сваке две различите тачке одређују једну праву.

Аксиома 3. Сваке три неколинеарне тачке одређују једну раван.

Аксиома 4. Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке. Постоје четири некомпланарне тачке.

Аксиома 5. Свака права, која са неком равни има заједничке две различите тачке, припада тој равни.

Аксиома 6. Ако две различите равни имају једну заједничку тачку, онда оне имају тачно једну заједничку праву.

За две праве се каже да се секу ако имају тачно једну заједничку тачку.

Ако заједничке тачке две равни припадају тачно једној правој, каже се да се равни секу.

За равни α и β које се не секу каже се да су паралелне: $\alpha||\beta$.

Ако права и раван имају тачно једну заједничку тачку, каже се да права продире раван. У противном, за праву a и раван α кажемо да су паралелне: $a||\alpha$.

Ако су $F_1, F_2, \ldots, F_n$ неке различите фигуре (непразни скупови тачака) и ако постоји тачно једна раван α тако да су фигуре $F_1, F_2, \ldots, F_n$ њени подскпови, каже се да је раван α одређена фигурама $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Слично се може говорити и о одређености праве, или неке друге фигуре.

Тачке су *колинеарне* ако припадају једној правој, а *компланарне* ако припадају једној равни.

287. а) Доказати да права a и тачка A ван ње одређују једну раван.
б) Доказати да две праве које се секу одређују једну раван.

288. Нека су a и b две различите праве. Доказати да оне имају највише једну заједничку тачку.

289. Нека су a и b праве које припадају двема различитим паралелним равнима α и β. Доказати да је $a \cap b = \emptyset$.

290. Дате су раван α и тачка P ван равни. Доказати да права p, која садржи тачку P, не може имати са равни α више од једне заједничке тачке.

291. Дата је права p и ван ње тачка A. Доказати да све праве које садрже тачку A и секу праву p припадају једној равни.

292. Ако за три равни α, β, γ не постоји заједничка права, тада те три равни имају највише једну заједничку тачку. Доказати.

293. Дате су праве a и b и тачка M ван њих. Ако постоје две различите праве m и n, које садрже тачку M и секу обе праве a и b, тада праве a и b припадају једној равни. Доказати.

294. Ако су α и β две паралелне равни, тада је свака права a равни α паралелна са равни β. Доказати.

295. Доказати следећа тврђења:

а) за сваке две праве a и b постоји права c која их обе сече;

б) за сваке све равни α и β постоји права c која их обе сече;

в) за сваке две равни α и β постоји раван γ која их обе сече.

296. Ако су a и b мимоилазне праве и A_1 и A_2 две разне тачке праве a и B_1 и B_2 две разне тачке праве b, доказати да су праве A_1B_1 и A_2B_2 такође мимоилазне.

297. За сваке две мимоилазне праве постоји раван која сече сваку од њих. Доказати.

298. а) У равни је дато 6 тачака, од којих никоје три нису колинеарне. Колико правих одређују ове тачке?

б) Колико равни одређују пет тачака од којих никоје четири нису компланарне?

299. У скупу од седам тачака постоји тачно шест тројки колинеарних тачака и не постоје четири тачке које су колинеарне. Колико различитих правих одређују тачке овог скупа?

300. У скупу од 10 тачака постоји тачно 6 четворки компланарних тачака. Колико равни одређује ових десет тачака?

301. Дато је седам равни таквих да се сваке две од њих секу. Колико је највише правих одређено њиховим пресецима?

302. Дат је скуп од n тачака, међу којима не постоји ниједна тројка колинеарних тачака. Колико тачака садржи тај скуп ако је број правих одређених тим тачкама три пута већи од броја тачака?

303. Дат је скуп од n тачака, међу којима не постоје четири компланарне тачке. Колико тачака има овај скуп ако је број свих равни одређених овим тачкама 12 пута већи од највећег броја правих које могу бити одређене тим тачкама?

4.2. ПАРАЛЕЛНОСТ

За праве p и q се каже да су *паралелне*: $p||q$ ако је $p = q$ или праве p и q припадају једној равни и немају заједничких тачака.

Аксиома паралелности. За сваку праву a и сваку тачку A постоји тачно једна права која садржи тачку A и паралелна је правој a.

За праве p и q се каже да су *мимоилазне* ако не постоји раван којој припадају обе те праве.

Теорема о паралелности праве и равни. Права a је паралелна равни α ако и само ако у равни α постоји права паралелна правој a.

Релација паралелности правих је *релација еквиваленције*.

304. Доказати да две различите паралелне праве a и b одређују једну раван.

305. Нека су a, b и c три праве равни π. Ако је $a||b$ и права c сече праву a, доказати да права c сече и праву b.

306. Нека су a и b праве које се секу и права c припада равни одређеној правом a и правом b. Доказати да права c сече бар једну од правих a и b.

307. Да ли су истинити следећи искази:

а) Постоји права c паралелна са две мимоилазне праве a и b?

б) Сваке две праве које су паралелне једној равни паралелне су и међу собом?

в) Сваке две равни које су паралелне једној правој паралелне су и међу собом?

308. а) Колико највише равни одређују мимоилазне праве p и q и тачке A, B и C?

б) Колико највише равни одређују паралелне праве p и q и тачке A, B и C?

309. Нека су a, b, c, d четири паралелне праве, међу којима никоје три не припадају једној равни. Колико равни одређују ове праве?

310. На мимоилазним правим p и q дате су тачке A, B, $C \in p$ и D, $E \in q$. Колико равни одређују тачке A, B, C, D, E, F ако тачка F не припада ни једној од правих одређених тачкама A, B, C, D, E?

311. Ако су a и b мимоилазне праве доказати да постоји раван α која садржи праву a и паралелна је правој b.

312. Дате су равни α и β које се секу по правој p и праве a и b такве да $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$. Ако је $a \cap p = \{A\}$, $b \cap p = \{B\}$ и $A \neq B$, доказати да су праве a и b мимоилазне.

313. Ако права a сече раван π и ако је b права паралелна правој a, доказати да и права b сече раван π.

314. За сваке две равни α и β постоји у равни α права c паралелна равни β. Доказати.

315. Нека су α и β две паралелне равни и нека их раван γ сече редом по правим a и b. Доказати да је $a||b$.

316. Дата је раван α и њој паралелна права a. Доказати да постоји тачно једна раван π која садржи праву a и паралелна је равни α.

317. Нека су α и β две различите равни и у равни β постоје праве p и q које се секу и паралелне су равни α. Тада је и $\beta||\alpha$. Доказати.

318. Нека су α, β и γ три различите равни. Доказати да се α, β и γ или секу у једној тачки, или су паралелне једној правој.

4.3. ДОДАТАК УЗ ЧЕТВРТУ ГЛАВУ

319. а) Наћи максималан број правих које се могу конструисати кроз n датих тачака, од којих p тачака припадају једној правој, $n, p \in \mathbf{N}$, $p < n$.

б) Наћи максималан број равни које се могу конструисати кроз n датих тачака, од којих m тачака припадају једној равни, $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$.

320. Дате су три неколинеарне тачке P, Q, R, које одређују раван α и ван равни α три неколинеарне тачке P_1, Q_1 и R_1 које одређују раван β. Ако је $PQ \cap P_1Q_1 = \{A\}$, $QR \cap Q_1R_1 = \{B\}$ и $RP \cap R_1P_1 = \{C\}$, доказати да су тачке A, B и C колинеарне.

321. Које од својстава рефлексивност, симетрија, антисиметрија и транзитивност има релација "мимоилазност правих"?

322. Нека су p и q две мимоилазне праве и тачка A ван њих. Одредити бар једну праву c која садржи тачку A и мимоилазна је и са p и са q.

323. Ако су a и b две мимоилазне праве, доказати да постоји раван која не садржи ни a ни b, а паралелна је обема правим.

324. Ако је права c паралелна равнима α и β које се секу по правој p, доказати да су праве p и c паралелне.

325. Ако су a и b две мимоилазне праве, доказати да постоје две међусобно паралелне равни α и β, такве да $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$.

326. Нека права b продире раван π у тачки B и нека права a припада равни π и не садржи тачку B. Доказати да су праве a и b мимоилазне.

327. Нека је a права паралелна равни β и нека је α произвољна раван која садржи праву a. Тада је, или раван α паралелна равни β, или је пресек ове две равни права паралелна правој a. Доказати.

328. Нека су a и b мимоилазне праве и тачка C ван њих. Да ли постоје праве које садрже тачку C и секу сваку од правих a и b?

329. Нека раван γ сече једну од две паралелне равни α и β. Доказати да сече и другу.

330. Ако једна права продире једну од две паралелне равни, доказати да продире и другу.

331. Нека су a_1, a_2, a_3 три дужи које припадају једној правој и од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку. Доказати да тада и све три дужи имају бар једну заједничку тачку.

332. Колико највише неконвексних углова може да има:

а) троугао; б) четвороугао; в) петоугао?

333. Нека су A и B конвексни скупови. Да ли су

а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \setminus B$ конвексни скупови?

г) Да ли је подскуп конвексног скупа обавезно конвексан?

д) Да ли је тачка конвексан скуп?

334. У равни су дати (у општем случају конкавни) четвороугао и петоугао и при чему ниједно теме једног не припада страници другог многоугла. Који је највећи могући број пресечних тачака њихових страница?

335. У колико тачака највише сама себе сече затворена изломљена линија од: а) 5 делова, б) 7 делова?

Глава V

ГЕОМЕТРИЈА

5.1. ПОДУДАРНОСТ ДУЖИ, УГЛОВА И ТРОУГЛОВА

1. Две дужи AB и CD су једнаке (или подударне) ако је $\{A, B\} \cong \{C, D\}$ и то означавамо са $AB = CD$.

2. Два угла, Opq и $O_1p_1q_1$, једнаки су ако и смо ако на крацима Op, Oq, O_1p_1, O_1q_1, постоје редом тачке P, Q, P_1, Q_1, такве да је $OP = O_1P_1, OQ = O_1Q_1$ и $PQ = P_1Q_1$.

3. Напоредни углови једнаких углова су једнаки међу собом.

4. Унакрсни углови су једнаки међу собом.

5. Углови са паралелним крацима су подударни или суплементни.

6. Углови са нормалним крацима су подударни или суплементни.

7. Трансверзални углови су углови који се добијају када једна права t (трансверзала) сече дате праве a и b.

8. Ставови о подударности троуглова.

Уобичајено је да се странице троуглова означавају малим словом, које одговара темену наспрамног угла - наспрам темена A и угла α, је страница $a = BC$.

Сваки од следећих услова је потребан и довољан да важи $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$:

$$1^\circ \left.\begin{array}{l} c = c_1 \\ \alpha = \alpha_1 \\ b = b_1 \end{array}\right\} \text{ I став (СУС)} \qquad 2^\circ \left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \\ c = c_1 \\ \beta = \beta_1 \end{array}\right\} \text{ II став (УСУ)}$$

3° $\left.\begin{array}{l} a=a_1 \\ b=b_1 \\ c=c_1 \end{array}\right\}$	III став (ССС)	4° $\left.\begin{array}{l} c=c_1 \\ b=b_1 \\ \gamma=\gamma_1 \\ c>b \end{array}\right\}$	IV став (ССУ)

336. На правој су дате тачке A, B, C, D тако да је $A-B-C-D$.

а) Колико је дужи одређено овим тачкама?

б) Које од ових дужи су збирови неких других дужи? Које од њих су разлике две друге дужи?

в) Записати (на два начина) дуж BC у облику разлике, код које је умањеник дуж AD.

337. Једна дуж је три пута дужа од друге, а њихова разлика је дужине $16cm$. Наћи дужине тих дужи.

338. Збир две дужи је дужине a, а разлика b. Преко a и b изразити дужине тих дужи.

339. Наћи одстојање средишта дужи AB и BC, где су A, B, C колинеарне тачке, такве да је $A-B-C$, ако је $AC=18cm$.

340. Две подударне дужи AB и CD покривају се међусобом једном трећином своје дужине. Наћи дужину ових дужи, ако је одстојање њихових средишта $20cm$.

341. Конструисати неке углове β и α, а затим конструисати углове $2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha, \alpha-\beta, 3\beta-2\alpha$.

342. Да ли је могуће да разлика два угла буде једнака правом углу, ако су

а) оба угла оштра; б) један угао -оштар, други - туп;

в) углови суплементни; г) оба угла тупа?

Ако је ово могуће, колико таквих парова углова има?

343. Ако су α и β два комплементна угла, γ је суплементан са α, а δ је суплементан са β, наћи збир $\gamma+\delta$.

344. Нека је γ оштар угао и $\alpha-\gamma=90^\circ$ и $\beta+\gamma=90^\circ$. Какав је угао α и какав је угао β и који је од углова α и β већи?

345. Разлика два напоредна угла је прав угао. Израчунати ове углове.

346. Ако је један од четири угла које образују две праве, које се секу, једнак половини правог угла, колико су остали углови?

347. Један од осам углова, који је настао, када су две паралелне праве пресечене трећом једнак је $\frac{3}{5}R$ (R-прав угао). Наћи осталих седам углова.

348. У ком углу је симетрала:

а) ортогонална на краке угла? б) Поклапа се са крацима?

349. Наћи угао између симетрала два напоредна угла.

350. Наћи сваки од два суплементна угла, ако је један од њих

а) један и по пута већи од другог;

б) једнак 30% другог;

в) за $\frac{2}{5}R$ мањи од другог, где је R - прав угао.

351. Два суседна угла су таква да је један од њих за $\frac{2}{5}R$ већи од правог угла, а други за $\frac{1}{3}R$ мањи од правог угла (R-прав угао). Наћи збир ових углова.

352. Да ли су паралелне две праве пресечене трећом, ако је

а) већи од углова код једне праве једнак 135°, а већи од углова код друге праве $\frac{3}{2}R$ (R-прав угао)?

б) Мањи од углова код једне праве једнак 30%R, а мањи од углова код друге праве за $\frac{7}{10}R$ мањи од правог угла?

в) мањи од углова код једне праве једнак 50°, а већи од углова код друге праве за 160% већи од њега?

353. Применом подударност троуглова доказати да је

а) свака тачка на симетрали дужи једнако удаљена од крајева те дужи;

• б) свака тачка на симетрали угла једнако удаљена од оба крака.

354. Ако су углови са паралелним крацима оба оштра или оба тупа, доказати да су њихове симетрале паралелне.

355. Троугао је једнакокраки, ако су две његове странице (краци) исте дужине. Доказати да за једнакокраки троугао важе следећа тврђења:

а) симетрала угла при врху једнакокраког троугла је његова висина и тежишна дуж.

б) Углови на основици троугла су једнаки.

в) Дужине симетрала углова на основици су једнаке.

г) Тежишне дужи, које одговарају крацима су једнаке дужине.

д) Дужине висина, које одговарају крацима, су једнаке.

356. Доказати да је код једнакостраничног троугла:

а) симетрале углова се поклапају са одговарајућим висинама и тежишним дужима;

б) сви углови су једнаки;

в) симетрале свих углова су једнаких дужина;

г) све тежишне дужи су подударне;

д) све висине су подударне.

357. Доказати да права, која је ортогонална на симетрали конвексног неопруженог угла AOB одсеца на крацима тог угла једнакокраки троугао.

358. Доказати да је троугао једнакокраки ако су у њему

а) два угла једнака;

б) симетрала угла поклапа са висином или тежишном дужи из истог темена;

в) две висине подударне.

359. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$ и на продужецима оновице AB одређене су тачке M и N тако да је $M-A-B-N$ и $MA=BN$. Доказати да је и $\triangle MNC$ једнакокраки.

360. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AC=BC$) и E и F тачке правих BC, односно AC такве да је $B-E-C$ и $C-A-F$ и $BE=AF$. Доказати да дуж AB полови дуж EF.

361. У једнакокраком троуглу ABC основица AB је једнака половини крака. Нека је M средиште крака BC а N пресек праве кроз M паралелне са AB и крака AC. Доказати да је права AM симетрала угла BMN.

362. Нека су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи и AA_2, BB_2, CC_2 висине троугла ABC, а $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ тежишне дужи и $A'A'_2$, $B'B'_2$, $C'C'_2$ висине троугла $A'B'C'$. Доказати да су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни ако је:

а) $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BB_1=B'B'_1$;

б) $AB=A'B'$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$, $CC_2=C'C'_2$;

в) $BC=B'C'$, $BB_2=B'B'_2$, $CC_2=C'C'_2$;

г) $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $AA_1=A'A'_1$.

363. Да ли су два троугла подударна, ако су им подударни следећи одговарајући елементи:

а) висина и одсечци, које она образује на одговарајућој страници;

б) висина и углови наспрам ње;

в) две странице и висина, која одговара трећој;

г) две странице и висина, која одговара једној од њих;

д) тежишна дуж и углови на које она дели угао, из чијег темена полази?

364. Ако су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни и D, односно D', унутрашње тачке страница AB, тј. $A'B'$, тако да је $\sphericalangle BCD=\sphericalangle B'C'D'$, доказати да је $AD=A'D'$.

365. Доказати да је медијана (тежишна дуж), конструисана из једног темена троугла једнако удаљена од остала два темена.

366. У ромбу $ABCD$ са углом 60° код темена A, на страницама AB и BC дате су тачке M и N такве да је збир $MB+BN$ једнак страници ромба. Доказати да је троугао MND једнакостранични.

367. Из темена A троугла ABC конструисане су нормале на симетрале спољашних углова у теменима B и C. Ове нормале секу праву BC у тачкама M и N. Доказати да је $MN=AB+BC+CA$.

5.2 НОРМАЛНОСТ ПРАВИХ И РАВНИ

Каже се да је *права a нормална (управна) на раван α* ($a \perp \alpha$) ако права a и α имају заједничку тачку A и права a је нормална на свим правим равни α које садрже тачку A.

Кошијев став. Ако права a продире раван α у тачки A и ако је при томе она управна на двема разним правим b и c, које припадају равни α и садрже тачку A, тада је $a \perp \alpha$.

Теорема о три нормале. Нека права a припада равни α. Ако је права n нормална на раван α у тачки N, $N \notin a$, и ако је тачка A подножје нормале из тачке N на праву a, тада је свака права, која садржи тачку A и сече праву n нормална на правој a.

Нека су α и β две равни које се секу. Каже се да су те *равни међу собом нормалне (управне)* и пише $\alpha \perp \beta$ ако је свака права једне равни, која је нормална на пресечној правој, истовремено нормална и на другој равни.

Теорема о нормалним равнима. Ако је права a нормална на равни β, онда је и свака раван α, која садржи праву a, нормална на равни β.

Угао између мимоилазних правих. Ако су a и b мимоилазне праве, $b_1 || b$ и b_1 сече праву a, тада угао између правих a и b_1 називамо углом мимоилажења правих a и b. Ако је $b_1 \perp a$, каже се да су мимоилазне праве a и b нормалне.

368. а) Нека је права p нормална на правој a равни α. Да ли је обавезно и $p \perp \alpha$?

б) Ако су две праве у простору нормалне на трећој правој, да ли су оне обавезно међу собом паралелне?

в) шта представља скуп тачака свих правих које су нормалне на једној датој правој у њеној датој тачки?

369. У равни π дат је скуп тачака, чија су одстојања од дате тачке P међу собом једнака. Доказати да тачке тог скупа припадају кругу.

370. Три разне полуправе a, b, c, равни π имају заједнички почетак O. Ако полуправа Op захвата са сваком од полуправих a, b, c једнаке углове, доказати да је $Op \perp \pi$.

371. Ако су праве n_1 и n_2 паралелне и n_1 нормална на раван α, доказати да је и $n_2 \perp \alpha$.

372. Ако је права a паралелна равни α, а права b управна на α, доказати да су праве a и b међу собом управне.

373. Нека су права a и раван α управни на правој n. Доказати да је $a || \alpha$.

374. Доказати да је нормална дуж, конструисана из неке тачке A на неку раван α краћа од сваке друге дужи конструисане из исте тачке до равни α.

375. У равни α дате су дужи AB и CD тако да је тачка O средиште обе те дужи. Ван равни α дата је тачка S таква да је $AS = BS$ и $CS = DS$. Доказати да је права SO управна на равни α.

376. Дата је права a и тачка $A \notin a$. Наћи скуп тачака подножја нормале из A на равни које пролазе кроз a.

377. Са исте стране равни α дате су тачке A и B. Одредити у равни α тачку C са својством да је $AC + CB$ минимално.

378. Дате мимоилазне праве p и q са заједничком нормалом PQ ($P \in p$, $Q \in q$) пресечене су правом c тако да је $AP = BQ$ ($p \cap c = \{A\}, q \cap c = \{B\}$). Доказати да је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QBA$.

379. Нека је раван β нормална на равни α и $A \in \beta$. Ако је кроз тачку A конструисана права $AB \perp \alpha$ ($B \in \alpha$), тада ова права припада равни β. Доказати.

380. Нека је n дата права и равни α и β такве да је $\beta || n$ и $\alpha \perp n$. Доказати да је $\alpha \perp \beta$.

381. Ако је права n управна на равни α, доказати да је права n управна на све праве равни α.

382. Нека су a и b две праве равни α, које се секу и p права таква да је $p \perp a$ и $p \perp b$. Доказати да је $p \perp \alpha$.

383. Нека су A, B, C и D четири некомпланарне тачке такве да је $AB \perp CD$, $AD \perp BC$ и $AC \perp BD$. Ако је угао BAC прав, доказати да су и углови CAD и BAD прави.

384. У равни α дат је правоугаоник $ABCD$. Нека је S тачка ван те равни таква да су равни β и γ одређене тачкама A, B и S, односно A, D и S управне на α. Доказати да су сви следећи и троуглови правоугли: SAB, SAD, SBC, SDC.

5.3. ВЕКТОРИ

Вектор $\vec{a}$ је скуп свих оријентисаних дужи исте дужине, истог правца и истог смера.

Интензитет $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ је дужина оријентисане дужи $\overrightarrow{AB}$ која представља вектор $\vec{a}$.

Нула вектор $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

Вектор супротан вектору $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ је $-\vec{a} = \overrightarrow{NM}$.

Сабирање вектора. За векторе $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, вектор $\overrightarrow{AC}$ је збир вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, тј. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, односно $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$ (сабирање вектора надовезивањем).

Својства сабирања вектора:

1° $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,
2° $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$,
3° $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$,
4° $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$,
5° $\vec{x} + (-\vec{y}) = \vec{x} - \vec{y}$ (разлика вектора).

Производ броја и вектора. Производ броја $k \in \mathbf{R}$ и вектора $\vec{x}$ је вектор $k\vec{x}$ одређен условима:

1° Интензитет вектора $k\vec{x}$ је $|k\vec{x}| = |k||\vec{x}|$;
2° Вектори $\vec{x}$ и $k\vec{x}$ су истог правца;
3° Вектори $\vec{x}$ и $k\vec{x}$ имају исти смер, ако је $k > 0$ и супротан смер ако је $k < 0$.

За векторе $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и бројеве $k, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ важи

1° $k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y}$,
2° $(k_1 + k_2)\vec{x} = k_1\vec{x} + k_2\vec{x}$,
3° $k_1(k_2\vec{x}) = (k_1k_2)\vec{x}$,
4° $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Линеарна комбинација вектора $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}$ је вектор

$$k_1\vec{x_1} + k_2\vec{x_2} + \cdots + k\vec{x_n}, \quad k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbf{R}.$$

Линеарна зависност вектора. Нека су $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}$ дати вектори. Ако постоје бројеви $k_1, k_2, \ldots, k_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$k_1\vec{x_1} + k_2\vec{x_2} + \cdots + k_n\vec{x_n} = \vec{0} \, (*)$$

онда се каже да су ови вектори линеарно зависни. Ако је $(*)$ испуњено само за $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, каже се да су вектори $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}$ линеарно независни.

Два ненула вектора $\vec{x}, \vec{y}$ су колинеарни ако и само ако су линеарно зависни.

Три ненула вектора $\vec{x}, \vec{y}$ и $\vec{z}$ су компланирани ако и само ако су линеарно зависни.

385. Дати су колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструисати векторе: $\vec{v_1} = \vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{v_2} = 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$; $\vec{v_3} = -2\vec{a} - \vec{b}$.

386. Дати су у равни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Конструисати векторе: $\vec{v_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{v_2} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$; $\vec{v_3} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - 2\vec{c}$.

387. Дате су у равни полуправе Ox, Oy, Oz. Полуправа Oy је носач вектора $\overrightarrow{AB}$. Разложити вектор $\overrightarrow{AB}$ на компоненте паралелне полупавама Ox и Oz.

388. Дат је паралелограм $ABCD$. Тачка O је пресек његових дијагонала, а тачка S је произвољна у равни паралелограма. Изразити вектор $\overrightarrow{SO}$ векторима $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

389. Дат је правилни шестоугао $ABCDEF$. Нека је $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$. Изразити помоћу $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторе $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}$.

390. Дат је правилни шестоугао $ABCDEF$. Векторе који се поклапају са страницама шестоугла изразити помоћу вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

391. Нека је C средиште дужи AB и O произвољна тачка. Доказати да је $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

392. Нека су O, A, B, C четири произвољне тачке равни такве да је $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Доказати да је C средиште дужи AB.

393. Средња линија троугла паралелна је са трећом страницом и једнака њеној половини. Доказати.

394. Тачке C и D деле дуж AB на три једнака одсечка. Тачка O је произољна изван праве AB. Ако је $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, изразити векторе $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ помоћу $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

395. Дате су три тачке A, B, C на правој l и тачка M изван те праве. Ако је $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$, изразити вектор $\overrightarrow{MC}$ векторима $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$.

396. Дат је правилни шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Доказати идентичност: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_6} = 3\overrightarrow{A_1A_4}$.

397. Ако су A, B, C темена троугла доказати да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

398. Нека су M и N редом средишта дужи AB и AC, P средиште дужи MN и O произвољна тачка. Доказати да је $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$.

399. У четвороуглу $M_1M_2M_3M_4$ тачке P и Q су средишта дијагонала M_1M_3 и M_2M_4. Изразити $\overrightarrow{PQ}$ преко $\overrightarrow{M_1M_4}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$.

400. Нека су $M_1, M_2, \ldots, M_7$ редом средишта страница $AB, BC, \ldots, GA$ седмоугла $ABCDEFG$. Доказати да је $\overrightarrow{BA} = 2(\overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_4M_5} + \overrightarrow{M_6M_7})$.

401. Нека су A_1, B_1 и C_1 редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC.

а) Израчунати $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

б) Ако је T тежиште троугла ABC, израчунати $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}$.

в) Нека је O произвољна тачка и T тежиште троугла ABC. Доказати да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

402. Нека су M и N средишта страница AB и DC четвороугла $ABCD$. Доказати да је $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

403. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Доказати да се од дужи AA_1, BB_1 и CC_1 може конструисати троугао.

404. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори. Када су вектори $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ колинеарни?

405. Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни вектори. Одредити реалан број a тако да вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ буду колинеарни, ако је:

а) $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{y} = a\vec{i} - \vec{j}$;

б) $\vec{x} = \vec{i} + a\vec{j}$, $\vec{y} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$;

в) $\vec{x} = a\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{y} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

406. Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни вектори. Изразити $\vec{a}$ преко $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако је:

а) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j}$;

в) $\vec{a} = 7\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

407. Одредити вредност реалних параметара a и b тако да вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ буду колинеарни ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ су линеарно независни вектори):

а) $\vec{x} = a\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{y} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + b\vec{k}$;

б) $\vec{x} = 3\vec{i} + \vec{j} + a\vec{k}$, $\vec{y} = b\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

408. Ако су вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ линеарно независни, показати да су вектори $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ компланарни:

а) $\vec{x} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{y} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{z} = 4\vec{k} - 2\vec{i}$;

б) $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{y} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{z} = 5\vec{i} + 16\vec{j} + 10\vec{k}$.

409. Дата су три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ од којих ниједан није нула-вектор и свака два су неколинеарна. Ако је $\vec{a} + \vec{b}$ колинеаран са $\vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ колинеаран са $\vec{a}$, наћи збир $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

5.4. ТРОУГАО

1. Углови троугла.

1° Збир унутрашњих углова троугла једнак је опруженом углу;

2° Збир спољашних углова троугла једнак је пуном углу;

3° Спољашњи угао троугла једнак је збиру два несуседна унутрашња угла.

2. Однос страница и углова у троуглу.

1° Ма која страница троугла мања је од збира а већа од разлике остале две странице;

2° Наспрам једнаких страница налазе се једнаки углови и обрнуто;

3° Наспрам веће странице налази се већи угао и обрнуто;

4° Наспрам мање странице троугла лежи оштар угао троугла;

5° Најдужа страница тупоуглог троугла је наспрам тупог угла.

3. Значајне тачке троугла.

1° Центар уписаног круга у троуглу је пресечна тачка симетрала унутрашњих углова (бисектриса) троугла;

2° Центар описаног круга у троуглу је пресечна тачка симетрала страница троугла;

3° Ортоцентар троугла је пресечна тачка висина троугла;

4° Тежиште троугла је пресечна тачка тежишних дужи (медијана) у троуглу (тежишне дужи троугла секу се у односу 2:1).

410. Израчунати углове, које образују по две симетрале углова α, β и γ у троуглу ABC.

411. Бисектрисе двају унутрашњих углова троугла секу се под углом који је једнак трећем унутрашњем углу тог троугла. Одредити тај трећи угао.

412. У троуглу ABC израчунати оштар угао:

а) између симетрала углова A и B, ако је $\sphericalangle A = 84°$ и $\sphericalangle C = 43°$;

б) између симетрала углова A и B, ако је $\sphericalangle C = 40°$.

в) између симетрале угла A, $\sphericalangle A = 64°$ и висине из темена B;

г) између медијане једнакокраког троугла, конструисане на основицу и симетрале угла на основици, ако је угао при врху 70°.

413. Висина, која одговара краку, образује са основицом једнакокраког троугла угао δ. Изразити преко δ све спољашње и све унутрашње углове троугла.

$\alpha = \beta = 90° - \delta$

$\gamma = 2\delta$

414. Доказати да је катета правоуглог троугла, наспрам угла од $30°$ једнака половини хипотенузе.

415. Висина, која одговара краку, образује са другим краком једнакокраког троугла угао φ. Преко φ изразити све спољашње и унутрашње углове троугла.

416. Угао при врху једнакокраког троугла је γ. Изразити преко γ угао који образује висина, која одговара краку: а) са краком;

б) са основицом троугла.

417. Ако су $\alpha = 52°$ и $\beta = 68°$ унутрашњи углови неког троугла израчунати углове које образују симетрале:

а) унутрашњих углова у троуглу;

б) спољашњих углова троугла.

418. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки са основицом AB и нека је AD симетрала угла BAC. Израчунати углове у $\triangle ABC$ ако је $\sphericalangle ADB = 75°$.

419. У троуглу ABC углови:

а) који граде висина и симетрала угла код темена A,

б) који граде симетрала спољашњег угла код темена A и права BC, оба су једнаки полуразлици углова код темена B и C ($\sphericalangle B > \sphericalangle C$). Доказати.

420. Симетрала угла, кога образују две неједнаке странице троугла дели наспрамну страницу на две дужи, тако да је већа од њих ближа већој страници. Доказати.

421. Нека је M произвољна тачка у $\triangle ABC$. Доказати да је $\sphericalangle ACB < \sphericalangle AMB$.

422. Нека је AM симетрала угла у троуглу ABC ($M \in BC$). Доказати да је $BM < AB$ и $MC < AC$.

423. Нека су P и Q редом тачке на катетама AB и AC правоуглог $\triangle ABC$. Доказати да је $PQ < BC$.

424. Троугао ABC има унутрашње углове $\beta = 15°$ и $\gamma = 30°$. Права, која садржи тачку A и нормална је на AB сече дуж BC у тачки D. Доказати да је $2AC = BD$.

425. Доказати:

а) ако је дужина медијане троугла једнака половини дужине одговарајуће странице, тада је троугао правоугли;

б) У правоуглом троуглу дужина медијане, која одговара хипотенузи, једнака је половини дужине хипотенузе.

426. Доказати да је у правоуглом троуглу симетрала правог угла у исто време и симетрала угла који образују висина и тежишна дуж над хипотенузом.

427. Ако је угао који граде тежишне дужи над крацима једнакокраког троугла прав, доказати да је висина која одговара основици једнака $\frac{3}{2}$ основице.

428. Дат је једнакокраки троугао ABC $(AC = BC)$. На краку AC одабране су две тачке M и N тако да је $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBN$ и $MN = MB$, при чему је $A - M - N$. Колики је угао ABN?

429. У троуглу ABC дуж BD је висина, а BM $(M \in AC)$ је симетрала угла. У троуглу BMC дуж MK је висина. Ако је $\sphericalangle MBD = 20°$, а $\sphericalangle BMK = 50°$, одредити углове троугла ABC.

430. У једнакокраком троуглу ABC $(AC = BC)$ симетрала угла на основици и симетрала угла при врху секу се у тачки S тако да је $\sphericalangle ASC = 110°$. Одредити углове троугла ABC.

431. У једнакокраком троуглу ABC $(AC = BC)$ права p садржи теме C и сече страницу AB у тачки M тако да је $AC = AM$ и $CM = MB$. Одредити углове троугла ABC.

432. У правоуглом троуглу угао између висине и тежишне дужи која одговара хипотенузи је $10°$. Колики су оштри углови овог троугла?

433. У троуглу ABC $(BC > CA)$ разлика углова $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ је $30°$. Ако је D тачка странице BC таква да важи $CD = CA$, наћи $\sphericalangle BAD$.

434. Нека су P, Q, R редом средишта страница BC, CA, AB троугла ABC и нека је M подножје висине из темена A. Доказати да је $MQ = PR$.

435. Дат је $\triangle ABC$. Доказати да се симетрала угла код темена A и симетрале спољашњих углова код темена B и C секу у једној тачки. Доказати да постоји круг са средиштем у тој тачки који додирује страницу BC и подужетке страница AB и AC.

436. Доказати да сваки оштроугли троугао има два угла чија је разлика мања од $30°$.

437. Тежишна дуж је мања од полузбира страница између којих се налази и већа од разлике тог полузбира и половине треће странице. Доказати.

438. Тачка M припада симетрали спољашњег угла у темену A троугла ABC. Доказати да је $MB + MC > AB + AC$.

439. У једнакокраком $\triangle ABC$ $(AC = BC)$ угао код темена C је $108°$. Доказати да је дужина висине CD једнака половини дужине симетрале AE унутрашњег угла A.

5.5. ЧЕТВОРОУГАО, МНОГОУГАО

1. Четвороугао, многоугао

1° Збир унутрашњих углова четвороугла једнак је пуном углу;

2° Збир спољашњих углова четвороугла једнак је пуном углу;

3° Четвороугао је паралелограм ако и само ако важи било који од наведених услова:

- углови на свакој страници су суплементни;
- оба пара наспрамних углова су парови међусобно једнаких углова;
- оба пара наспрамних страница су парови међусобно једнаких страница;
- дијагонале се узајамно полове.

2. Многоугао (полигон).

1° Број свих дијагонала из једног темена многоугла од n страница је $d_n = n - 3$;

2° Број свих дијагонала n-тоугла је $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$;

3° Збир свих унутрашњих углова n-тоугла је $S_n = (n-2)\cdot 180°$;

4° Централни угао правилног n-тоугла је $\varphi = \dfrac{360°}{n}$;

5° Унутрашњи угао правилног n-тоугла је $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$;

6° Спољашњи угао правилног n-тоугла је $\beta = \dfrac{360°}{n}$.

440. Израчунати углове паралелограма ако је један већи од другог за $40°$.

441. Доказати:

а) да дијагонале деле ромб на четири подударна троугла;

б) да су два ромба подударна ако су им дијагонале једнаке.

442. а) Ако се у неки паралелограм може уписати круг, доказати да је тај паралелограм ромб.

б) Ако се око неког паралелограма може описати круг, доказати да је тај паралелограм правоугаоник.

443. У паралелограму $ABCD$ теме A је спојено са средиштем L странице BC, теме B са средиштем M странице CD, теме C са средиштем N странице DA и теме D са средиштем K странице AB. Доказати да је четвороугао, који се добија у пресеку конструисаних правих, паралелограм.

444. У правоугаонику $ABCD$ страница BC је два пута дужа од AB. Из тачке M на страници BC дужи AB и AD виде се под једнаким угловима. Израчунати те углове.

445. У правоугаонику $ABCD$ нормала AE конструисана из темена A на дијагоналу BD дели прав угао на делове у односу 3:1. Израчунати угао између те нормале и друге дијагонале.

446. Ако су A_1, B_1, C_1, D_1, редом средишта страница BC, CD, DA, AB паралелограма $ABCD$ и праве DD_1 и BB_1 секу праву AA_1 у тачкама M и N, доказати да је $MN = \frac{2}{5}AA_1$.

447. Нека су M и N средишта страница BC и CD паралелограма $ABCD$. Праве AM и AN секу дијагоналу BD у тачкама K и L. Доказати да је $DL = LK = KB$.

448. Нека је $ABCD$ паралелограм и на дијагонали AC одређене тачке E и K такве да је $AE = CK$. Доказати да је и четвороугао $BEDK$ паралелограм.

449. На страницама AB, BC, CD и DA, редом, паралелограма $ABCD$ одређене су тачке N, K, L, M такве да је $BN = BK = DM = DL$. Доказати да је $NKLM$ паралелограм.

450. Дат је паралелограм $ABCD$. Дијагонала AC дели оштар угао BAD на два дела који се разликују за $20°$. Висина паралелограма из темена D, која има подножје E на страници BC, сече дијагоналу AC у тачки H тако да је $\sphericalangle AHD = 50°$. Одредити углове паралелограма.

451. Ако су P и Q тачке у којима средња линија паралелна основицама сече дијагонале трапеза, доказати да је дуж PQ једнака полуразлици основица.

452. Доказати да је трапез који има једнаке дијагонале једнакокрак.

453. Доказати да су два трапеза чије су све одговарајуће странице једнаке подударни.

454. Нека је p права у равни троугла ABC која не сече троугао и нека су K, L, M средишта страница $\triangle ABC$. Доказати да је збир растојања темена троугла ABC од праве p једнак збиру растојања темена троугла KLM од праве p.

455. Ако се у једакокраки трапез може уписати круг, доказати да је крак тог трапеза једнак средњој линији паралелној основицама.

456. Ако су дијагонале неког трапеза нормалне, доказати да су његове средње линије једнаке.

457. Одредити дужину мање основице једнакокраког трапеза, ако је она једнака бочној страници, обим трапеза је 28, а средња дуж 9.

458. У трапезу $ABCD$ средња дуж је дужине 18. Права, кроз D, паралелна краку BC, сече основицу AB у тачки E. Одредити дужине основица трапеза, ако је $AE = 1$.

459. Симетрале унутрашњих углова на једној од бочних страница трапеза секу се под правим углом у тачки која припада средњој дужи тог трапеза. Доказати.

460. Дат је паралелограм $ABCD$. На правим AB и BC одређене су, редом, тачке H и K тако да су троуглови KAB и HCB једнакокраки ($KA = AB, HC = CB$). Доказати да је и троугао KDH такође једнакокраки.

461. Нека су M и N средишта основица AB и CD ($AB > CD$) трапеза $ABCD$. Ако је дуж MN једнака $\frac{1}{2}(AB - CD)$, доказати да је збир унутрашњих углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ тог трапеза прав угао и обрнуто.

462. Доказати да су дужи које спајају средишта наспрамних страница делтоида једнаке.

463. Постоји ли четвороугао који има три угла мања од $1°$?

464. Постоји ли конвексан многоугао код ког су збирови унутрашњих и спољашњих углова у односу 15:4?

465. Ако се број страница једног многоугла смањи за 1, број његових дијагонала се смањи за 8. Који је то многоугао?

466. Ако је α мерни број једног угла у правилном многоуглу, показати да је број $k = \dfrac{2\alpha}{180° - \alpha}$ увек природан број.

467. Колико највише оштрих углова може имати конвексан многоугао?

5.6. КРУЖНА ЛИНИЈА (КРУЖНИЦА, КРУГ)

Периферијски угао. Угао чије теме припада кружној линији k, а краци су тетиве тог круга, зове се периферијски угао кружне линије k.

Централни угао. Угао чије је теме центар кружне линије зове се централни угао.

- Централни угао је два пута већи од одговарајућег периферијског угла;
- Сви периферијски углови над истим луком неке кружне линије једнаки су или суплементни;
- Периферијски угао над пречником је прав;
- Троугао чија је једна страница пречник описаног круга је правоугли.

Тангентни угао. Угао између тетиве AB и тангенте t једнак је периферијском углу над тетивом AB.

Тетивни четвороугао је четвороугао око којег се може описати круг.

- Наспрамни углови код тетивног четвороугла су суплементни ($\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$).

Тангентни четвороугао је четвотроугао у који се може уписати круг.

- Код тангентног четвороугла $ABCD$ збир наспрамних страница је једнак ($AB + CD = AD + BC$).

468. Кроз крајеве пречника AB круга конструисане су паралелне тетиве AM и BN. Доказати да је $AM = BN$.

469. Два круга се споља додирују у тачки P. Нека су A и B додирне тачке ових кругова са једном њиховом заједничком спољашњом тангентом. Доказати да је $\sphericalangle APB = 90°$.

470. Нека су k и k' концентрични кругови и нека k' има већи полупречник. Доказати да су све тангентне дужи на круг k повучене из тачака круга k' једнаке.

471. Дата су два пречника AB и CD истог круга. Доказати да тангенте на тај круг у тачкама A, B, C, D образују четвороугао чије су све странице једнаке.

472. Троугао ABC је уписан у круг k. Знајући углове α, β и γ овог троугла, израчунати углове троугла који образују тантенте на круг k у тачкама A, B, C.

473. Израчунати угао између тангенте и тетиве ако тетива дели круг на два лука у размери 3:7.

474. Израчунати периферијски угао над кружним луком једнаким $\frac{1}{12}$ круга.

475. Тачкама A и B круг је подељен на два кружна лука који стоје у размери 5:7. Израчунати периферијске углове који одговарају кружним луковима.

476. Из једне крајње тачке пречника круга k конструисане су тангента и сечица које образују угао $\alpha = 20°30'$. Израчунати у степенима мањи лук између тангенте и сечице.

477. У тетивном четвороуглу два унутрашња угла на једној страници износе 152° и 134°. Одредити друга два угла четвороугла.

478. Нека су K, L, M тачке у којима уписани круг додирује странице BC, CA, AB троугла ABC. Доказати да је $AM = AL = s - a$, $BM = BK = s - b$, $CK = CL = s - c$ (s - полуобим троугла, $AB = c, BC = a, CA = b$)).

479. У тангентном четвороуглу странице износе $5cm$, $9cm$ и $15cm$. Израчунати четврту страницу четвороугла.

480. У кругу $k(O,r)$ конструисана је тетива AB. На правој AB одређена је тачка C тако да је $A-B-C$ и $BC=r$. Права CO сече круг у тачки D тако да је $C-O-D$. Доказати да је $\sphericalangle AOD = 3\sphericalangle ACD$.

481. Из тачке B ван круга, са центром у O, конструисане су тангентне дужи BA и BC на круг. Нека је M произвољна тачка круга, а DE одсечак тангенте круга конструисане у M, између кракова угла ABC. Доказати да величина угла DOE не зависи од положаја тачке M.

482. Из тачке C ван круга $k(O,r)$ конструисане су тангентне дужи CA и CB на круг k. Права из A, нормала на BC, сече OC у тачки D. Доказати да је $AD=r$.

483. Кругови k_1 и k_2 додирују се споља у тачки M. Нека су AB и CD сечице тих кругова које садрже тачку M $(A,C\in k_1, B,D\in k_2)$. Доказати да су праве AC и BD паралелне.

484. У темену B конструисана је тангента t круга описаног око троугла ABC. Ако права p, паралелна са t, сече странице BA и BC у тачкама D и E, доказати да је четвороугао $ACED$ тетивни.

485. Из тачке A конструисане су на дати круг тангентне дужи AM и AN. Нека је P тачка на мањем кружном луку $\overset{\frown}{MN}$. Кроз P констуисана је трећа тангента круга која сече праве AM и AN у тачкама B и C. Доказати да је обим троугла ABC константан и једнак $2AM$.

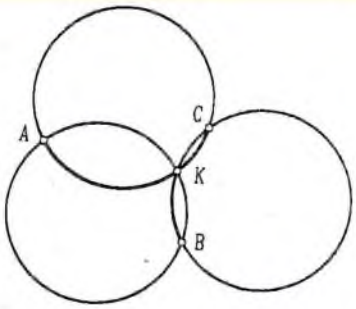
486. Доказати да је код правоуглог троугла збир катета једнак збиру пречника описаног и уписаног круга.

487. Нека је у правоуглом троуглу c - дужина хипотенузе, a и b - катета, а r-полупречник уписаног круга. Доказати да је

а) $2r+c\geq 2\sqrt{ab}$; б) $a+b+c>8r$.

488. Око круга са центром O описан је четвороугао $ABCD$. Доказати да је $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$.

489. У равни су дата три круга једнаких полупречника, који се секу у тачки K, као на слици. Доказати да је збир осенчених лукова KA, KB и KC једнак полукругу истог полупречника.



Сл. уз зад. 489

490. Нека је B произвољна тачка дужи AC. Над дужина AB, BC и AC, као над пречницима, констуисани су кругови k_1, k_2, k_3. Кроз тачку B конструисана је призвољна права, која сече круг k_3 у тачкама P и Q, а кругове k_1 и k_2 у R и S (редом). Доказати да је $PR = QS$.

491. Круг уписан у ромб $ABCD$ додирује странице ромба AB, BC, CD и DA редом у тачкама E, F, G и H. Доказати да је четвороугао $EFGH$ правоугаоник.

492. Нека је S средиште уписаног круга троугла ABC. Права AS сече круг описан око $\triangle ABC$, осим у A, још и у тачки D. Доказати да је $CD = SD = BD$.

493. Доказати да многоугао мора бити правилан ако задовољава један од следећих услова:

а) тетивни је и има једнаке странице;

б) тангентни је и има једнаке углове.

494. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да се кругови уписани у троуглове ABC и ACD додирују. Доказати да је четвороугао тангентни.

495. Дати су углови $\alpha, \beta < 180°$. Доказати да постоји четвороугао који је и тетивани и тангентни и код ког су два суседна угла једнака датим угловима α, β.

496. Дат је произвољан правилан многоугао $ABCDE\ldots$ са центром у тачки O. На продужецима његових страница AB и BC дате су тачке M и N тако да важи $BM = CN$. Доказати да је четвороугао $OBMN$ тетиван.

497. Доказати да тачке, у којима се секу симетрале унутрашњих углова конвексног четвороугла, представљају темена тетивног четвороугла (или припадају једној правој).

5.7. КОНСТРУКЦИЈЕ ЛЕЊИРОМ И ШЕСТАРОМ

5.7.1. УВОДНИ ЗАДАЦИ

498. 1° Конструисати нормалу из дате тачке P на дату праву p ако:

а) $P \in p$; б) $P \notin p$.

2° Конструисати праву паралелну датој правој m кроз дату тачку M, $M \notin m$.

499. Конструисати тангенте из дате тачке P на дати круг $k(O, r)$ ако

а) $P \in k$; б) $P \notin k$.

500. Дате су тачке A и B. Одредити тачку C која је једнако удаљена од тачака A и B и припада:

а) датој правој p; б) датом кругу $k(O, r)$.

501. Конструисати троугао ABC ако је дато:

а) a, b, c; б) a, β, γ; в) a, b, γ;

г) α, β, h_c; д) a, c, $\sphericalangle C = 90°$; ђ) h_c, β, $\sphericalangle C = 90°$.

502. Конструисати тангенту на дати круг која је паралелна са датом правом.

5.7.2. ТРОУГАО

Конструисати троугао ABC ако су дати следећи његови елементи (задаци 503-510):

503. a, α, h_b.

504. а) a, $b+c$, α; б) a, $b-c$ $(b>c)$, α.
в) h_a, α, $a+b+c$; г) $b-c$, h_b, α.

505. а) h_a, β, R; б) h_a, t_a, R.

506. а) a, α, h_a; б) a, α, t_a.

507. а) h_a, t_b, t_c; б) b, c, h_a;
в) a, β, t_a; г) s_β, α, γ;
д) a, t_b, t_c; ђ) b, c, t_a;
е) a, t_c, γ; ж) $a-b$, c, γ.

508. а) c, t_b, h_a; б) a, h_b, t_b.

509. a, t_a, R.

510. $b, c, \beta-\gamma$ $(\beta>\gamma)$.

511. Конструисати правоугли троугао $(\gamma = 90°)$ ако је дато:
а) t_a, t_c; б) R, r; в) $b, a+c$;
г) $\beta, b-a$; д) $c, a+b$; ђ) $\beta, c-b$.

512. Конструисати једнакокраки троугао ABC са основицом AB ако је дато:
а) h_a и h_c;
б) крак BC и на њему подножје P висине из темена A.

513. Конструисати троугао ABC ако су дати:
а) $\beta, \gamma, b+c$; б) β, γ, s; в) b, c, h_b;
г) b, h_a, h_b; д) $b, a+c, h_c$; ђ) b, c, h_b;
е) α, h_b, h_c; ж) h_a, h_b, β; з) c, h_a, s_α.

514. Конструисати једнакокраки троугао ABC (BC-основица), ако је дато:
а) $a, b+h_a$; б) s, h_a; в) c, h_a;
г) β, s_β; д) h_a, t_b; ђ) $a, b-h_a$.

515. Конструисати троугао ABC ако су дати елементи:

а) $a, b-c, r$; б) a, α, r; в) β, h_a, h_b;

г) s, α, h_a; д) h_a, s_α, r; ђ) b, s_α, α.

516. Конструисати троугао ABC ако су дате три тачке - средишта уписаног, описаног и споља уписаног круга.

5.7.3. ЧЕТВОРОУГАО

517. Конструисати правоугаоник ако је дато:

а) дијагонала и разлика суседних страница;

б) збир суседних страница и угао између дијагонала;

в) угао између дијагонала и разлика суседних страница;

г) страница и разлика дијагонале и друге странице.

518. Конструисати квадрат ако је дата разлика дијагонале и странице.

519. Конструисати паралелограм $ABCD$ ако су познати следећи елементи:

а) страница AB и обе висине;

б) страница AB, угао код темена A и $BC + AC$;

в) разлика страница, једна дијагонала и угао;

г) разлика страница, једна дијагонала и висина из истог темена као та дијагонала;

д) збир страница, једна дијагонала и висина која није из истог темена као та дијагонала;

ђ) обе дијагонале и једна висина;

е) обе дијагонале и једна страница.

520. Конструисати трапез ако су дати следећи елементи:

а) све четири странице;

б) већа основица, средња линија и углови на мањој основици;

в) разлика основица, краци и средња линија;

г) основице и дијагонале;

д) основице AB и CD, крак BC и угао код темена A;

ђ) збир основица, краци и један угао на дужој основици.

521. Конструисати ромб ако је позната дужина једне његове дијагонале и полупречник уписаног круга.

522. Конструисати четвороугао $ABCD$ ако је дат троугао KLM такав да су тачке K, L, M средишта три једнаке странице четвороугла $ABCD$.

5.7.4. КРУЖНА ЛИНИЈА (КРУЖНИЦА, КРУГ)

523. Кроз дату тачку A ван датог круга k конструисати праву p тако да тетива која се добија у пресеку ове праве са кругом има дату дужину d.

524. Дате су две тачке и круг. Кроз дате тачке конструисати две паралелне праве тако да оне на кругу одсецају једнаке тетиве.

525. Конструисати заједничке тангенте два дата круга.

526. Конструисати круг k који садржи дате тачке A и B и сече дати круг l тако да је дата права p паралелна заједничој тетиви кругова k и l.

527. Конструисати круг датог полупречника који додирује дату праву и дати круг.

528. Конструисати круг који садржи дату тачку A и додирује дати круг k у датој тачки M.

529. Дата је тачка A и круг k са центром $O \neq A$. Конструисати круг l са центром A тако да заједничка спољашња тангента кругова k и l има дату дужину m.

530. Из дате тачке M, која се налази ван другог круга, конструисати сечицу тако да је њен спољашњи део једнак њеном унутрашњем делу.

5.8. ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

5.8.1. ТРАНСЛАЦИЈА

За сваки вектор $\vec{v}$ дефинисана је *транслација* $T_{\vec{v}}$. То је пресликавање које произвољну тачку A слика у тачку $A' = T_{\vec{v}}(A)$ тако да важи $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$. Транслацијом се свака права пресликава у паралелну праву.

531. Дат је троугао ABC. Одредити његову слику насталу транслацијом при којој се: а) теме A пресликава у B; б) теме B пресликава у C; в) теме A пресликава у тежиште троугла.

532. а) Дати су кругови k_1 и k_2 и вектор $\vec{r}$. Одредити тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тако да важи $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$.

б) Дат је круг k и вектор $\vec{r}$. Конструисати тетиву MN датог круга тако да је $\overrightarrow{MN} = \vec{r}$.

533. Конструисати паралелограм $ABCD$ ако су дата темена A и B, а темена C и D припадају датом кругу k.

534. Нека је $\triangle A'B'C'$ добијен транслацијом троугла ABC. Нека је $AB' \cap A'B = \{R\}$, $BC' \cap B'C = \{P\}$ и $CA' \cap C'A = \{Q\}$. Доказати да је $\triangle PQR$ подударан троуглу чија су темена средишта страница троугла ABC.

535. Два круга полупречника r додирују се у тачки K. На једном је дата тачка A, а на другом тачка B тако да важи и $\sphericalangle AKB = 90°$. Доказати да је $AB = 2r$.

536. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB троугла ABC. Нека су O_1, O_2, O_3 редом центри описаних кругова за троуглове AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, а S_1, S_2, S_3 нека су центри њихових уписаних кругова. Доказати да је $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle S_1S_2S_3$.

537. Конструисати четвороугао ако су дате три његове странице и углови на четвртој страници.

538. Конструисати четвороугао ако су дата три његова угла и две наспрамне странице.

5.8.2. ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

Централна симетрија у односу на тачку S је пресликавање S_s. које произвољну тачку A пресликава у тачку $A' = S_s(A)$ такву да је S средиште дужи AA'.

Свака права се централном симетријом пресликава у паралелну праву.

539. Дат је квадрат $ABCD$ и тачка O ван квадрата у његовој равни. Одредити слику квадрата насталу централном симетријом са центром у тачки: а) A; б) B; в) O.

540. а) Дати су кругови k_1 и k_2 који се секу у тачки A. Конструисати праву која садржи тачку A и сече кругове по подударним тетивама.

б) Дате су праве p и q које се секу и тачка A ван њих. Кроз тачку A конструисати праву a тако да важи $a \cap p = \{P\}$, $a \cap q = \{Q\}$ и $PA = AQ$.

541. Дат је круг k, права p и тачка A. Конструисати тачке $K \in k$ и $P \in p$ тако да A буде средиште дужи KP.

542. Нека су M и N тачке на страницама AB и CD паралелограма $ABCD$ такве да важи $AM = CN$. Доказати да дуж MN садржи центар паралелограма.

543. Дат је угао xOy и тачке A и C у њему. Конструисати паралелограм $ABCD$ тако да темена B и D припадају крацима Ox и Oy.

544. Може ли фигура коју чине два круга бити централно симетрична? Описати све случајеве када се то дешава.

545. Наспрамне странице неког шестоугла су једнаке и паралелне. Доказати да је такав шестоугао централно симетричан. Мора ли бити правилан?

546. Конструисати квадрат $ABCD$ ако је дат његов центар O, једна тачка P на правој AB и једна тачка Q на правој CD.

5.8.3. ОСНА СИМЕТРИЈА

За сваку праву p дефинисана је *осна симетрија* S_p. То је пресликавање које произвољној тачки A додељује тачку $A' = S_p(A)$ такву да је p симетрала дежи AA'. При овом пресликавању свака тачка праве p остаје на месту, док се тачке из једне од двеју полуравни одређених правом p пресликавају попут огледала у тачке друге полуравни.

547. Колико оса симетрије имају следеће фигуре:

а) пар правих које се секу; б)пар паралелних правих; в)пар тачака; г) једнакостранични троугао; д) квадрат; ђ) круг; е) круг и тачка; ж) круг и права; з) два круга?

548. Дата је тачка M у кругу k и права p. Конструисати једакокраки троугао уписан у k тако да му основица буде паралелена са p, а да M припада једном краку.

549. Дата је права p, кругови k и l и дуж d. Конструисати ромб чија једна дијагонала припада правој p и има дужину d, а преостала два темена припадају круговима k и l.

550. Права p сече дуж AB. Конструисати тачку $X \in p$ тако да p буде симетрала угла AXB.

551. Конструисати $\triangle ABC$ ако је дато теме A и праве p и q које су симетрале углова троугла у теменима B и C.

552. Доказати да међу свим троугловима ABC са истом основицом AB и датом дужином висине h_c једнакокраки има најмањи обим.

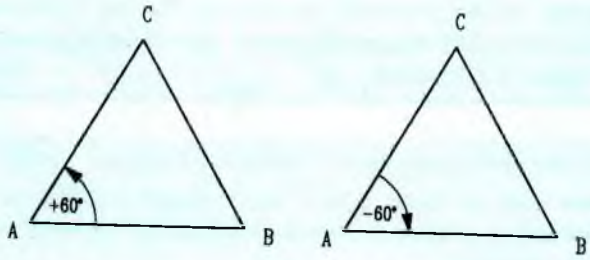
553. Доказати да не постоји троугао који има тачно две осе симетрије.

5.8.4. РОТАЦИЈА

За сваку тачку O у равни и сваки угао α дефинисана је *ротација* $R_{O,\alpha}$. Она произвољну тачку A равни пресликава у тачку $A' = R_{0,\alpha}(A)$ тако да је $OA = OA'$ и $\sphericalangle AOA' = \alpha$. Ротација се при томе врши у позитивном смеру, тј. супротно од смера кретања казаљки на сату.

Ротација око тачке O за угао α у негативном смеру означава се са $R_{0,-\alpha}$ и исто је што и ротација у позитивном смеру за угао $360^\circ - \alpha$: $R_{0,-\alpha} = R_{0,360^\circ-\alpha}$. На пример, ако је једнакостранични троугао ABC позитивно оријентисан (тј. ако редослед темена A, B, C прати кретање у смеру супротном од кретања казаљки), тада је $C = R_{A,60^\circ}(B)$, а ако је $\triangle ABC$ негативно оријентисан, тада је $C = R^\circ_{A,-60}(B)$, (в. сл.)

Ротација за угао 180° је централна симетрија. $R_{0,180^\circ} = R_{0,-180^\circ} = S_0$.



554. Ротирати око дате тачке за дати угао:

а) дати круг; б) дати троугао; в) дати квадрат; г) дату праву.

555. а) Дате су праве a и b и тачка S ван њих. Конструисати круг са центром S који сече дате праве у тачкама A, односно B, тако да је $\sphericalangle ASB = 60^\circ$.

б) Дате су праве p и q и тачка A ван њих. Конструисати квадрат $ABCD$ тако да $B \in p$ и $D \in q$.

в) Дате су паралелне праве p, q и r и на правој p тачка A. Конструисати:

1° једнакостранични троугао ABC, тако да $B \in q$ и $C \in r$;

2° квадрат $ABCD$ тако да $B \in q$, $C \in r$.

556. Дате су тачке A и B и угао α. Доказати да постоји само једна тачка O тако да важи $R_{O,\alpha}(A) = B$.

557. Нека су O и A произвољне различите тачке и нека R означава ротацију $R_{O,120^\circ}$. Доказати да су тачке $A, R(A)$ и $R(R(A))$ темена једнакостраничног троугла.

558. Над страницама AB и AC произвољног троугла ABC конструисани су једнакостранични троуглови ABM и ACN. Претпоставимо да су троуглови ABC, ABM, ACN сви позитивно оријентисани. Доказати да је $MN = BC$.

559. Дата је тачка E на страници квадрата $ABCD$. Конструисати тачке X и Y које припадају страницама квадрата тако да троугао EXY буде једнакостранични.

560. Нека је $ABCDEF$ правилни шестоугао. Нека су K и M средишта дијагонале BD и странице EF. Доказати да је троугао AMK једнакостранични.

5.9. ДОДАТАК УЗ ПЕТУ ГЛАВУ

561. Тачка O је средиште дужи AB, а тачка M је произвљна тачка дужи AB, између O и B. Доказати да је $OM = \dfrac{MA - MB}{2}$.

562. Странице троугла се односе као 5:5:4, а разлика полуобима и дужине основе је $0,6cm$. Одредити дужине страница троугла.

563. Ако се странице једнакостраничног троугла ABC продуже преко темена за једнаке дужи добија се троугао $A_1B_1C_1$. Доказати да је и он једнакостраничан.

564. Нека је M тачка једнако удаљена од двеју паралелних правих p и q. Ако се кроз тачку M конструишу праве r и s, које секу p и q, редом, у тачкама $H, G \in p$ и $E, F \in q$, доказати да је $GH = EF$.

565. Симетрала угла $\sphericalangle A$ троугла ABC сече страницу BC у тачки K, из које су конструисане праве $KE \| CA$ и $KH \| BA$ (тачке E и H припадају страницама троугла). Доказати да је $AE = EK = KH = HA$.

566. Конструисане су симетрале два напоредна угла и из неке тачке A на заједничком краку конструисана права паралелна са она два друга крака до пресека B и C са симетралом. Доказати да су дужи AB и AC једнаке.

567. Над катетама BC и AC правоуглог троугла ABC конструисани су квадрати $ACKD$ и $BCEH$. Нека су M и F подножја нормала из тачака H и D на праву AB. Доказати да је $MH + DF = AB$.

568. Дат је правоугаоник $ABCD$. Симетрично са теменом B, у односу на дијагоналу AC, одређена је тачка B_1. Права AB_1 сече страницу CD у тачки E. Доказати да су троуглови AED и CB_1E подударни.

569. Доказати да је тежишна дуж мања од полуобима троугла.

570. Доказати да је збир висина троугла мањи од обима тог троугла.

571. Симетрала ма ког угла у троуглу дели наспрамну страницу на две дужи тако да је свака од њих мања од суседне странице. Доказати.

572. Израчунати углове једнакокраког троугла, код кога су средишта описаног и уписаног круга симетрична у односу на основицу троугла.

573. У троуглу ABC бисектриса угла у темену A сече страницу BC у тачки D. Кроз тачку D конструисана је права, која сече AC у тачки E, тако да је $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BAC = \alpha$. Доказати да је $BD = DE$.

574. У правоуглом троуглу ABC ($\sphericalangle C = 90°$), CD је висина из темена C. Ако је N средиште дужи CD и M средиште дужи BD, доказати да је $AN \perp MC$.

575. Нека је у једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) CD висина, DE нормала из D на BC и F средиште дужи DE. Доказати да је $CF \perp AE$.

576. Ако је O ортоцентар троугла ABC, доказати да је $\sphericalangle BOC + \sphericalangle BAC = 180°$

577. Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од $\frac{3}{4}$ његовог обима.

578. Дат је четвороугао $ABCD$ и произвољна тачка O. Ако важи $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, четвороугао $ABCD$ је паралелограм. Доказати.

579. Векторе $2\vec{a} - \vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$ изразити векторима $\vec{p}$ и $\vec{q}$, ако је $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$ и $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{q}$.

580. Дат је шестоугао $ABCDEF$. Ако су $M_1, M_2, \cdots, M_6$ средишта страница $AB, BC, \ldots, FA$, доказати да се тежишта троуглова $M_1M_3M_5$ и $M_2M_4M_6$ поклапају.

581. Дат је правилни шестоугао $ABCDEF$. Тачке M, N и P су редом средишта дужи DE, AM и BC. Разложити вектор $\overrightarrow{NP}$ на компоненте дуж вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

582. Дат је једнакостранични троугао ABC. Ако је O његов ортоцентар и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, изразити вектор $\vec{b}$ помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

583. Над страницама троугла ABC, споља, конструисани су произвољни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Може ли се од дужи A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 конструисати троугао?

584. Над страницама троугла ABC, са спољашње стране конструисани су једнакостранични троуглови ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказати да је $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

585. Тачке E и F су средишта страница AB и CD четвороугла $ABCD$. Доказати да су тачке S, Q, R, P које су средишта дужи AF, BF, CE и DE темена паралелограма.

586. Нека су K и L тачке на страници AD и дијагонали AC паралелограма $ABCD$ такве да је $AK = \frac{1}{4}AD$ и $AL = \frac{1}{5}AC$. Доказати да су тачке K, L и B колинеарне и израчунати $KL : LB$.

587. Нека су P, Q и R тачке редом на страницама BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$. Доказати да се кружнице описане око троуглова ARQ, BPR и CQP секу у једној тачки.

588. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$, код кога је $\sphericalangle ABD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°, \sphericalangle ACB = 40°$ и $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC + 30°$. Израчунати $\sphericalangle DBC$.

589. Из произвољне тачке P изван круга констурисане су тангенте PB и PD. Права, која пролази кроз P и седиште круга, сече круг у тачкама A и C. Доказати да права BA полови $\sphericalangle PBD$.

590. На кругу $k(O, r)$ дата је тачка M. Одредити геометријско место средишта свих тетива круга, чији је један крај у тачки M.

591. Конструисати $\triangle ABC$ ако су дате дужина странице a, величина угла α и дужина d дужи CK, где је K тачка на BA таква да је $BK : KA = 3 : 1$.

592. У паралелограму $ABCD$, чије су странице $AB = CD = a, BC = AD = b$, $(a \leq b)$ и унутрашњи угао код темена A мањи од $90°$ конструисане су симетрале унутрашњих углова.

а) Израчунати дужину дијагонале правоугаоника $PQRS$, којег образују ове симетрале.

б) Који услов треба да испуњавају a и b да се правоугаоник налази у паралелограму?

593. Доказати да су средишта страница и подножје било које висине у разностраничном троуглу темена једнакокраког трапеза.

594. Нека је ABC једнакокраки троугао и O произвољна тачка на основици AB. Ако су K и P подножја нормала из O на краке AC и BC доказити да је $OK + OP = AM$, где је M подножје висине из A на крак BC.

595. Теме угла α је изван датог круга. Краци тог угла одређују на кругу два лука који су у размери 3:10. Већи од тих лукова одговара централном углу од $40°$. Колико степени има угао α?

596. Израчунати углове троугла ABC, ако тежишна дуж симетрала угла и висина из темена C деле угао ACB на четири једнака дела.

597. Нека су M и N тачке додира круга уписаног у троуглу ABC са страницама AB и AC, а P тачка пресека праве MN са симетралом угла ABC. Доказати да је угао BPC прав.

598. Дужина страница троугла су 6, 7 и 9. Из темена троугла, као из средишта конструисана су три круга, који се међусобно додирују, при чему круг, чије је средиште у темену најмањег угла троугла, има са осталим круговима унутрашњи додир, а та два преостала круга се додирују споља. Израчунати дужине полупречника сва три круга.

599. Нека су A_1, A_2, A_3, A_4 произвољне тачке на кругу и средишта лукова $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ - B_1, B_2, B_3, B_4 спојени су дужима. Доказати да међу овим дужима постоје две међу собом управне.

600. У углу са теменом A изабрана је тачка M. Нека су P и Q подножја нормала из M на краке угла, а K подножје нормале из A на PQ. Доказати да је и $\sphericalangle MAP = \sphericalangle QAK$.

601. Два круга додирују се изнутра у тачки A. Ако је AB пречник већег круга и тетива BK већег круга додирује мањи круг у тачки C, доказати да је AC симетрала угла код A троугла ABK.

602. Ако је S тачка у којој се секу продужеци кракова AD и BC трапеза $ABCD$, доказати да се кругови описани око $\triangle SAB$ и $\triangle SDC$ додирују у тачки S.

603. Тачке M и N су симетричне темену C троугла ABC у односу на бисектрисе углова у теменима A и B. Доказати да је тачка P, у којој уписани круг додирује страницу AB, средиште дужи MN.

604. Нека су P, Q, R, S, редом, средишта страница AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$ и X произвољна тачка. Ако су X_1, X_2, X_3, X_4, редом, централносиметричне тачке тачки X у односу на P, Q, R, S, доказати да је $X_1X_2X_3X_4$ паралелограм.

605. Права q сече оба крака оштрог угла xOy. Конструисати праву $p||q$ тако да одсечак између кракова овог угла буде дате дужине d.

606. Дат је $\triangle ABC$ и права q. Пресећи троугао правом $p||q$ тако да одсечак ове праве између страница троугла или правих одређених тим страницама буде дате дужине d.

Глава VI

РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

6.1. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЦЕЛИХ АЛГЕБАРСКИХ РАЦИОНАЛНИХ ИЗРАЗА

За изразе A, B, C, D важи:

1° а) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ - дистрибутивни закон

б) $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$

2° $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ - разлика квадрата

3° $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$ - збир и разлика кубова

4° $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ - квадрат бинома

5° $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$ - куб бинома

607. Средити полиноме по опадајућим степенима:

а) $4 + 3x - 2x^2 + 5x + 6x^3 - 2x^2 + 1$;

б) $x^4 + 3x^3 - x + 4x^2 - 2x^3 - 3 - x^2$.

608. Средити целе рационалне изразе:

а) $3x^3 - 2x^2 + 5x - a + 4x^2 - 5x + 2a - 3x^3$;

б) $6x - 7a^2 + 3x^2 - 3x + 5a^2 - x^2$;

в) $7x^2y + 3xy^2 + y^3 + 4xy^2 - 2xy + y^2 - y^3$;

г) $8x^2y^3 + (-5x^2y^3) + (-3x^2y^3) - \frac{1}{2}x^3y^2$;

д) $a^x + 7x^a - 9a^x + 8a^x - 5x^a$;

ђ) $3x^a + 6a^x - x^a + (-5a^x) - 2x^a$; $x, y, a \in \mathbf{N}$

Ослободити се заграда у изразима (задаци 609-610):

609. а) $(x+5)(x^2 - 2x + 3) - 15$;

б) $(2 + 3x - x^2)(x^2 + 5x - 1) + 5x^2(x^2 - 2x + 3)$;

в) $x^3(2x-1)^2+(5x+3)^2-x^2(x+1)^2$;

г) $2+x(3+x(4+x(5+x)))$;

610. а) $(a+b)(c+d)+(a+d)(b+c)+(a+c)(b+d)$;

б) $(a+b)(x+y)+(a-b)(x-y)-(ax+by)$;

в) $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$;

г) $a^xb^{2y}(a^xb^y-2a^y-3b^x)$, $x, y \in \mathbf{N}$.

611. Наћи збир и разлику следећих полинома:

а) $P(x)=x^2-2x+1$, $Q(x)=(x-1)(x+1)$;

б) $P(x)=x^6-2x^5+x^4-x$, $Q(x)=x^4-x^3+x+2$;

в) $P(x)=4x^5-2x^2+3x-2$, $Q(x)=-3x^4-5x^2-4x+5$;

г) $P(x)=ax^3+bx^2-2ax+3b$, $Q(x)=bx^3-2ax^2+8a$;

д) $P(x,y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, $Q(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$;

ђ) $P(x,y)=\frac{2}{3}xy-\frac{3}{2}x+y$, $Q(x,y)=-xy-\frac{1}{2}x-y$.

612. Помножити полиноме:

а) $x-1$ и x^2+x+1; б) $x+3$ и x^2-3x+9;

в) $3x^2-5x+6$ и $2x-7$; г) x^4+x^3+2 и x^2-3x+4;

д) $3y^2+2x^2-6xy$ и $2x^2+4xy-2y^3$;

ђ) $x-y$, $y-z$ и $z-x$

613. Одредити мономе идентички једнаке датим изразима ($n, m \in \mathbf{N}$, $x, y, z \neq 0$):

а) $2x(-y)(-xy)$; б) $x^2y(-2x^2)^3(-\frac{1}{2}xy)^2$;

в) $4x^2y^3 \cdot x^4y^7$; г) $x^ny^n \cdot x^{2-n}y^{n+1}$;

д) $(x^2y^3):(xy^2)$; ђ) $(x^5y^7z^{10}):(x^3z^{10})$;

е) $(x^my^m):(x^{m-1}y^{m-2})$; ж) $(a^4b^5)^m \cdot (2a^mb^m)^4$;

з) $(x^2)^5:(x^3)^2$; и) $(x^5y^2)^4:(x^3y^3)^2$;

ј) $(x^my^{2m})^3:(x^my^m)^2$; к) $x^n \cdot ((x^2y^3)^n:(x^3y)^n)$.

Раставити на чиниоце извлачењем заједничог чиниоца испред заграде следеће полиноме (зад. 614-619):

614. а) $5a+5x$; б) $2a-2$; в) $7a-14$; г) $3a^2+9$;

д) $3a+6b+9$; ђ) $6x+ax+bx$; е) $9a^2-6a+12$.

615. а) a^2-a^3; б) $3a^2-6a$; в) $x^3a^2-x^3$;

г) $3a^3+2a^2+a$; д) $4x^2-2x+xy$; ђ) $x^3y^3-x^3y+x^4y^3$.

616. а) $x^3y^3-x^2y^8$; б) $6x^2y^2-4xy^3$; в) $5x^3-15x^2y^3$;

г) $6x^3y-9x^2y^2+3x^3y^2$; д) $x^3-x^7-2x^5$.

617. а) $a^3b^2+2a^4b^2-4ab^5$; б) $3a^3b^3-9a^2b^4+12a^5b^4$;

в) $15x^3y - 10x^4y - 5x^4y^3$; г) $14x^4y^2 - 35x^4y^3 + 21x^3y^4$;
д) $21a^7b^{10} - 12a^8b^7 + 15a^5b^{12} - 18a^5b^7$;
ђ) $14a^8x^4 - 21a^5x^8 - 14x^7a^3 - 84x^4a^3$.

618. а) $a(m+n) + b(m+n)$; б) $m(a-b) + n(a-b)$;
в) $x(m-n) - y(m-n)$; г) $x(a-b) + 5(b-a)$;
д) $7q(p-q) + 2p(q-p)$; ђ) $2m(x-3) - 5n(3-x)$;
е) $2k(a-b) - (b-a)$; ж) $3(x+y) + (x+y)^2$;
з) $2(a-b)^2 - (a+b)(a-b)$;
и) $2a(x+y-z) - 3b(x+y-z) + 5z(z-x-y)$.

619. а) $a^{2n} + a^n$; б) $a^{3x} - a^{2x}b^x$; в) $2x^{m+n} + 6x^n$;
г) $a^{3x} + 3a^{2x} + 5a^x$; д) $6a^{2x} - 9a^{3x} + 3a^{2x}b^x$. $m, n, x \in \mathbf{N}$.

620. Груписањем чланова, раставити на чиниоце следеће полиноме:
а) $am - an + bm - bn$; б) $am - an - bm + bn$;
в) $ab + ay - bx - xy$; г) $an - ab - mn + mb$;
д) $5ax + 5ay - x - y$; ђ) $2x^2 - 2xy - x + y$;
е) $4ym - 4yn - m + n$; ж) $x^2 - xy - 2x + 2y$;
з) $6by - 15bx - 4ay + 10ax$; и) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$;
ј) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$;
к) $xyz + x^2y^2 + 3x^4y^5 - 3x^3y^4 - xy - z$;
л) $m^2x^4 - mnx^3 + 2mx^2 - 2nx + n - mx$.

Применом формуле за разлику квадрата раставити на чиниоце следеће полиноме (зад. 621-623):

621. а) $x^2 - 49$; б) $a^2 - 36$;
в) $16x^2 - 9$; г) $9x^2 - 49$;
д) $x^2 - \frac{1}{49}$; ђ) $\frac{x^2}{4} - \frac{4}{9}$;
е) $\frac{9x^2}{4} - \frac{4y^2}{9}$; ж) $\frac{49x^2}{25} - 9y^2$;
з) $x^2 - 0,36$; и) $x^2 - 0,0009$;
ј) $0,04x^2 - 0,25$; к) $0,01x^2 - 0,04y^2$;
л) $x^4y^2 - 0,01$ љ) $0,25x^2y^2 - 0,0001$.

622. а) $(x-3)^2 - 4$; б) $(a+5)^2 - 9$;
в) $y^2 - (x-y)^2$; г) $x^2 - (x+y)^2$;
д) $(x+2)^2 - 4x^2$; ђ) $9x^2 - (x-1)^2$.

623. а) $(x-y)^2 - 16(x+y)^2$; б) $(x+2y)^2 - 9(x-2y)^2$;
в) $4(x-y)^2 - 25(x+y)^2$; г) $36(x-2)^2 - 25(x+1)^2$;

д) $(x+y-z)^2-(x-y+z)^2$; ђ) $(x+y-3)^2-(x+2)^2$.

624. Применом формуле за разлику квадрата израчунати производе:

а) $98\cdot 102$; б) $99\cdot 101$; в) $83\cdot 77$;
г) $79\cdot 81$; д) $18\cdot 22$; ђ) $201\cdot 199$;
е) $1,05\cdot 0,95$.

625. Наћи квадрат и куб израза:

а) $x-2$; б) $x+3y$; в) $x+x^2$;
г) a^3-2a; д) x^2y-xy^3; ђ) $x+y+z$;
е) $x-y+z$; ж) $a+b-1$; з) $a-b-1$.

626. Применом формула за квадрат и куб збира и разлике, израчунати:

а) 11^2, 21^2, 99^2, 101^2; б) 11^3, 101^3, 99^3, 102^3.

627. Користећи формуле за збир и разлику кубова раставити на чиниоце следеће полиноме:

а) a^3-8; б) $64a^3+1$;
в) $8x^3-27y^3$; г) $x^3-64a^3y^3$;
д) $8x^3a^3+y^6$; ђ) $(a+b)^3-b^3$;
е) $(x-y)^3-x^3$; ж) $(x-3)^3-27x^3$;
з) $(a-b)^3-(a+b)^3$; и) $0.064-x^3$;
ј) $0,008+0,001x^3$; к) $0,027x^3+(x-1)^3$;
л) $0,125x^3-(x+1)^3$; љ) $\frac{1}{8}-\frac{x^3}{27}$;
м) $\frac{64}{27}+y^3$; н) $(a+b)^3-27(a-b)^3$;
њ) $(a-2)^3+(a-1)^3$; о) $(2x+3y)^3-(3x-2y)^3$;
п) $(3x-2y)^3-(2x+3y)^3$; р) $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3$.

628. Користећи формуле за квадрат и куб бинома раставити на чиниоце следеће полиноме:

а) a^2-6a+9; б) $9a^2+6a+1$;
в) $25x^2+40xy+16y^2$; г) $4x^4+8x^2y+4y^2$;
д) $a^7-2a^5b+a^3b^2$; ђ) $9x^5+6x^3y+xy^2$;
е) $\frac{1}{4}a^2+a+1$; ж) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$;
з) $(x+y)^2+4(x+y)+4$; и) $9x^2-6x(y-z)+(y-z)^2$;
ј) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$; к) $125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3$;
л) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$; љ) $27a^3-135a^2b+225ab^2-125b^3$.

629. Раставити на чиниоце квадратне триноме који нису квадрати бинома:

а) x^2-x-6; б) x^2+6x+8;

301-502 2ефанц

в) $x^2 + 12x + 35$; г) $x^2 - 3x - 4$;
д) $x^2 - 7x - 30$; ђ) $b^2 - 2b - 63$;
е) $b^2 + 5b - 50$; ж) $a^2 + 3ab - 28b^2$;
з) $2x^2 + 5xy - 3y^2$; и) $y^2 - (2a+1)y + a(a+1)$;
ј) $a^6 - 5a^4 + 4a^2$; к) $n^3 + 3n^2 + 2n$;
л) $3x^2 + 5x - 8$; љ) $5x^2 + 12x - 44$;
м) $2x^3 + 5x^2 - 3x$; н) $12x^3 + 4x^2 - x$.

Користећи разне методе раставити на чиниоце следеће полиноме (зад. 630-633):

630. а) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$; б) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$;
в) $x^2 + y^2 - 9 - 2xy$; г) $2x^2 + 2y^2 - 2 + 4xy$;
д) $a^3 - 4a^2b + 4ab^2 - a$; ђ) $4a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 - 4b^2$.

631. а) $a^2b - ab^2$; б) $2x^2 - 2y^2$;
в) $a^3 - a$; г) $a^4 - a^2$;
д) $5x^3 - 20xy^2$; ђ) $x^2yz^2 - yz^2$;
е) $x^2 - y^2 + x - y$; ж) $x^2 - y^2 - x - y$;
з) $x^2 - y^2 - x + y$; и) $x^5 - x$;
ј) $a^5b - ab^5$; к) $x^3 - y^3 + x^2 - y^2$;
л) $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$; љ) $x^3 + y^3 - x^2 + y^2$.

632. а) $a^5b^2 - a^2b^5$; б) $8x^7y^3 + x^4y^6$;
в) $x^6 - a^6$; г) $a^6 + 27$;
д) $x^6 + a^{12}$; ђ) $x^{12} - a^{12}$;
е) $x^{15} - 8y^9$; ж) $7x^{10} + 56x^7y^6$;
з) $a^3 - b^3 - 27(a-b)$; и) $a^6 - a^4b^2 + a^3b^3 - ab^5$;
ј) $2x^4 + 5x^3 - 2x - 5$; к) $x^4 + 2x^3 - x - 2$;
л) $p^3x^2 - q^3x^2 - p^3 + q^3$; љ) $x^5 - x^3 + 27x^2 - 27$;
м) $x^3y^3 - x^3 - y^3 + 1$; н) $a^3b^2 - a^3 + 8b^2 - 8$.

633. а) $16y^4 + 27y^3a + 108y^2a^2 + 54a^3y$; б) $81x^4 + 162x^3y + 108x^2y^2 + 24xy^3$;
в) $24x^4 - 108x^3a + 162x^2a^2 - 81xa^3$; г) $54y^4 - 108y^3a + 72y^2a^2 - 16ya^3$.

634. Упростити изразе:
а) $(2x-1)^2 + (x-2)^3 - (2x-1)(x-2)$;
б) $(x^2 - x + 1)(x+1) - (x^2-1)^2 - (x^2 + x + 1)(x-1)$;
в) $(a-1)^2 - 4a(a+1)^2 - 6(a+1)(a-1)$;
г) $(a - b + c)^2 + (a+b)^2 - (a+c)^2$.

6.2. ПОЛИНОМИ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

1° Канонски облик полинома

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, где је x променљива, а $a_0, a_1, \cdots, a_n$ су дате константе и n природан број или нула.

2° Два полинома, P и Q, су једнаки ако имају идентичне канонске облике, тј. ако имају једнаке степене и све одговарајуће коефицијенте једнаке међу собом:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

и

$$a_n = b_n, \cdots, a_1 = b_1, \ a_0 = b_0$$

3° Нула - полином $P(x) \equiv 0$

4° *Безуова теорема.* Остатак дељења полинома $P(x)$ са $x - a$, где је a константа, износи $P(a)$.

Последица: Ако је $P(a) = 0$, полином $P(x)$ је дељив са $x - a$.

5° Нека су A и B произвољни полиноми, при чему је полином B различит од нултог. Тада постоје јединствено одређени полиноми Q (количник) и R (остатак), тако да важи

$$A = BQ + R,$$

при чему је полином R нулти или има мањи степен од полинома B.

635. Одредити количник полинома:

а) $(x^2 - y^2) : (x - y), x \neq y$;

б) $(25 - c^2) : (5 + c), c \neq -5$;

в) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b), a \neq b$;

г) $(8a^3 - 1) : (4a^2 + 2a + 1)$;

д) $(27 + 8a^3) : (3 + 2a), a \neq -\frac{3}{2}$.

636. Одредити вредност полинома $P(x)$ у тачки a ако је

а) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6, \quad a = 2$;

б) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5, \quad a = 1 - \sqrt{2}$.

637. Поделити полиноме:

а) $2x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 9x + 2$ са $x^2 - 3x + 2$;

б) $x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ са $x^2 - x + 1$;

в) $x^5 + x^2 + x + 2$ са $x^3 - x + 1$;

г) $x^5 - x^3 - x^2 + x + 1$ са $x^3 + x^2 - 1$;

д) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 24x - 31$ са $x^2 + x - 6$.

638. Наћи остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x - 1$:

а) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 9x + 8$;

б) $p(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x$;

в) $p(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

639. Наћи количник и остатак при дељењу полинома $A(x)$ полиномом $B(x)$:

а) $A(x) = x^2 - 2x + 2, \quad B(x) = x - 1$;

б) $A(x) = 6x^2 - 13x, \quad B(x) = 2x - 3$;

в) $A(x) = x^3 + 2x^2, \quad B(x) = x^2 + x + 1$;

г) $A(x) = x^3 + 2x^2, \quad B(x) = x + 1$;

д) $A(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 5, \quad B(x) = x + 1$;

ђ) $A(x) = x^2 + 2x - 7, \quad B(x) = x^2 - 2x + 7$;

е) $A(x) = x + 3, \quad B(x) = x^2 - x + 11$;

ж) $A(x) = x^2 + \frac{1}{6}x, \quad B(x) = x + \frac{1}{2}$;

з) $A(x) = 8x^4 - 10x^3 + 15x^2 + 13x - 2, \quad B(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

640. Одредити коефицијенте a и b тако да полиноми $p(x)$ и $q(x)$ буду идентички једнаки:

а) $p(x) = 3x^3 - ax^2 + 2x + 5, \qquad q(x) = bx^3 - 4x^2 + (b-1)x + 5$;

б) $p(x) = ax^3 - 4x + 1, \qquad q(x) = bx + 1$;

в) $p(x) = 4x^3 + 3x^2 + a, \qquad q(x) = bx^3 + 3x^2 + 5$.

641. Одредити реалне бројеве a, b и c тако да следећи полиноми буду идентички једнаки:

а) $A(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ и $B(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$;

б) $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$ и $B(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$;

в) $A(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$ и $B(x) = (3x-1)(ax^2 + bx + c)$;

г) $A(x) = 6x^3 - 23x^2 + 29x - 12$ и $B(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$;

д) $A(x) = x + 5$ и $B(x) = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$;

ђ) $A(x) = (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) + (x+2)(x+3)$ и $B(x) = ax^2 + bx + c$.

642. Дат је полином $p(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m$

а) Одредити параметар m тако да полином $p(x)$ буде дељив са $x - 2$.

б) Одредити параметар m тако да остатак при дељењу $p(x)$ са $x - 1$ буде једнак 7.

Безуова теорема: 1. раст. на чиниоце
2. параметре

643. Користећи Безуову теорему, раставити на чиниоце полиноме:

а) $p(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;

б) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$;

в) $p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$;

г) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$;

д) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$;

ђ) $p(x) = x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$.

644. а) Раставити на чиниоце полином $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ако се зна да је $p(1) = 0$;

б) Раставити на чиниоце полином $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$.

645. Дат је полином $p(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x$. Одредити вредност параметра a тако да полином буде дељив са $x + 2$.

646. Не изводећи дељење доказати да је полином $p(x) = (x^3 - 8)^5 + (x^2 - 4)^3$ дељив са $x - 2$. $P(2)=0$

647. Полином $p(x) = x^2 - kx + l$, $k, l \in \mathbf{R}$ даје при дељењу са $x - 3$ за 6 већи остатак него при дељењу са $x - 1$ и даје при дељењу са $x + 1$ два пута већи остатак него при дељењу са $x - 1$. Одредити k и l.

648. Одредити бројеве k и l тако да полином $p(x) = x^3 + 2kx^2 - lx + 5$ даје једнаке остатке при дељењу са $x + 1$, $x - 1$ и $x - 4$.

649. а) Збир остатака при дељењу полинома $p(x) = x^3 + 2mx^2 - mx - 5$, $m \in \mathbf{R}$, са $x + 2$ и са $x - 2$ износи 6. Наћи m.

б) Разлика остатака при дељењу полинома $p(x) = x^4 + kx^2 + 2lx - 3$, $k, l \in \mathbf{R}$, са $x - 1$ и са $x + 1$ износи 8, а збир тих остатака је 2. Наћи k и l.

650. Одредити коефицијенте a и b тако да полином $x^3 + ax^2 + bx + 3$ буде дељив са $(x - 1)(x + 3)$.

651. Одредити коефицијенте m и n тако да полином $x^3 + mx^2 + 3x + n$ буде дељив са $x - 1$ и да при дељењу са $x - 3$ даје остатак 8.

652. Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x^2 - 5x - 14$ је $2x + 4$. Који су остаци при дељењу полинома $p(x)$ са $x - 7$, односно $x + 2$?

6.3. НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ И НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАЛАЦ ПОЛИНОМА

Дефиниција. Нека су A и B полиноми, различити од нултог.

1° Највећи заједнички делилац (НЗД) полинома A и B је полином D који има највиши степен међу полиномима који су делиоци и полинома A и полинома B.

2° Најмањи заједничи садржалац (НЗС) полинома A и B је полином S који има најнижи степен међу полиномима који су дељиви и полиномом A и полиномом B.

3° Полиноми су узајамно прости ако је највећи заједничи делилац за два (или више) полинома једнак константи.

653. Одредити највећи заједничи делилац (НЗД) полинома:

а) $A(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4, \quad B(x) = x^2 + 4x + 3;$

б) $A(x) = x^2 - 1, \quad B(x) = x^2 - 3x + 2, \quad C(x) = x^2 + x - 2;$

в) $A(x) = (x-2)^3(x+1)(x^2+x+1), \quad B(x) = (x-2)^2(x^2+x+1)^3;$

г) $a^2 - b^2, \quad a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - 3ab + 2b^2;$

д) $a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5, \quad a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5;$

ђ) $3x^2 - 4x + 1, \quad 4x^4 - 5x^3 + x^2;$

е) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x, \quad 6x^3 - 15x^2 + 6x;$

ж) $x^3 - 3x^2 + 2x, \quad x^3 + 3x^2 + 2x, \quad x^3 - x.$

Одредити најмањи заједнички садржалац (НЗС) полинома (задаци 654-657):

654. а) $2a^2, \quad 5a^3;$ б) $6ab, \quad 9ab^2;$

в) $15a, \quad 9a^2, \quad 20a^3;$ г) $7a^2b, \quad 21ab^2, \quad 42ab^5;$

д) $2abc, \quad 3ac, \quad 4ab;$ ђ) $2a^2bc, \quad 5abc^2, \quad 6ab^2c.$

655. а) $x - y, \quad x + y;$ б) $a + b, \quad a - b, \quad a^2 - b^2;$

в) $x + 1, \quad x - 1, \quad x;$ г) $a - b, \quad a + 2, \quad 3;$

д) $2a - 2b, \quad a + b;$ ђ) $2a + 2b, \quad 3a - 3b, \quad a^2 - b^2;$

е) $a - b, \quad b - a, \quad a + b;$ ж) $3a - 9, \quad 2a + 6, \quad a.$

656. а) $(x-y)^2, \quad (x+y)^2$ б) $x^2 - y^2, \quad (x-y)^2;$

в) $(a-b)^2, \quad (a+b)^2, \quad a^2 - b^2;$

г) $a^2 - b^2, \quad a^2 + b^2, \quad (a^2 - b^2)^2;$

д) $a - b, \quad a^2 + ab + b^2;$ ђ) $(a + b), \quad a^2 - ab + b^2;$

е) $a + 3, \quad a^2 - 3a + 9;$ ж) $a - 5, \quad a^2 + 5a + 25.$

657. а) $x^3 - xy^2, \quad x^2y - xy^2, \quad xy^2;$

б) $x^4 - x^2$, $x^3 + 2x^2 + x$, $x^2 - 1$;

в) $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, $x^3 + y^3$;

г) $4x^4 - 8x^3 + 4x^2$, $3x^3 + 6x^2 + 3x$;

д) $9x^2 - 12xy + 4y^2$, $3x^3 - 2x^2y$, $9x^2 - 4y^2$;

ђ) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$, $12x^3 + 4x^2 + 9x + 3$.

6.4. ОПЕРАЦИЈЕ СА РАЦИОНАЛНИМ АЛГЕБАРСКИМ ИЗРАЗИМА

Средити рационални алгебарски израз значи довести га на облик $\frac{P}{Q}$, где су полиноми P и Q узајамно прости. При томе се,између осталог, користе правила (A, B, C, D су алгебарски изрази):

1° $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$, за $B \neq 0$, $C \neq 0$;

2° $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}$, за $B \neq 0$, $D \neq 0$;

3° $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, за $B \neq 0$, $D \neq 0$;

4° $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$, за $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$.

658. Одредити услове под којима су дефинисани разломци:

а) $\frac{1}{x-7}$; б) $\frac{x}{x-y}$; в) $\frac{p-q}{p+q}$;

г) $\frac{3x-5}{2x+1}$; д) $\frac{(x-5)(x+2)}{(x-y)(x-3y)}$; ђ) $\frac{1}{x^2+2x-1}$;

е) $\frac{x+y}{x^2-5xy+6y^2}$; ж) $\frac{3a^2-6a+3}{a^2-1}$.

Скратити разломке и записати услове под којима добијене једнакости важе (задаци 659-663):

659. а) $\frac{b^2c^3}{c^2b^2}$; б) $\frac{bc^2d^2}{c^2bd}$; в) $\frac{2a^3c^2}{4a^2c^3}$; г) $\frac{x-y}{y-x}$;

д) $\frac{y-x}{x^2-y^2}$; ђ) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; е) $\frac{a^2-2a}{(a-2)^2}$; ж) $\frac{(a+3)^2}{ab+3b}$;

з) $\frac{a^2-8a+16}{b(a^2-4a)}$; и) $\frac{x^3y^2(x^2-25)}{x^4y(x+5)}$; ј) $\frac{x^3y+x^2y^2}{x^3y(x-y)}$.

660. а) $\frac{a^3b^2(a+b)}{a^2b^2(a^2-b^2)}$; б) $\frac{a^6+a^5}{a^6-2a^5}$;

в) $\dfrac{a^3b^4+2a^2b^4}{ab^3(a^2+4a+4)}$;

г) $\dfrac{a^2(a-2)(a^2+2a)}{b(a^4-4a^2)}$;

д) $\dfrac{(a^2-ab)(ab+b^2)}{(ab-b^2)(a^2+ab)}$;

ђ) $\dfrac{(8a^2-12ab)b^2}{2a(2ab^2-3b^3)}$;

е) $\dfrac{3b(4ba^2-2a^3)}{a^2(3ab-6b^2)}$;

ж) $\dfrac{a^3b^5-a^4b^4}{a^3b^4-a^3b^5}$;

з) $\dfrac{a^2+ab+a+b}{a^2+2ab+b^2}$;

и) $\dfrac{a^2-3a+2}{a^2+2a-3}$;

ј) $\dfrac{x^2(xy-2y^2+y)}{y(x^3+4x^2y)}$;

к) $\dfrac{ab+ac-c^2-bc}{bc+c^2+2ab+2ac}$;

л) $\dfrac{4x^2a^4-36a^2y^2}{5a^3x^2+30a^2xy+45ay^2}$;

љ) $\dfrac{ax^3+bx^2+2ab^2x+2b^3}{ax^3-bx^2+2ab^2x-2b^3}$.

661. а) $\dfrac{a^2-3b+a(3-b)}{ab+3b}$;

б) $\dfrac{a^2+ab}{a^2+3ab+2b^2}$;

в) $\dfrac{a^3-a^5}{a^3(a-b)(1-a^2)}$;

г) $\dfrac{a^2(a^3-a^2+a+1)}{a^2(3a^3-3a^2)+3(a^2+a^3)}$;

д) $\dfrac{5a^5-15a^4}{5a^2(a^3+2a^2)}$;

ђ) $\dfrac{(a^2-2a)(a^2b+2ab+4b)}{b(a^4-8a)}$;

е) $\dfrac{(2a^2b-2ab)(a^3+a^2+a)}{(a-1)(a^2b+ab+b)}$;

ж) $\dfrac{4b^3(a^4-a^3)(a^2+1)}{a(a-1)(a^3+a)}$;

з) $\dfrac{y^2(5x-5)(x^2-x)}{x^2-2x+1}$;

и) $\dfrac{x(x-y)(x^2-x)}{2(x^3-x^2)}$.

662. а) $\dfrac{a^2-ax+a-x}{a^2-ax-a+x}$;

б) $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$;

в) $\dfrac{ac+bc-ad-bd}{bc-bd-ac+ad}$;

г) $\dfrac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}$;

д) $\dfrac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}$;

ђ) $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$;

е) $\dfrac{x^4+4}{a(x^2+2)-2ax-(x-1)^2-1}$;

ж) $\dfrac{a(b^2+1)+b(a^2+1)}{a^2b^2-1}$;

з) $\dfrac{a^6+a^4-a^2-1}{a^8-a^6+a^2-1}$;

и) $\dfrac{(x^2+xy)^2-(xy+y^2)^2}{(x^2-xy)^2-(xy-y^2)^2}$;

ј) $\dfrac{c^3+8}{c^2(c-4)+8(c-1)}$;

к) $\dfrac{x^{10}-1}{x^6-x^5+x-1}$;

л) $\dfrac{(xy+1)^2-(x+y)^2}{(x^2-1)(y^2-1)}$;

љ) $\dfrac{a^3(a-2b)+b^3(2a-b)}{(a-b)^3(a+b)}$.

663. а) $\dfrac{a^{n+2}}{2a^n\cdot a}$;

б) $\dfrac{b^{3n+2}+b^{3n+1}}{b^2b^{3n}}$;

в) $\dfrac{a^{2n+3}+a^{2n+2}-a^{2n+1}}{a^{2n+2}+a^{2n+1}}$; г) $\dfrac{b^{4n-3}+b^{3n-3}+4b^{3n-2}}{b^{3n-3}-2b^{3n-2}}$;

д) $\dfrac{a^{n+4}+2a^n}{a^nb^5-3a^n}$; ђ) $\dfrac{a^{n+3}b^2+3a^3b^2}{a^4b^{n+2}-2a^3b^2}$; е) $\dfrac{a^{2x+1}}{a^{3x}-a^{2x}}$;

ж) $\dfrac{a^{2x}-a^{2y}}{a^{2x}+a^xa^y}$; з) $\dfrac{a^{5x}+a^{4x}b^x+a^{3x}b^{2x}}{a^{3x}-b^{3x}}$; $n, x, y \in \mathbf{N}$.

У задацима 664-670, извршити назначена сабирања и одузимања разломака:

664. а) $\dfrac{5}{3a}+\dfrac{2}{3b}-\dfrac{3}{2a}+\dfrac{3}{b}$; б) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{3y}$;

в) $\dfrac{5a-3}{2a}+\dfrac{3a-4}{3a}-\dfrac{a+1}{4a}$; г) $\dfrac{3b+1}{5b}-\dfrac{2b-3}{6b}+\dfrac{b-1}{10b}$.

665. а) $\dfrac{3}{x-y}-\dfrac{2}{x+y}$; б) $\dfrac{2}{a+b}-\dfrac{3}{a-b}+\dfrac{2}{a}$;

в) $\dfrac{1}{b}-\dfrac{2}{a+b}-\dfrac{3}{b(a+b)}$; г) $\dfrac{a+2b}{a-b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$;

д) $\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{1}{x}$; ђ) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{x+y}{x-y}$.

666. а) $\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}$; б) $\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{n-1}{n+1}-\dfrac{4n}{n^2-1}$;

в) $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}$; г) $\dfrac{y}{x^2-xy}+\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{x+y}{xy}$;

д) $\dfrac{x}{x^2-9y^2}-\dfrac{1}{x+3y}$; ђ) $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$;

е) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{2-x}-2$; ж) $\dfrac{4}{5x-10}+\dfrac{1}{6-3x}-\dfrac{2}{x-2}$.

667. а) $\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{a}{(a+3)^2}$; б) $\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{3}{x-y}$;

в) $\dfrac{x^2}{(x-3)^2}+\dfrac{3x}{x-3}+2$; г) $\dfrac{a^2}{(a+b)^3}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{(a+b)^2}$;

д) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{y}{(y-x)^2}$; ђ) $\dfrac{3a-1}{9-a^2}+\dfrac{5a}{a^2-6a+9}$.

$(x-y)\cdot(x+y)$ $(x-y)^2$ $(a-3)\cdot(a+3)$ $(a-3)^2$

668. а) $\dfrac{4x^2}{10xy-25y^2}-\dfrac{4x^2+25y^2}{10xy}-\dfrac{25y^2}{4x^2-10xy}$;

б) $\dfrac{10a-18}{12a^2-27}-\dfrac{1}{2a+3}+\dfrac{4}{18a-27}-\dfrac{5}{9a}$;

в) $\dfrac{2}{a+4}-\dfrac{a-3}{a^2-8a+16}+\dfrac{a-9}{16-a^2}$ $(a-4)\cdot(a+4)$

г) $\dfrac{8x^2+18y^2}{9y^2-4x^2}-\dfrac{3y+2x}{3y-2x}-\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$.

д) $\dfrac{x^2+xy}{2x}+\dfrac{4(3x^2+3xy+0,75y^2)}{2x+y}$;

ђ) $\dfrac{4x^2-8xy}{x}+\dfrac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}-\dfrac{1-x}{2}$.

669. а) $\dfrac{x+1}{ax-2x-3a+6}-\dfrac{2+a}{a^2-4}$; $x^3(x-2)$ $(a-2)(a+2)$

б) $\dfrac{1+3x}{2x^2+3x-2}-\dfrac{2x-1}{3x^2+7x+2}$;

в) $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{2a+2b}-\dfrac{x+b}{ax+ay+bx+by}$;

г) $\dfrac{a^2-bx}{a^2-ab+bx-ax}-\dfrac{3b-a}{2(a-b)}-\dfrac{a+2x}{3a-3x}$;

д) $\dfrac{3m+1}{3m-1}-\dfrac{3(3m^2+1)}{9m^2-1}+\dfrac{3m-1}{3m+1}$;

ђ) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a^2}{b(a+b)}-\dfrac{b^2}{a(a+b)}$;

е) $\dfrac{2m}{m^2-6m+9}-\dfrac{2m}{m^2-9}+\dfrac{1}{m+3}$;

ж) $\dfrac{(a-3)^2}{a^2-a-12}+\dfrac{5a}{a^2-9}-\dfrac{16a-63}{(a-4)(a-3)(a+3)}$.

670. а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x+1}{x^2-1}-\dfrac{3x^2+5x-1}{1-x^3}$;

б) $\dfrac{4a^2}{8a^3-1}+\dfrac{1}{2a-1}-\dfrac{2a}{4a^2+2a+1}$;

в) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$;

г) $\dfrac{b-a}{a^2b-ab^2+b^3}+\dfrac{a-2b}{a^3+b^3}-\dfrac{1}{ab+b^2}$;

д) $\dfrac{(x+2)^2}{x^3-8}-\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{(x^2-4)(x^2+2x+4)}$;

ђ) $\dfrac{8(a+1)}{8-a^3}-\dfrac{2a}{a^2+2a+4}+\dfrac{a}{a-2}$.

Средити дате изразе (задаци 671-689):

671. а) $\dfrac{(a^2b^3)^2}{ab^4}\cdot\dfrac{a^3b}{(a^2b^4)^3}$;

б) $\left(\dfrac{(2a^2)^2}{3a^4b^3}\right)^3\cdot\dfrac{27a^2b}{64a^{10}}$;

в) $\dfrac{a^2b}{c^3d}:\dfrac{ac^2}{bd^3}$;

г) $\dfrac{a^2b^3}{cd^4}:\dfrac{b^2c^4}{d^3a^2}$;

д) $\dfrac{a^3b^8\left(x^3y^2\right)^2}{\left(2c^4d^5\right)^2x^3y^4}:\dfrac{\left(3a^3b^4\right)^2d}{4c^5\left(d^2x^3y\right)^2}$;

ђ) $\dfrac{\left(3a^3b^4\right)^3}{\left(5a^2c^3\right)^2}:\dfrac{9\left(a^4b\right)^2}{25\left(a^4b^5\right)^3}$.

672. а) $\dfrac{a^n}{a^{2n-1}} \cdot a^{2n+2}$; б) $a^n b^{2n} \cdot \dfrac{a^{2n+1}}{b^{2n}}$;

в) $(a^n b)^2 : \dfrac{a^{2n}}{b^n}$; г) $\dfrac{\left(2a^n b^2\right)^2}{c^{n+1}} \cdot \dfrac{b^n c^{n-1}}{4\left(a^n c^2\right)^2}$;

д) $\dfrac{15\left(a^3 b^{n+2}\right)^2}{7a^n b^5} : \dfrac{\left(3a^{n-1} b\right)^2}{21 a^n b^{n-1}}$ $(n \in \mathbf{N})$.

673. а) $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) \cdot \dfrac{ab}{a-b}$; б) $\left(\dfrac{x}{3y} + \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z}{4y}\right) \cdot 12xyz$;

в) $\left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right) \cdot \dfrac{1}{x+y}$; г) $\left[1 - \dfrac{2ab}{(a+b)^2}\right] \cdot \dfrac{1}{a^2+b^2}$;

д) $\left(1 - \dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(2 + \dfrac{2b}{a-b}\right)$; ђ) $\dfrac{6x-3}{4x} \cdot \left(\dfrac{2x+1}{2x-1} - \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$.

674. а) $\dfrac{15x^2}{2x-10} \cdot \dfrac{x^2-25}{25x}$; б) $\dfrac{6y^3}{4-x^2} : \dfrac{3y^2}{2-x}$;

в) $\dfrac{x^2-y^2}{2x-y} : \dfrac{y^2-xy}{4x-2y}$; г) $\dfrac{x-ax^2}{ax-2} \cdot \dfrac{2ax-4}{a^2x^2-1}$;

д) $\dfrac{ax+ay}{x^2-3x} \cdot \dfrac{x-3}{x+y}$; ђ) $\dfrac{ax+ay}{bx-by} : \dfrac{x-y}{x+y}$;

е) $\dfrac{x+y}{x-y} : \dfrac{ax+ay}{bx-by}$;

ж) $\dfrac{ab+b^2-ac-bc}{a^2-ab+ac-bc} : \dfrac{a^2+ab-ac-bc}{ab-b^2-ac+bc}$.

675. а) $\left(\dfrac{15x^3}{y^4} - \dfrac{5x}{y^2} + \dfrac{5}{x}\right) : \left(\dfrac{3x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{x^2}\right)$;

б) $\left(a+b+\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a-b}\right) : \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2-1} - \dfrac{4a^2}{4a^4-1}\right) : \dfrac{a}{2a^2+1}$;

г) $\left(2x-1+\dfrac{15}{x-3}\right) : \left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)$;

д) $\left(\dfrac{a-b}{5ab^2} + \dfrac{b-a}{10a^2b}\right) : \left(\dfrac{1}{10a^2b} - \dfrac{1}{5ab^2}\right)$;

ђ) $\left(\dfrac{3x^3}{y^3} + \dfrac{9x}{y} + \dfrac{9y}{x} + \dfrac{3y^3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2\right)$;

е) $\left(\dfrac{x^3}{9y^3} + 3\right) : \left(x + \dfrac{9y^2}{x-3y}\right)$;

ж) $\dfrac{9x^2y^3}{m+n} : \left(\dfrac{3(m-n)y}{7(r+s)} : \left(\dfrac{4(r-s)}{21x^2y^2} : \dfrac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right)\right)$.

676. а) $\dfrac{a-2}{a-4}\left(\dfrac{4a}{a^2-4}+\dfrac{a}{6-3a}+\dfrac{a}{a+2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{3}{a-a^2}+\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}\right)\cdot\dfrac{a-2+a^2}{a^{n+1}-3a^n}$ $(n\in\mathbf{N})$;

в) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right):(a+b)^2+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right):(a+b)^3$;

г) $\left(\dfrac{1}{y^3}-\dfrac{3}{xy^2}+\dfrac{3}{x^2y}-\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\dfrac{x^2y^2}{x^2-2xy+y^2}$;

д) $\left(\dfrac{3x-2y}{2x-3y}-\dfrac{3x+2y}{2x+3y}\right)\left(\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{9}{2x^2}\right)$;

ђ) $\left(\dfrac{3a+4b}{3a-4b}+\dfrac{3a-4b}{3a+4b}+\dfrac{48ab}{9a^2-16b^2}\right)\left(1-\dfrac{8b}{3a+4b}\right)$;

е) $\left(\dfrac{x+3y}{x-3y}+\dfrac{3x+y}{3x-y}\right)\left(3+\dfrac{2y}{x-y}\right)\left(1-\dfrac{4y}{x+y}\right)$;

ж) $\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{a^2}\right)\dfrac{a^3b^2}{(a-b)^3}-\dfrac{a^2b^3}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{a^2}\right)$.

677. а) $\left[\dfrac{(a+b)^3}{3ab}-(a+b)\right]:\left(1+\dfrac{(a-b)^2}{ab}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2x}{x^2+2xy}+\dfrac{4y}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{xy-2y^2}\right):\left(1-\dfrac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right)$

в) $\left(\dfrac{y+1}{2y-2}+\dfrac{6}{2y^2-2}-\dfrac{y+3}{2y+2}\right)\cdot\dfrac{4y^2-4}{3}$;

г) $(2x^2+3x-2)\left[\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right):\left(1-\dfrac{1-2x^2}{1-x}\right)\right]$;

д) $\dfrac{2a^2b+2ab^2}{3a^2+6ab+3b^2}:\dfrac{1}{a+b}-\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\cdot\dfrac{a^3b^3}{3a^2-3b^2}$;

ђ) $\left(\dfrac{2}{a}-\dfrac{3}{b}\right)\cdot\dfrac{27}{4b^2-9a^2}:\dfrac{1}{2b+3a}$.

678. а) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)+\dfrac{2}{ab}:\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$;

б) $\left[\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{2xy}\right)\right]:\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

679. а) $\left(\dfrac{x}{x+y}\cdot\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right)$;

б) $\left[\dfrac{x^2+4x+4}{x}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}\cdot\dfrac{3x}{x^3-8}\right)\right]:\dfrac{x+2}{3x-6}$.

680. а) $\left(\dfrac{2a-3x}{a+x}+\dfrac{2x-3a}{a-x}+\dfrac{6ax-5x^2}{a^2-x^2}\right):\left(\dfrac{a}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right);$

б) $\left[\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right]:\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right);$

в) $\dfrac{a^2+ax}{2x(a^2-x^2)}\cdot\left[\dfrac{(a+x)^2}{4ax}-1\right];$

г) $\left(\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{2b}{b-a}\right)\cdot\dfrac{b-a}{a^2+b^2}+\left(\dfrac{a^2+1}{2a-1}-\dfrac{a}{2}\right):\dfrac{2+a}{1-2a}.$

681. а) $\left(\dfrac{a}{a^2-2a+1}-\dfrac{a}{1-a^2}-\dfrac{2}{a+1}\right):\dfrac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1};$

б) $\left[\dfrac{a+1+(a-1)a}{2(a^2-1)}-\dfrac{a}{2(a+1)}\right]:$

$\left[\dfrac{a^2+1}{2a^2-4a+2}+\dfrac{a}{(a-1)^2}-\dfrac{a+1}{a^2-2a+1}\right];$

в) $\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\left[\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right)\right]:\dfrac{c+b-a}{abc}.$

682. а) $\dfrac{1+a}{1-x^2}\cdot\dfrac{(a+x)^2-(1+ax)^2}{a^2-a};$ б) $\dfrac{x^3+yx^2}{x^4-y^4}\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y};$

в) $\dfrac{9-3x}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x^3-27}{2x^2+6x+18};$ г) $\dfrac{a^2-ab}{a^4-b^4}\cdot\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a-b};$

д) $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+7a+12}:\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+3a};$ ђ) $\left(\dfrac{x^3}{y^3}+1\right):\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}+1\right).$

683. а) $\left[\dfrac{b^2-(a-2)^2}{a^2-(b+2)^2}\cdot\dfrac{a-b-2}{a+b-2}\right]:\dfrac{4-(a-b)^2}{(a+b)^2-4};$

б) $\left[\left(\dfrac{3a}{a^3-b^3}:\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{3}{b-a}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]:\dfrac{a+b}{3};$

в) $\left[\left(\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{2c}{ab}\right):\dfrac{1}{a+b+2c}\right]:\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}\right);$

г) $\left[\dfrac{(x+y)^2-4xy}{xy-x^2}+\left(\dfrac{x-y}{x}\right)^2\right]^2:\dfrac{x^2y^2-y^4}{x^4}.$

684. а) $\dfrac{2x^2y^3-2x^3y^2}{4x^2y^2}\cdot\dfrac{3x}{(x-y)^2};$ б) $\dfrac{1}{a+3}\cdot\dfrac{a^3-9a}{a^2+a};$

в) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x^2y+xy^2}{xy};$ г) $\dfrac{a^2-b^2}{2a+2b}\cdot\dfrac{3a-3b}{a^2-2ab+b^2};$

д) $(x^2-y^2):\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2};$ ђ) $\dfrac{x+3}{x^2-9}:\dfrac{x^3+27}{x^2-3x+9};$

е) $\dfrac{a+2}{a-2} : \dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4}$; ж) $\dfrac{x^2-x^5}{x^3+x^2+x} : \dfrac{3x-3x^2}{6x+6}$.

685. а) $\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left[\dfrac{(x+y)^2+2y^2}{x^3-y^3}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right]$;

б) $\left(\dfrac{3x^2+3x+3}{1-x^2} : \dfrac{x^4-x}{x^3+1}-\dfrac{3}{1-x}\right) : \dfrac{3}{x-x^2}$;

в) $\left(\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} : \dfrac{x^3-y^3}{3x}\right)\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{9(2x+y)} : \dfrac{x+y}{3}$;

г) $\dfrac{3x-6}{x+2}\left(\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} : \dfrac{x^3-8}{3x}\right)\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{2x+2}$;

д) $\left(\dfrac{1}{4x+2}-\dfrac{1-x}{8x^3+1} : \dfrac{1-2x}{4x^2-2x+1}\right) : \dfrac{2x-1}{4x+2}-\dfrac{1}{4x^2-4x+1}$;

ђ) $\left(\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{2a^2+2a+2}{a^2-1} : \dfrac{a^4-a}{a^3+1}\right)\cdot\dfrac{a-a^2}{2}-\dfrac{a}{a-1}$;

е) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-1}$;

ж) $\dfrac{a^2-ax-x^2}{x^3-a^3}-\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{x+a}{x^2+ax+a^2}$.

686. а) $\dfrac{a+b-c}{a-b+c}\cdot\dfrac{a^2+b^2-2ab-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2}$; б) $\dfrac{a^3+27}{a^3-27}\cdot\dfrac{a^2+3a+9}{a^2-3a+9}$;

в) $\dfrac{a^2+ax}{5a^2-5x^2}\cdot\dfrac{5a^3-5x^3}{a^2-ax}$; г) $\dfrac{a^2}{x^2-ay}\cdot\left(\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x+y}{x}\right)$;

д) $\dfrac{a+b-c}{x+y-z} : \dfrac{b^2-c^2-a^2+2ac}{x^2+y^2-z^2+2xy}$;

ђ) $\dfrac{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2} : \dfrac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab}$.

687. а) $\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+2}$; б) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}-2}$; в) $\dfrac{b-\frac{1}{b}}{a+\frac{1}{b}}$; г) $\dfrac{3-\frac{1}{ab}}{\frac{1}{a}+\frac{3}{b}}$.

688. а) $\dfrac{\frac{10x}{2x-6}-\frac{9x+3}{2x-6}}{\frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x-y}}$; б) $\dfrac{\frac{2a}{5}-\frac{a}{3}+\frac{4a}{15}}{\frac{9a}{4}-2a+5}$;

в) $\dfrac{\frac{a+2}{a-2}+\frac{a-2}{a+2}}{\frac{a+2}{a-2}-\frac{a-2}{a+2}} : \left[\dfrac{1}{(a+2)^2}+\dfrac{1}{(a-2)^2}\right]$.

689. а) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-2-\dfrac{3b}{a}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{3b}{a}-4}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$.

6.5. ДОДАТАК УЗ ПОГЛАВЉА 6.1 ДО 6.4

Раставити на чиниоце изразе (задаци 690-695):

690. а) x^4+y^4; б) $x^4+x^2y^2+y^4$;
в) $x^4-x^2y^2+y^4$; г) $x^6-y^6+x^4+x^2y^2+y^4$;
д) $(x+y)^4+x^4+y^4$; ђ) $(x+y)^5-x^5-y^5$.

691. а) x^4+4; б) x^8+x^4+1;
в) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$; г) $x^{10}+x^5+1$.

692. а) $2x^4+x^3+4x^2+x+2$; б) $(x^2+5x)(x^2+5x+10)+24$.
в) $(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$; г) $(x^2+x)^2-2(x^2+x)-24$;
д) $(x^2+x+1)(x^2+x)-42$; ђ) $(x^2+x+1)(x^2+x)-6$.

693. а) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$;
б) $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$;
в) $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$;
г) $a^3+b^3-c^3+3abc$;
д) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;
ђ) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

694. а) $y^3(z-x)-x^3(z-y)+z^3(x-y)$;
б) $2x^2y^2+2z^2x^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$;
в) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$;
г) $x(z-y)^2-y(z+x)^2+z(x-y)^2+4xyz$;
д) $b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$;
ђ) $x^2z^2(z-x)+x^2y^2(x+y)-y^2z^2(y+z)$;
е) $xy(x-y)-xz(x+z)+yz(2x+z-y)$;
ж) $ab(a+b)+ac(a+c)+bc(2a+c+b)$;
з) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$;
и) $a^3(x-y)-x^3(a-y)+y^3(a-x)$.

695. а) $a^3+3a^2b-28ab^2$; б) $a^3+8a^2b-33ab^2$;
в) $14n^3+51n^2x+7nx^2$; г) $6mn^2+5mnx-4mx^2$;
д) $6a^3bx^2+11a^2b^2x-10ab^3$; ђ) $10a^2bx^3+9ab^2x^2y-9b^3xy^2$;
е) $6x^3y+13x^2y^2+6xy^3$; ж) $5x^3y-26x^2y^2+5xy^3$.

Доказати идентитете (задаци 696-697):

696. а) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2bc = (a - b - c - d)(a + b + c - d)$;
б) $a^3 + 8a^2 + 19a + 12 = (a + 1)(a + 3)(a + 4)$;
в) $a^2 + ac - bc - b^2 = (a - b)(a + b + c)$;
г) $a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = (a + 2)(a + 3)(a + 4)$;
д) $b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b - ab^2 = (a + b)(b + c)(c - a)$;
ђ) $a^3 + a^2c + abc + b^2c - b^3 = (a - b + c)(a^2 + ab + b^2)$;
е) $a^3 - 6a^2 - a + 30 = (a - 3)(a - 5)(a + 2)$.

697. а) $ac(a + c) - bc(b + c) + ab(a - b) = (a + c)(b + c)(a - b)$;
б) $xy(x - y) - xz(x - z) + yz(y - z) = (x - y)(x - z)(y - z)$.

698. Одредити константе A и B тако да буде:

а) $\dfrac{16 - 2x}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{A}{x - 5} + \dfrac{B}{x + 1}$; б) $\dfrac{7x - 2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{B}{x - 2}$;

в) $\dfrac{4x + 2}{x^2 + 4x - 5} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 5}$; г) $\dfrac{3x + 11}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{A}{x + 2} + \dfrac{B}{x + 3}$.

699. Упростити изразе:

а) $\dfrac{2n^2 + n - 1}{2n^2 - 3n + 1} - \dfrac{3n^2 - 2n - 1}{3n^2 + 4n + 1} - \dfrac{4n}{n^2 - 1}$;

б) $\dfrac{4x}{1 - x^2} + \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} - \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 3x + 1}$;

в) $\dfrac{3a^2 + 5a - 2}{6a^2 + a - 1} - \dfrac{3a^2 - 4a - 4}{6a^2 + a - 2} - \dfrac{6a + 1}{4a^2 - 1}$;

г) $\dfrac{6y + 1}{1 - 4y^2} + \dfrac{4y^2 + 7y - 2}{8y^2 + 2y - 1} - \dfrac{4y^2 - 7y - 2}{8y^2 - 2y - 1}$;

д) $\left(\dfrac{1 - x}{x^2 + x^3 - x^4} - \dfrac{x^3 + x - 2}{x^5 - x^3 - 2x^2 - x}\right) : \left(\dfrac{1 + x}{x^3 + x^4 + x^5} - \dfrac{1 - x + x^2}{x^3}\right)$;

ђ) $\left(\dfrac{3(x + 2)}{2(x^3 + x^2 + x + 1)} + \dfrac{2x^2 - x - 10}{2(x^3 - x^2 + x - 1)}\right) :$

$$\left(\frac{6}{x - 1} - \frac{20}{x^2 + 1} - \frac{6}{x + 1}\right);$$

е) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}} \cdot \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \dfrac{a - b - c}{abc}$;

ж) $\dfrac{\dfrac{x}{y^3} + \dfrac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \dfrac{\dfrac{x}{8y^3} - \dfrac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} - \dfrac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} + \dfrac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)}$;

з) $\dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + 2xy + y^2} : \dfrac{x^3 + xy^2}{x + y} - \dfrac{(x - \dfrac{4xy}{x + y} + y) : (\dfrac{x}{x + y} - \dfrac{y}{y - x} - \dfrac{2xy}{x^2 - y^2})}{x}$;

и) $\dfrac{8x^3+27}{8x^2-12x+18} : \left[\left(\dfrac{5}{2x+3} - \dfrac{2}{2x-3} + \dfrac{2x+9}{4x^2-9}\right) \cdot \dfrac{4x^2+12x+9}{8}\right];$

ј) $\left[x - \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x^3+1} + \dfrac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x - \dfrac{2x-1}{x+1}\right)\right] \cdot (x^2+x+1);$

к) $\left(\dfrac{x^2+8}{x^3-8} + \dfrac{x}{x^2+2x+4} - \dfrac{1}{x-2}\right)\left(\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{2}{2-x}\right);$

л) $\dfrac{\dfrac{1+a^2}{1-a^2} - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}}{\dfrac{1+a}{1-a} - \dfrac{1-a}{1+a}};$

љ) $\dfrac{\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} - \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2}{a^3-b^3} - \dfrac{a}{a^2+ab+b^2}};$

м) $\dfrac{x+y-\dfrac{4xy}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y} - \dfrac{y}{y-x} - \dfrac{2xy}{x^2-y^2}};$

н) $\dfrac{\dfrac{y}{x} + \dfrac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} : \dfrac{x^3+y^2x}{x+y} + x}{\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1} + \dfrac{2x^2}{x^3-x^2+x-1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} : x;$

њ) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2b} + \left[\dfrac{1}{b^4} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a-b^2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b^2}\right)\right] : \dfrac{2ab^2-a^2-b^4}{ab^2}}{1 : \left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} + \dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)};$

о) $\left[\left(\dfrac{x^2}{y^3} + \dfrac{1}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)\right] : \dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}};$

п) $3x^2 : (\dfrac{x^4-2x^3+x^2-16}{x^2-x-4} + \dfrac{3x^4+x^3+4x^2+x+3}{3x^2-2x+3} +$
$\dfrac{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}{x^2+x+2} - x - 7);$

р) $\dfrac{2 - \left[\left(\dfrac{5x+5}{5x}\right)^2 + \dfrac{2x+2}{x} - \dfrac{2x+1}{x} + 1\right] : \dfrac{2x+1}{x^2}}{(x^6+2x^5+x^3-2x^2-2) : (x^3+2x^2+2)};$

с) $(x^2-x+1) : \left[(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2 + 2(x+\dfrac{1}{x})^2 - 3\right];$

т) $\dfrac{(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2 - 14(x+\dfrac{1}{x})^2 + 77}{(x^4-7x^2+1)^2}.$

700. Средити изразе:

а) $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{2}{(x-1)(x-3)} + \dfrac{3}{(x-1)(x-2)};$

б) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} - \dfrac{1}{b(c-b)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

701. Упростити изразе:

а) $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$; б) $\dfrac{|x|-1}{x^2-1} - \dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$;

в) $\dfrac{x^2-|x-2|-4}{x^3+2x^2-5x-6}$; г) $\dfrac{x+|x|+|x-2|}{3x^2-8x+4}$;

д) $\left(\dfrac{x^2|2-x|}{x-2} + 2x - 4 - \dfrac{2x|x-1|}{x-1}\right) : |x-2|$.

702. Нека су a, b и c међусобно различити бројеви који нису једнаки 0, а x, y и z произвољни реални бројеви. Ако важи $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, доказати да је $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)}$.

703. Ако је $a^2+b^2 = (a+b-c)^2 \neq 0$, $b \neq c$, доказати да је

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}.$$

704. Ако је $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$ и $abc \neq 0$, $a+b+c \neq 0$, доказати да је:

а) $a+b=0$ или $b+c=0$ или $c+a=0$;

б) $\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{c^n} = \dfrac{1}{a^n+b^n+c^n}$ за било које непарно n.

705. Ако је $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=1$, израчунати $x^4+y^4+z^4$.

706. Ако је $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^3+y^3+z^3=1$, доказати да је $xyz=0$.

707. Ако је $x^2+z^2=a^2, y^2+z^2=b^2$, доказати да је

$$b^2x^4 - a^2y^4 + (a^2-b^2)z^4 = a^2b^2(a^2-b^2).$$

708. а) Нека је $M_1(x) = NZS\{x^3-1, x+1, x^2-x+1\}$, $M_2(x) = NZS\{x^2-1, 8x^3-8, x^2-2x+1\}$, $D_2(x) = NZD\{x^2-1, 8x^3-8, x^2-2x+1\}$. Упростити израз $E(X) = \dfrac{M_2(x)\cdot D_2(x)}{M_1(x)} \cdot \dfrac{x^5+x^3+x}{x^3+x^2+x} : \dfrac{(6x^2y^2-15x^2:5x)(16xy^2+8)}{12x^3y^4-3x}$.

б) Упростити израз $\left(\dfrac{x^4+2x^3-2x-1}{M(x)} + x + x^2\right) : (x+1)$, ако је $M(x) = NZS\{x+1, x^2-1, x^2+2x+1\}$.

в) Упростити израз

$$\frac{M(x,y)}{\dfrac{6x^2y^2-3x^3y-3xy^3+(x-y)(x^3-y^3)}{(y-x)(y^2+x^2-2xy)}},$$

ако је $M(x,y) = NZS\{x^2-xy, x^2-2xy+y^2\}$.

709. Нека је $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ полином са целобројним коефицијетима ($a_i \in \mathbf{Z}$ за $i \in 0, 1, \ldots, n$). Доказати:

а) Ако је за цео број α испуњено $P(\alpha) = 0$, онда $\alpha | a_0$;

б) Ако је за $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ и НЗД$(p, q) = 1$ испуњено $P(p/q) = 0$, онда $p|a_0$ и $q|a_n$.

710. Користећи Безуову теорему раставити на чиниоце полиноме:

а) $x^3 - 19x + 30$; б) $x^3 - 7x - 6$;

в) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$; г) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$;

д) $27x^3 - 45x^2 + 24x - 4$; ђ) $x^3 + 2y^3 - 3xy^2$.

711. а) Ако полином $p(x)$ при дељењу са $x-1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x+1$ остатак 1, наћи остатак при дељењу полином $p(x)$ са $x^2 - 1$.

б) Ако $p(x)$ при дељењу са $x-1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x-2$ остатак 4, наћи остатак при дељењу $p(x)$ са $(x-1)(x-2)$.

712. Раставити на чиниоце полиноме:

а) $2x^4 - 11x^3 + 16x^2 - x - 6$; б) $3x^4 + 26x^3 + 24x^2 - 74x + 21$;

в) $2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 59x + 30$; г) $3x^4 + 26x^3 + 60x^2 + 22x - 15$;

д) $6x^4 - 19x^3 + 14x^2 + x - 2$; ђ) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 16x - 12$;

е) $x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 23x^2 + 32x - 21$.

713. Проверити да ли је полином $P(x) = \left(x^2 + x - 1\right)^{2n} + \left(x^2 - x + 1\right)^{2n} - 2$ дељив са $x^2 - x$ ($n \in N$).

714. За које вредности p и q је полином $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + px + q$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 3x + 2$?

715. Нека су a, b, c, x, y, z бројеви различити од нуле. Ако је $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ доказати да је $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

716 а) Ако је $x+y+z = 0$, $a+b+c = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ $(a, b, c \neq 0)$, доказати да важи $xa^2 + yb^2 + zc^2 = 0$.

б) Ако је $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ $(a, b, c \neq 0)$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $a + b + c = 1$, доказати да важи $xy + yz + zx = 0$.

717. Одредити вредности x, y тако да израз $E(x, y)$ има најмању вредност:

а) $E(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$;

б) $E(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 1$.

6.6. ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Линеарна једначина по x је свака једначина са непознатом x која се еквивалентним трансформацијама своди на једначину облика

$$ax = b,$$

где су a и b реални бројеви.

1° Ако је $a \neq 0$, онда једначина има јединствено решење $x_1 = \frac{b}{a}$.

2° Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, онда једначина нема решења (једначина је немогућа).

3° Ако је $a = b = 0$, онда једначина има бесконачно много решења (свако $x \in \mathbf{R}$ је решење).

Једначине $A(x) = 0$ и $B(X) = 0$ су еквивалентне ако је свако решење прве једначине уједно решење и друге једначине и обрнуто (тј. ако је тачна формула $A(x) = 0 \Leftrightarrow B(x) = 0$).

Решити једначине (задаци 718-720):

718. а) $3(x+2) - 2(1-x) = 4x + 5$;

б) $5(2x-1) - 3(4x-5) = -3x + 11$;

в) $3x - (15 + 2x - (5x + 11)) = 2x - 8$;

г) $8(2x - (3x+2)) + 18 = 7x - (3x - 5(2x-4)) + 22$.

719. а) $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$; б) $\frac{5(x-2)}{4} = -\frac{x}{3} + 2x$;

в) $\frac{x-1}{4} = 0,5 - \frac{6-5x}{8}$; г) $\frac{5-x}{6} = 1 - \frac{7x+2}{12}$;

д) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} = x + 1 + \frac{x-3}{6}$;

ђ) $7 - 2x - \frac{1-3x}{7} = 2 - \frac{2x-1}{3}$.

720. а) $5x + (x-1)^2 = (x+2)(x-2) + 3x + 5$;

б) $(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = (2x+5)^2$;

в) $(x+2)(x+5) = 3(4x-3) + (5-x)^2$;

г) $(x-2)^2 - (x-3)(x+3) = 13 - 4x$;

д) $(3x-1)^2 - (x-1)^2 = 5(2x+1)^2 - (6x-3)(2x+1)$;

ђ) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12(x^2 - x) - 8$;

е) $(2x-1)^3 + 2x = 4x(2x^2 - 3x) + 15$.

721. Применом формуле $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \vee B = 0)$ решити једначине:

а) $(x-1)(x-2) = 0$; б) $(x+1)(3x-2) = 0$;

в) $5(3x+1)(x-2) = 0$; г) $(x-1)(x+2)(x-3) = 0$;

д) $(x+2)(3x-2) - (x+2)(2x+1) = 0$;

ђ) $(x+3)(2x-5) = (x+3)(x-1)$;

е) $(x-2)(3x+1) = (2-x)(x+5)$;

ж) $(2x-1)(x-3) = (3x-1)(1-2x)$.

Решити једначине (задаци од 722-725):

722. а) $\dfrac{x-2}{2x+1} = 0$; б) $\dfrac{3x+1}{x-4} = 0$; в) $\dfrac{x-1}{2x-2} = 0$;

$\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$; д) $\dfrac{x-3}{x^2-6x+9} = 0$; ђ) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2} = 0$.

723. а) $\dfrac{15x+54}{5x+24} - 3 = \dfrac{3(4x-1)}{10x+4} - \dfrac{6x}{5x+24}$;

б) $3 - \dfrac{9}{2x-5} + \dfrac{3x}{3x-2} = 5 - \dfrac{2x}{2x-5}$;

в) $\dfrac{6x^2+9}{3x^2-x} - 2 = \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{3x-1}$;

г) $\dfrac{20x+9}{2x+1} - \dfrac{24x^2+5}{4x^2-1} = \dfrac{40}{10x-5} + 4$;

д) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{10x}{x^2+5x+6} + \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{x+3}$.

724. а) $\dfrac{2x+19}{5x^2-5} - \dfrac{17}{x^2-1} - \dfrac{3}{1-x} = 0$;

б) $\dfrac{2x+1}{3x-2} - \dfrac{2x-1}{3-2x} - \dfrac{4x^2-3x+3}{6x^2-13x+6} - 1 = 0$;

в) $\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2} + \dfrac{3+2x}{1+2x} - \dfrac{5+2x}{7+2x} - 1 = 0$;

г) $\dfrac{x+6}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+6} = \dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$;

д) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2(x+1)}{3x-3} = \dfrac{1}{3}$.

725. а) $\dfrac{1}{x^2+2x+1} + \dfrac{4}{x+2x^2+x^3} = \dfrac{5}{2x+2x^2}$;

б) $\dfrac{1}{(3-2y)^2} - \dfrac{3}{9-4y^2} = \dfrac{4}{(3+2y)^2}$;

в) $\dfrac{7}{z^2-1} + \dfrac{8}{z^2-2z+1} = \dfrac{37-9z}{z^3-z^2-z+1}$;

г) $\dfrac{6u+5}{4u+3} + \dfrac{3u-7}{3-4u} = \dfrac{12u^2+30u-21}{16u^2-9}$;

д) $1+\dfrac{5}{(v-3)(v+2)}=-\dfrac{1}{v+2}$;

ђ) $2+\dfrac{1}{t-3}=\dfrac{4-t}{t-3}$;

е) $\dfrac{1}{2x-18}-\dfrac{x}{x^2-81}=\dfrac{5}{4x+36}$;

ж) $\dfrac{x-4}{x+4}+\dfrac{x+5}{x-5}=\dfrac{2x(x+5)}{x^2-x-20}$;

з) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}=\dfrac{2}{x^3+8}$;

и) $\dfrac{\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{2}{x-5}}{\dfrac{3}{x-5}+\dfrac{4}{x+5}}=-\dfrac{2}{3}$.

726. Доказати да следеће једначине немају решења:

а) $\dfrac{3x+2}{x-1}+\dfrac{2x+3}{1-x}=0$;

б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$;

в) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4x+1}{x^2-1}$;

г) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$;

д) $\dfrac{2}{x^4+2x^3+4x^2}+\dfrac{x+1}{8-x^3}=\dfrac{1}{2x^2-x^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

727. Да ли су еквивалентне следеће једначине:

а) $x=1$ и $2x-3=-1$;

б) $0\cdot x=1$ и $x+1=x$;

в) $(x-2)(x-1)=2(x-1)$ и $x-2=2$;

г) $x^2=x$ и $x=1$;

д) $x+1=0$ и $x+1+\sqrt{x}=\sqrt{x}$;

ђ) $\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ и $x+1=2$;

е) $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3$ и $x+1=3$;

ж) $x-3+\dfrac{1}{x-2}=5+\dfrac{1}{x-2}$ и $x-3=5$;

з) $x-3+\dfrac{1}{x-8}=5+\dfrac{1}{x-8}$ и $x-3=5$?

728. Дате су једначине: $\dfrac{2a-x}{3}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{3}$ и $\dfrac{y}{2}+y-a=1$.

а) Решити једначине по x и y.

б) Одредити a тако да је $x=y$ и наћи то заједничко решење.

729. Решити једначине ($m\in\mathbf{R}$):

а) $mx+5=3x-15m$;

б) $mx+2=4x-m$;

в) $(m+6)x-5=0$; г) $mx-m+m^2=0$;

д) $(m+5)x-m^2+25=0$; ђ) $m^2x+3=9x+m$;

е) $(m+5)(m-3)x=m+5$; ж) $(m^2-3m+2)x=m-1$;

з) $m^2x+1=m(x+1)$; и) $m^2(1-mx)=4(1+2x)$;

ј) $m^2(mx-1)=8x-4$; к) $mx-4x+3m=7$;

л) $(m-1)(m-2)(m^2-9)x=m^3-7m+6$.

Решити једначине ($a,b,c\in\mathbf{R}$) (задаци 730-733):

730. а) $(a^2-4a+3)x=a^2-a-6$;

б) $(b^2+b-2)x=b^2-4b+3$;

в) $(a^2+2a-3)x=a^2-5a+4$.

731. а) $(x+a)^2=(x+b)^2$;

б) $(3a-x)(a-b)+2ax=4b(a+x)$;

в) $(a+x-b)(a-b-x)=(a^2-x)(b^2+x)-a^2b^2$;

г) $2b^2-\dfrac{(3c^2-5b^2)ax}{bc^3}=\dfrac{2ax}{c}-3b+\dfrac{5abx}{c^3}$;

д) $\dfrac{2x-3b}{3a+b}-\dfrac{3x-4a}{b-3a}=\dfrac{3ax+12ab+5b^2}{9a^2-b^2}$;

ђ) $\dfrac{ax-3}{a-2}+\dfrac{ax+3}{a+2}=\dfrac{2ax}{a+2}$;

е) $\dfrac{x-b}{a^2+ab}-\dfrac{x+b}{a^2-ab}=\dfrac{2b}{a^2-b^2}$.

732. а) $a^2b-\dfrac{a+x}{b}=ab^2-\dfrac{b+x}{a}$;

б) $\dfrac{x+a}{a-b}+\dfrac{x+a}{a+b}=\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{2(x-b)}{a-b}$;

в) $\dfrac{a(x-a)}{b}+\dfrac{b(x-b)}{a}=x$;

г) $(ab+2)x+b=2a+(a+2b)x$.

733. а) $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{4a^2-4a+2}{a^2-x^2}=0$;

б) $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{3b^2-4b+3}{b^2-x^2}$;

в) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{b}{x^2-a^2}$;

г) $\dfrac{x-2a}{x+2a}=\dfrac{x-a}{x+7a}$;

д) $\dfrac{2}{x+a}-\dfrac{3}{x-a}+\dfrac{5a}{x^2-a^2}=0$;

ђ) $\dfrac{x-6a}{x+6a}+\dfrac{x+6a}{x-6a}=\dfrac{2x(x+4a)}{x^2-36a^2}$.

е) $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{ax^2-a^2x+a^3}{x^4+2a^2x^2+a^4}=\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}$.

734. Решити једначине

а) $|x+2|=2(3-x)$; б) $2|x-2|=x+1$; в) $|2x-1|=3x+1$

и дати геометријску интерпретацију.

735. Решити једначине:

а) $|x+2|-3=2x-6$; б) $2|x+1|+x-3=0$;

в) $|2x-3|=x$; г) $|x+1|+|x-1|=4$;

д) $2|x+1|-3|x-2|=1$; ђ) $|x+4|-|x-3|=x$;

е) $|x+2|+|x-3|=5-5x$; ж) $|x-4|-|x-6|=2$;

з) $||x|-2|=5$; и) $x+|x|+|x-1|=2$;

ј) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$; к) $||2x-3|-x+1|=4x-1$;

л) $|x-1|+|x-2|+|x-3|=18$; љ) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$;

м) $|x|-|x-2|=2$; н) $||x|-1|+||x|+2|=3$.

736. Који број треба додати бројиоцу и имениоцу разломка $\frac{3}{7}$, да би се добио разломак једнак $\frac{2}{3}$?

737. Мајка има 27 година, а ћерка 3 године. Кроз колико година ће мајка бити четири пута старија од ћерке?

738. Једна цев напуни базен за 15 часова, друга за 20, а трећа за 30 часова. Колико је часова потребно да се напуни базен ако све три цеви пуне базен истовремено?

739. У извесну количину 75%-ог алкохола додато је 12 l воде, чиме је добијен 51% - ни алкохол. Колика је била првобитна количина алкохола?

740. У три сандука налази се укупно 64,2 kg брашна. У другом сандуку је $\frac{4}{5}$ количине из првог, а у трећем 42,5% количине из другог. Колико је брашна у ком сандуку?

741. Аутобус је возио из Београда за Панчево просечном брзином 30 km/h, а затим се вратио назад. Којом просечном брзином се вратио ако је просечна брзина на читавом путу износила 35 km/h?

742. Неком троцифреном броју допише се цифра 8 једном на почетку и једном на крају. Разлика тако добијених бројева је 1107. Који је то број?

743. Шестоцифрен број има на месту јединица цифру 7. Ако се та цифра премести на највише место, добија се број пет пута већи од полазног. Који је то број?

744. Иван сада има четири пута више година него што је Марко имао када је био два пута млађи од Ивана. Колико година сада има Марко ако ће кроз петнаест година заједно имати 100 година?

745. У разреду су $\frac{3}{7}$ ученика - девојчице. Ако би дошле још четири девојчице, тада би у разреду било једнак број девојчица и дечака. Одредити колико је ученика у разреду било.

746. У кутији се налазе јабуке. Прво се из кутије узме половина свих јабука и још половина једне јабуке, затим се од остатка узме половина и још пола јабуке, и најзад, од последњег остатка, узме се половина и још пола јабуке. После овога у кутији је остала још 31. јабука. Колико је јабука било у кутији?

747. Антикварница је откупила два предмета за 2250 динара и продала их са зарадом од 40%. Колико је антикварница платила сваки од предмета, ако је на првом зарадила 25%, а на другом 50%?

748. Ученици једне школе иду на екскурзију. Када би сваки ученик уплатио по 75 динара недостајало би 440 динара, а ако сваки ученик уплати по 80 динара преостаће 440 динара. Колико ученика иде на екскурзију?

749. Наћи брзину и дужину воза, знајући да он пролази сталном брзином поред непокретног посматрача за 7 секунди и да поред платформе дужине 378 m пролази истом брзином за 25 секунди.

750. Улазница за зоолошки врт кошта 150 динара. После снижења цене, број посетилаца се повећао за половину, а приходи су порасли за четвртину. Колико је снижење цена?

751. Човек, рођен у XX веку, пуни 1995. године онолико година колики је збир цифара његове године рођења. Које је године рођен?

752. Одредити време када ће се и први пут после 12 h поклопити велика и мала сатна казаљка.

753. Путник је, идући на железничку станицу, прешао 3 km за час хода и утврдио, да ће, ако буде ишао истом брзином, закаснити на воз 20 минута. Зато је кренуо брже и прелазио је 0,5 km на час више и стигао је на станицу 40 минута пре поласка воза. Колики је пут прешао путник и колико је имао времена на располагању?

754. Једном ученику недостаје седам динара, а другом два динара да би сваки од њих могао да купи кутију бојица. Зато су решили да за новац, који поседују, заједнички купе једну кутију, али им и тада недостаје један динар. Колико кошта једна кутија бојица?

755. Четири друга заједнички су купили фудбалску лопту. Први је дао половину новца, други је дао трећину суме коју су дала остала тројица, трећи је дао четвртину суме, коју су дала остала тројица, а четврти је дао 50 пара. Колика је цена лопте?

6.7. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Систем од две линеарне једначине са две непознате x, y је конјукција једначина

$$(*)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где су a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 дати реални бројеви.

Решења једначина одређена су формулама:

$$x = \frac{c_1b_1 - c_2b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_1 - a_2b_1},$$

где је $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (детерминанта система).

1° За $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $(\Delta \neq 0)$ систем $(*)$ има јединствено решење.

2° За $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $(\Delta = 0)$ систем $(*)$ има бесконачно много решења (неодређен је).

3° За $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ $(\Delta = 0)$ систем $(*)$ нема решења.

Различитим методама решити следеће системе једначина (задаци 756-760):

756. а) $\begin{cases} 5x - 3y = 17, \\ 2x + 3y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 23, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 2x - \frac{1}{2}y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ -2x + 4y = -12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ x + 2y = 8; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} x - 3y = -1, \\ 7x + y = 15; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x\sqrt{5} - 5y = \sqrt{5}, \\ x - y\sqrt{5} = 5. \end{cases}$

757. а) $\begin{cases} \frac{4x + 5y}{3} = \frac{x - 3y}{2} + 4, \\ \frac{3x + y}{2} = \frac{2x + 7y}{3} - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5x + 2y}{4} = \frac{7x - 5y}{3}, \\ \frac{7x - 2y}{3} = \frac{5x + 2y}{4} + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+2=\dfrac{5x+2y}{2}-\dfrac{7}{6}, \\ \dfrac{3x+y}{2}+1=\dfrac{7x-4y}{3}+2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{3(x+2y)+2}{2}=\dfrac{3(x-y)+1}{4}+6, \\ \dfrac{4(x-2y)+9}{3}=\dfrac{5(x-3y)+3}{2}+4. \end{cases}$

758. а) $\begin{cases} (3x-2)(2y+3)=(6x-1)(y+3)-27, \\ (4x+1)(3y+2)=(2x+5)(6y-4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4(x+1)^2+9(y-2)^2=(2x-3)^2+(3y-5)^2-20, \\ (x+2)^2-(y+3)^2=(x+1)^2-(y-2)^2-14. \end{cases}$

759. а) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y+2}=\dfrac{4x+1}{6y-1}, \\ \dfrac{7x-3}{y+3}=\dfrac{14x+1}{2y+13}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5y+1}=\dfrac{3x-4}{5y-2}, \\ \dfrac{x+3}{y+3}=\dfrac{x-4}{y-4}. \end{cases}$

760. а) $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{4+3x}=\dfrac{5y}{5y+4}, \\ \dfrac{1-2x}{6-4y}=\dfrac{3x+2}{6y-2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y+3}{x+2}=\dfrac{y+5}{x+3}, \\ \dfrac{x-1}{x}-\dfrac{y-5}{y}=\dfrac{8}{xy}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-6}{y-4}+\dfrac{10}{y^2-16}=\dfrac{x+6}{y+4}, \\ \dfrac{5}{y^2-3y}+\dfrac{2}{3x-xy}=\dfrac{10}{xy}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-3}-\dfrac{x+5}{y+1}=\dfrac{3}{(y+1)(y-3)}, \\ \dfrac{2x+y}{15-8x-4y}=\dfrac{4x-y}{5-16x+4y}. \end{cases}$

761. Увођењем нових непознатих решити системе једначина:

а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=16, \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-4}=5, \\ \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{y-4}=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{y+1}=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=1,1, \\ \dfrac{9}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=-0,1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7, \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y} + \dfrac{4}{2x-3y} = 5, \\ \dfrac{15}{2x+y} - \dfrac{2}{2x-3y} = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y} + \dfrac{18}{3x-2y} = 13, \\ \dfrac{27}{3x-2y} - \dfrac{2}{2x-3y} = 1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{1-x-y} = 0,1, \\ \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{x+y-1} = 0,3. \end{cases}$

762. Испитати да ли дати системи (не решавајући их) имају јединствено решење, немају решења, или имају бесконачно много решења:

а) $\begin{cases} 3x-4y=5, \\ 5x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x-6y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ -4x+2y=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 2x-5y=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 2x-3y=4; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} -6x+4y=5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

763. Наћи услов при којем систем: $2x+my=3 \ \wedge \ x-3y=4n$ има бесконачно много решења по x и y.

764. У зависности од реалног параметра a, испитати услове под којима систем: $ax-6y=7 \ \wedge \ 2x+3y=4$ неће имати решење.

765. Решити систем једначина по x, y (a, b су параметри).

$$\begin{cases} ax+4y=3, \\ 5x-2y=b. \end{cases}$$

Решити системе једначина (задаци 766-767) где су a и b реални параметри.

766.

а) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x+ay=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax+ay=1, \\ x+y=-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} ax+y=2, \\ x+y=2a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ -2x+ay=0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} ax-y=b, \\ bx+y=a; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} ay-bx=0, \\ y-x=b-a. \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x+3y=a, \\ 2x+by=a; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x-ay=a, \\ x+by=b; \end{cases}$

767.

а) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x+ay=a^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax+4y=2, \\ 9x+ay=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 13x + 2y = 0, \\ 5x + ay = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a. \end{cases}$

Решити системе једначина (задаци 768-769) $a, b \in \mathbf{R}$:

768. а) $\begin{cases} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2|y| = -1, \\ 2|x| - 3y = -1. \end{cases}$

769. а) $\begin{cases} |2x - 1| - y = 2, \\ x - |4 - y| = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x + y| = x - y + 4, \\ |x - y| = x + y - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x + y| = x - y + a, \\ |x - y| = x + y + b, a, b \in \mathbf{R}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |x - 2| + |y - 3| = 1, \\ |x - 2| - y = -3; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} |x + 1| + |y - 3| = 1, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2|x - 1| - y = 6, \\ x + |y + 3| = 4; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} |x| + |y + 1| = 3, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

Решити следеће системе једначина:

770. а) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y + 3z = 13, \\ -x + 5y - 2z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 6y + 8z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 26, \\ 3x - 4y + 5z = 18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 11, \\ 2x + 5y + 4z = 20, \\ 3x + 8y + 9z = 37; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 4, \\ z + x = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 4x + 6y + 2z = 5, \\ x - y + z = 5; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} 4x - y + 4z = 0, \\ x + 5y - 2z = 3, \\ -x + 8y - 2z = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 3x - 5y + 5z = 3, \\ 5x - 8y + 6z = 5; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 5x - 6y + z = 4, \\ 3x - 5y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 5. \end{cases}$

771. Удаљеност градова M и N је 600 километара. Два воза крећу истовремено из ових градова у сурет један другом. Први стиже три часа раније од другога и пређе 250 km, док други воз за исто време пређе 200 km. Наћи брзине ова два воза.

772. Растојање места X и Y на реци је 20 километара. Веслач је у чамцу прешао пут из X у Y и обратно за 10 часова. Наћи брзину реке, ако је два километра узводно превеслао за исто време као и три километра низводно.

773. Иван има два пута више година него што је Марко имао када је Ивану било толико година колико је сада Марку. Заједно имају 35 година. Колико је стар свако од њих?

774. Светлана и Нада имају заједно 63 године. Када је Светлана имала онолико година колико Нада има сада, Нада је имала два пута мање, него Светлана сада. Колико сада њих две имају година?

775. Такмиче се три бригаде дрвосеча. Прва и трећа бригада оборише су два пута више дрва, него друга, а друга и трећа, три пута више, него прва. Која је бригада победила у овом такмичењу?

776. Пет радника обављају један посао. Први, други и трећи, радећи заједно, завршили би читав посао за $7,5$ h, први, трећи и пети за 5 h, први, трећи и четврти за 6 h, а други, четврти и пети за 4 h. За које време би посао завршило свих пет радника, радећи заједно?

777. Два радника, радећи заједно завршиће један посао за 5 дана. Ако би први радио два пута брже, а други два пута спорије, посао би завршили за 4 дана. За колико дана би завршио посао први радник, радећи сам?

778. Студент медицине је у току петогодишњих студија положио укупно 31 испит. Сваке следеће године студија дао је више испита него претходне. На петој години дао је три пута више испита него на првој. Колико је испита положио студент на четвртој години?

779. Два суда, запремине 144 l и 70 l, садрже извесне количине воде. Ако се већи суд допуни из мањег, у мањем ће остати 1 l воде. Ако се, пак, мањи суд допуни из већег, тада у већем остаје $\frac{3}{4}$ првобитне количине воде. Колико воде има у сваком суду?

780. У два бурета налази се уље - у првом два пута више него у другом. Када се из првог одлије 30 литара, а из другог 20 литара, тада у првом остаје три пута више уља него у другом. Колико је уља било у сваком бурету пре одливања?

781. Удаљеност градова A и B је 650 километара. Два воза из ових градова крену истовремено један другом у сустрет и мимоиђу се после 10 часова. Ако би воз из града A кренуо 4 h 20 min раније, сусрели би се 8 часова после поласка воза из града B. Одредити просечне брзине ових возова.

782. Пут од места A до места B је укупне дужине $11,5\ km$ и иде прво узбрдо, затим је раван, а потом низбрдо. Пешак је идући од A до B прешао читав пут за $2\ h\ 54\ min$, а у обрнутом смеру за $3\ h\ 6\ min$. Знајући да је брзина пешака $3\ km/h$ узбрдо, $4\ km/h$ на равном путу и $5\ km/h$ низбрдо, наћи дужину равног дела пута.

783. Из места A је у $12\ h$ пошао воз. У $14\ h$ је у истом смеру пошао други воз и стигао је први у $20\ h$. Наћи средње брзине возова, ако је збир њихових средњих брзина $70\ km/h$.

784. По кружној линији, дужине $1,2\ m$ крећу се две тачке сталним брзинама. Ако се крећу у супротним смеровима, срешће се кроз $15\ sec$, а ако се крећу у истом смеру, једна тачка ће стићи другу за $60\ sec$. Наћи брзине тачака.

6.8. ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Основне линеарне неједначине су

$$(1)\quad ax+b>0, \qquad (2)\quad ax+b\geq 0,$$

$$(3)\quad ax+b<0, \qquad (4)\quad ax+b\leq 0,$$

где су a и b дати реални бројеви. На ове неједначине се своде и разне друге идентичним трансформацијама израза уз примену аксиома уређености скупа реалних бројева.

Неједначина $ax+b>0$:

1° за $a>0$ има за решење сваки реални број x за који је

$$x>-\frac{b}{a};$$

2° за $a<0$ има за решење сваки реалан број x за који је

$$x<-\frac{b}{a};$$

3° за $a=0$ и $b>0$ има за решење сваки број $x\in\mathbf{R}$;

4° за $a=0$ и $b\leq 0$ нема решења.

Слично се разматрају неједначине облика $ax+b\leq 0$, $ax+b<0$, односно $ax+b\geq 0$.

785. Наћи све реалне бројеве x који задовољавају неједначину:

а) $-x+2\geq 0$; б) $-3x+1<0$;

в) $-7x - 1 \geq 0$; г) $-4x \geq -2x + 3$;

д) $-6x \geq -8x$; ђ) $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$;

е) $(x+1)(x+2) + 3(1-x) < (x-1)^2$;

ж) $(x+1)^3 + (1-x)^3 \leq (x+1)(1-x) + x^2$.

786. Решити неједначине:

а) $5(4-2x) - \frac{1-x}{2} + \frac{4-x}{3} \geq 2(5x-1) - \frac{3-7x}{6}$;

б) $10(x-1) - \frac{3-x}{2} \leq 5(x+2) - \frac{4-x}{5} - x$.

787. Решити систем неједначина:

а) $2(3x-1) < 3(4x+1) + 16,\ 4(2+x) < 3x + 8$;

б) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} > 15 + \frac{5x}{6},\ \frac{x-3}{4} + \frac{2+3x}{2} \geq 5$;

в) $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6},\ 2x(2x-5) - 27 \leq (2x+1)^2$;

г) $(x-1)(2x+3) \leq (2x-5)(x+4),\ (4x+2)(x-1) > (2x-5)(2x+1)$;

д) $4 - x < 0,\ 5x - 3 > 1 + x,\ \frac{1}{2} - 3x < \frac{2}{3}x - 5$.

Решити неједначине (задаци 788-794):

788. а) $(x-1)(x+3) > 0$; б) $(x+1)(x-2) < 0$;

в) $(x+1)(x+4) \geq 0$; г) $x(x-3) \leq 0$;

д) $x^2 + 2x > 0$; ђ) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$;

е) $2x^2 + 5x - 7 > 0$; ж) $2x^2 + x - 10 \leq 0$.

789. а) $\frac{x-2}{2x+1} < 0$; б) $\frac{2x-3}{x-3} > 0$;

в) $\frac{x+3}{x-4} \leq 0$; г) $\frac{2-3x}{4x+5} \leq 0$.

790. а) $\frac{2x-3}{x-4} \leq 1$; б) $\frac{x-2}{x+1} \leq 3$; в) $\frac{2x-5}{x+3} \leq 1$.

791. а) $0 < \frac{3x-1}{2x+5} < 1$; б) $1 \leq \frac{2-x}{x+1} \leq 2$; в) $1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2$.

792. а) $\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)} < 2$; б) $\frac{x^2-9}{(x-3)(x-4)} < 8$.

793. а) $(x+1)(x-2)(x+3) \le 0$; б) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} < 0$;

в) $(x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0$; г) $\dfrac{1}{2x-1} < \dfrac{2}{3x+1}$;

д) $7(5-13x)(11x-3) > 0$; ђ) $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x}{x+1}$;

е) $\dfrac{x-3}{x-1} > \dfrac{x-5}{x-3}$; ж) $\dfrac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)} \le 0$.

794. а) $\dfrac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8} < 2$; б) $\dfrac{3x^2-22x+37}{x^2-6x+8} > 2$.

795. Ако је $a > b \ge 0$, наћи скуп решења неједначине $ax + \dfrac{b}{x} < a + b$.

796. Дати су изрази $A = x^3 + 1$, $B = x^2 + x$, где је x реалан број. За које x је

а) $A > B$; б) $A = B$; в) $A < B$.

797. Решити неједначине:

а) $|5-2x| < 1$; б) $|3x-2,5| \ge 2$; в) $2|x+1| > x+4$;

г) $|2x-4| < x-1$; д) $|x-2| \le |x+4|$; ђ) $|x+2| - |x-1| < x - \dfrac{3}{2}$;

е) $|x+1| + |x-4| > 7$; ж) $|1-x| - |2x-3| - 4x + 5 \ge -3$.

798. Графички решити неједначине:

а) $|x+2| > |x|$; б) $\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right| > 1$.

Решити неједначине (задаци 799-802):

799. а) $\dfrac{2}{1+|x|} - \dfrac{1}{|x|-1} < 0$; б) $\dfrac{3}{|x|+2} - \dfrac{2}{|x|-1} > 0$;

в) $\dfrac{1}{|x|-2} - \dfrac{2}{|x|+1} < 0$; г) $\dfrac{2}{|x|+3} - \dfrac{1}{|x|-1} < 0$.

800. а) $3\left|\dfrac{1}{4-x}\right| < \left|\dfrac{6}{1-x}\right|$; б) $\dfrac{1}{|6-x|} < \dfrac{2}{|3-x|}$.

801. Решити неједначине:

а) $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \ge 2$; б) $\dfrac{|x+2|}{x^2-3x+2} \le 1$; в) $\dfrac{|x-1|}{x^2+4x-5} \ge 2$;

г) $\dfrac{|x+3|}{x^2+4x+3} \le 1$; д) $\dfrac{|x-2|}{x^2+3x-10} \ge 1$; ђ) $\dfrac{|x-1|}{x^2-x} > \dfrac{1}{5}$.

802. а) $\sqrt{4x^2-4x+1} < 3-x$; б) $\dfrac{x+7}{\sqrt{9x^2+6x+1}} < 2$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{9-6x+x^2}} < 2$; г) $\dfrac{\sqrt{9-6x+x^2}}{2x-3} \ge 2$.

6.9. ВАЖНИЈЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

1. Основне средине

Нека су дати произвољни бројеви $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Тада је:

1° $A_s = \dfrac{x+y}{2}$, аритметичка средина бројева x и y;

2° $G_s = \sqrt{xy}$, геометријска средина бројева x и y;

3° $H_s = \dfrac{2xy}{x+y}$, хармонијска средина бројева x и y;

4° $K_s = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$, квадратна средина бројева x и y;

2. Неједнакости између средина

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Једнакости важе ако и само ако је $x = y$.

803. Доказати неједнакости:

а) $17^{14} > 31^{11}$;

б) $\dfrac{1}{51} + \dfrac{1}{52} + \cdots + \dfrac{1}{100} > \dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdots \dfrac{120}{121} > \dfrac{1}{11}$;

г) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

804. Доказати да за позитивне бројеве a,b и c важе неједнакости:

а) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$;

б) $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$;

в) $a^2 + 1 \geq 2a$;

г) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$;

д) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

У задацима 805-809 доказати да важе наведене неједнакости. У задацима код којих нису дати допунски услови треба подразумевати да променљиве могу узимати произвољне реалне вредности:

805. а) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$

б) $1 + 2x^4 \geq 2x^3 + x^2$;

в) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$;

г) $x^2 + z^2 \geq 2y^2$ ако је $x : y = y : z$;

д) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$ ако је $x > 0$ и $y > 0$.

806. а) $a^2 + 2a + 3 > 0$;

б) $a^2 + 4a + 5 > 0$;

в) $a^2 + a + 1 > 0$;

г) $a^2 - a + 1 > 0$;

д) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

807. а) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$ за $a,b,c>0$;

б) $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$ за $a+b>0$;

в) $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$ за $a>1, b>1$;

г) $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$.

808. а) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ за $a,b>0$;

б) $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd, (a,b,c,d \geq 0)$

в) $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc, (a,b,c \geq 0)$.

809. а) $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ за $a,b,c \geq 0$;

б) $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ за $a,b>0$;

в) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}, (a>0, b>0)$;

г) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.

6.10. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Линеарна функција дефинисана на скупу реалних бројева је функција $y=f(x)$ одређена са

$$y = kx+n, \text{ за } k,n \in \mathbf{R}.$$

1° k је коефицијент правца праве

- за $k>0$ права гради са позитивним делом Ox осе оштар угао и тада је функција растућа;

- за $k<0$ права гради са позитивним делом Ox осе туп угао; функција је опадајућа;

- за $k=0$ права је паралелна са Ox осом;

2° Решење једначине $kx+n=0$, тј. $x_0=-\dfrac{n}{k}$ $(k \neq 0)$ назива се нула линеарне функције:

3° n је одсечак на Oy оси - за $n=0$ права пролази кроз координатни почетак;

4° за $n=k=0$ права се поклапа са осом Ox; свака тачка $x \in \mathbf{R}$ је нула функције.

Скицирати графике функција (задаци 810-811).

810. а) $y = 2x$; б) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = -3x$; г) $y = -\frac{1}{3}x$.

811. а) $y = 2x + 1$; б) $y = \frac{1}{2}x - 1$; в) $y = 3x - 4$;

г) $y = -3x + 4$; д) $y = -\frac{1}{3}x + 1$; ђ) $y = \frac{1}{3}x - 1$.

812. Одредити вредност a за коју функција $y = ax - \frac{1}{2}$, има нулу за $x = -2$.

813. Одредити вредности b ако је $x = -\frac{1}{3}$ нула функције $y = 2x + b$.

814. У функцији $y = ax + b$ одредити реалне параметре a и b тако да њеном графику припадају тачке $A(3, -4)$ и $B(-2, 1)$.

815. У функцији $y = (m - 4)x - 3m + 10$ одредити параметар $m \in \mathbf{R}$, тако да тачка $A(1, 2)$ припада графику функције.

816. Дате су праве:

а) $(b + 2)x + (b - 3)y + b^2 - 2b + 1 = 0$;

б) $(b - 1)x + (b + 2)y + b^2 + 2b + 1 = 0$.

Одредити све вредности b за које је права: 1° паралелна Ox оси; 2° паралелна Oy оси; 3° пролази кроз координатни почетак. У сваком од случајева написати једначину праве.

817. Нека су дате функције: $f(x) = 2 + 3x$, $g(x) = 2 + x$, $x \in \mathbf{N}$. Наћи $f(1)$, $f(2)$, $g(1)$, $g(2)$.

818. У функцији $y = (a - 1)x - (a + 2)$ одредити параметар a тако да график функције сече Ox осу у тачки чија је апсциса $x = 5$.

819. Одредити све вредности реалног параметра k тако да

а) функција $y = \frac{3k + 5}{4 - k}x + 4 - k^2$ буде растућа и да њен график сече Oy осу у тачки са позитивном ординатом;

б) функција $y = \frac{2k - 1}{k + 2}x + k^2 - 1$ буде опадајућа и да њен график сече Oy осу у тачки са негативном ординатом.

820. У функцији $f(x) = (a - 3)x + 2a + 5$ одредити параметар a да график функције:

а) садржи тачку $B(3, -1)$;

б) сече Oy у тачки чија је ордината $y = 5$.

821. У функцијама $y = (a - 3)x + (a - 2)$ и $y = (2a + 1)x - (3a - 1)$ одредити параметар a да графици буду паралелни.

822. У функцији $y = (2m - 3)x + m - 1$ одредити параметар m тако да график функције са Ox осом гради

а) оштар угао, б) туп угао, в) нула угао.

823. Одредити параметар k тако да следеће функције буду растуће:

а) $y = \dfrac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1$; б) $y = \dfrac{-k+1}{2k-3}x - k - 1$.

Нацртати графике функција (задаци 824-825).

824. а) $y = |x| - 3$; б) $y = |2x+4| - 2$; в) $y = x + |x|$; г) $y = |x-1|$.

825. а) $y = |x+1| - |x-2|$; б) $y = |x+1| + |1-x|$;

в) $y = \dfrac{x}{|x|}$; г) $y = x + \dfrac{|x|}{x}$;

д) $y = |x| - |3-x| + |x+2|$; ђ) $y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$;

е) $y = ||2x+5| - 2|$; ж) $y = |3 - |x-2||$.

6.11. ДОДАТАК УЗ ПОГЛАВЉА 6.6 ДО 6.10

Решити једначина (задаци 826-829) где су a, b, m и n реални параметри.

826. а) $\dfrac{4x^2-3a}{bx+b-4x-4} = \dfrac{4x}{b-4} + \dfrac{x}{x+1}$;

б) $\dfrac{x+a}{x-a} - \dfrac{x-b}{x+b} = \dfrac{2(a+b)}{x^2-ax+bx-ab}$;

в) $\dfrac{ax}{x+a} + \dfrac{bx}{x-b} = a+b$.

г) $\dfrac{(a+b)(x-3)-2a}{(a-b)(x+3)+8b} = \dfrac{2b}{8a}$;

д) $\dfrac{1}{3a-x} + \dfrac{5}{3b-x} = \dfrac{2b}{3a^2-ax} + \dfrac{10b}{3ab-ax}$;

ђ) $\dfrac{\frac{a}{x}+\frac{3b}{a}}{\frac{9b}{x}+\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$.

827. а) $\dfrac{4a^2}{3x+3} + \dfrac{3a+3}{x^2-1} = \dfrac{2a^2}{3x^2-3} + \dfrac{3}{x-1}$;

б) $\dfrac{2m-5}{(m-1)(x+2)} - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3x+4}{x^2+3x+2}$;

в) $\dfrac{9a^2-8}{2(x+2)} - \dfrac{4-3a^2}{x-2} = \dfrac{a(4+3ax)}{x^2-4}$;

г) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{a}{x^2-x}$.

828. а) $\dfrac{x+m}{x-m} - \dfrac{x+m+n}{x+m} = \dfrac{2m^2+n^2-mn}{x^2-m^2}$;

б) $\dfrac{x+a}{a-b} + \dfrac{x-a}{a+b} = \dfrac{x+b}{a+b} + \dfrac{2(x-b)}{a-b}$;

в) $\dfrac{2}{m}-\dfrac{1-x}{m-2}=\dfrac{2-3x}{m^2-2m}$;

г) $\dfrac{mx-2}{(m-2)(m+2)}-\dfrac{x-2m}{m-2}=\dfrac{2m+x}{m+2}$;

д) $\dfrac{1}{nx-n^2}-\dfrac{1}{mn-mx}=\dfrac{1}{mn-nx}-\dfrac{1}{mx-m^2}$.

829. а) $\dfrac{a+\dfrac{x}{a-b}}{a-\dfrac{x}{a+b}}=\dfrac{a+b}{a-b}$; б) $\dfrac{m-\dfrac{1}{x}}{m+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\dfrac{1}{m}}{x+\dfrac{1}{m}}+\dfrac{1}{mx}$.

Решити једначину (задаци 830-832):

830. а) $\dfrac{2x}{a^3-8}-\dfrac{a}{a^2+2a+4}=\dfrac{x-1}{a-2}$, $a\in\mathbf{R}$. Да ли за свако a дата једначина има решење?

б) За које a је решење позитиван број?

в) Наћи a тако да је $x=0$ решење једначине.

831. $\dfrac{3ab+1}{a}x-\dfrac{3ab}{a+1}-\dfrac{a^2}{(a+1)^3}=\dfrac{(2a+1)x}{a^3+2a^2+a}$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $a\neq -1$, $a+3b(a+1)^2\neq 0$.

а) Доказати да решење не зависи од b.

б) Одредити a тако да добијена вредност за x буде позитивна, затим и већа од 1.

832. а) $\dfrac{x-a-b}{c}+\dfrac{x-b-c}{a}+\dfrac{x-c-a}{b}=3$;

б) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ac}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

833. За које вредности параметра a једначина $x-a=2|2\sqrt{x^2}-a^2|$ има максималан број решења?

834. Решити једначине:

а) $2\sqrt{x^2-4x+4}=x$;

б) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{4x^2+12x+9}=-1$.

835. Решити једначине:

а) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=4$;

б) $\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}=5$;

г) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

д) $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}=3$.

836. Решити једначине по x и решења приказати графички:

а) $|x-1|+|x-2|=1$;

б) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$;

в) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$;

г) $|2-|1-|x|||=1$.

837. Решити једначину: $|\frac{1}{x}| + |\frac{1-x}{x}| + |\frac{2-x}{x}| = \frac{4}{3}$.

838. У зависности од реалног параметра a решити једначине:

а) $|x| + |x-1| + |x+2| = a$; б) $|x+a| + x = 2$;

в) $|x| = x + a$.

839. Решити једначине:

а) $|x-2| + |x+1| = a + 2x, a \in \mathbf{R}$; б) $|x-1| + |x+2| = b - 2x, b \in \mathbf{R}$;

в) $|x-1| + |x+1| = 2x + a, a \in \mathbf{R}$; г) $\frac{1}{2}(|x-2| + |x+2|) = bx, b \in \mathbf{R}$.

Решити системе једначина (задаци 840-841) где су a, b, m и n реални параметри:

840. а) $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = 2(a^2-1), \\ (a^2-1)x + (a^2+1)y = 2(a^3-1); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 0, \\ x + y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a, \\ x - y = 4ab; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + m(y-2) = 1, \\ \frac{m}{x+1} + y - 1 = 2m; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} ax + by = a + hb, \\ bx + ay = ah + b. \end{cases}$

841. а) $\begin{cases} (a-1)x + by = -b, \\ ax + 2by = -ab; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1-a)x + (1-b)y = a - b, \\ ax + 2(b-1)y = ab - 2a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ax - by = b, \\ (a+1)x - 2by = 3b - ab; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (a-1)x + (b+1)y = a + b, \\ ax + 2(b+1)y = 2a + ab; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + (a-1)y = b + 1, \\ (b-1)x + 3(a-1)y = b^2 - b + 3; \end{cases}$ ђ) $\begin{cases} (b+2)x + ay = a^2 + b + 2, \\ x + 3ay = 3a^2 + 1. \end{cases}$

842. Нацртати у равни $x0y$ скуп свих тачака за чије координате важи:

а) $|x| + |y| = 2$; б) $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2$;

в) $x + |x| = y + |y|$; г) $x + |x| + y + |y| = 4$.

843. За које целобројне вредности параметра n систем једначина:

$$\begin{cases} nx - 2y = 3, \\ 3x + ny = 4 \end{cases}$$

има решења (x, y) за која важи $x > 0$, $y < 0$?

844. Бројеви a, b и c су такви да систем једначина

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

има бесконачно много решења, при чему је $(1, 3)$ једно од тих решења. Наћи a, b, c.

845. Дат је систем једначина

$$\begin{cases} x + y = n^2, \\ 10x + y = n^3, \end{cases}$$

$n \in \mathbf{N}$. Одредити за које вредности n дати систем има решења у скупу природних бројева.

846. а) Решити систем једначина:

$$\begin{cases} |x| + |y-1| = 1, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

б) Приказати решење графички у равни правоуглог координантног система $x\,0\,y$.

847. Решити систем и дати графичку интерпретацију.

$$\text{а)} \begin{cases} |x+1| + |y| = 1, \\ |x+y| = 2; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} |x-y| = 2, \\ |x| + |y-1| = 1. \end{cases}$$

848. Решити системе једначина:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{6}{x+2y+z} + \dfrac{4}{5x-y+2z} + \dfrac{5}{3x+2y+z} = 4, \\ \dfrac{3}{x+2y+z} + \dfrac{8}{5x-y+2z} + \dfrac{5}{3x+2y+z} = 4, \\ \dfrac{9}{x+2y+z} + \dfrac{12}{5x-y+2z} - \dfrac{10}{3x+2y+z} = 4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \dfrac{2}{3x+y-3z} + \dfrac{3}{16x+3y+4z} - \dfrac{4}{5x-y-3z} = \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{3}{3x+y-3z} - \dfrac{4}{16x+3y+4z} + \dfrac{5}{5x-y-3z} = \dfrac{19}{24}, \\ \dfrac{4}{3x+y-3z} - \dfrac{5}{16x+3y+4z} - \dfrac{6}{5x-y-3z} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

849. Решити системе једначина (a, b, $c \neq 0$):

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + 2 = 0, \\ \dfrac{-2y}{b} + \dfrac{3z}{c} - 1 = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0, \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc, \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4bcx + acy - 2abz = 0, \\ 5bcx + 3acy - 4abz + abc = 0, \\ 3bcx + 2acy - abz - 4abc = 0. \end{cases}$

850. Наћи решења система једначина:

а) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + u = 6, \\ 3x + 5y + 2z + 2u = 4, \\ 9x + 4y + z + 7u = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + u = 3, \\ 2x - 3y + z + 5u = -3, \\ x + 2y \quad - 4u = -3, \\ x - y - 4z + 9u = 22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 3y + z + 5u - 7 = 0, \\ x - 2y - 2z - 3u - 3 = 0, \\ 3x - y + 2z + 1 = 0, \\ 2x + 3y + 2z - 8u + 7 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$

851. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (y+z)(x+y+z) = 120, \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$$

852. Четири цеви напуне базен за 4 часа. Прва, друга и четврта цев напуне базен за шест часова, а друга, трећа и четврта за 5 часова. За које време би базен напуниле прва и трећа?

853. Ученик слаже све своје марке у нови албум. Ако на сваку страну стави по 20 марака, албум му неће бити довољан, а ако стави по 23 марке, бар једна страна ће остати празна. А ако би ученику неко поклонио исти такав албум са по 21 марком на свакој страни, он би имао укупно 500 марака. Колико има страна у албуму?

854. Решити системе једначина ($a \in \mathbf{R}$):

а) $\begin{cases} (4 - a^2)x = a + 2, \\ ax + y = a, \\ x - y = -a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (4 - a^2)x = a - 2, \\ x - y = -a, \\ ax + y = a. \end{cases}$

855. Дат је систем једнашина $\frac{z}{x+y}=2$, $\frac{z}{y-x}=3$, $x>0, y>0, z>0$. Шта је веће: x или z?

856. Решити систем једначина:

а) $\frac{xy}{x+y}=\frac{12}{5}$, $\frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}$, $\frac{zx}{z+x}=\frac{36}{13}$;

б) $\frac{xy}{2x+3y}=3$, $\frac{xz}{2z+3x}=1$, $\frac{yz}{2y+3z}=2$.

857. Четрдесет крава попасе једну ливаду за 50 дана. Исту ливаду попасе 60 крава за 30 дана. Колико ће дана дату ливаду пасти 20 крава? Колико крава може да пасе на ливади 75 дана?

858. Решити следеће неједначине по непознатој x,$(a, b, m, n \in \mathbf{R})$:

а) $5x-a>ax-4$; б) $x-2>m-nx$;

в) $ax+b^2>bx+a^2$; г) $\frac{x}{a}+\frac{b}{a^2}>\frac{2x}{a}-\frac{b}{a^2}$;

д) $x+\frac{x-1}{a+1}>\frac{x+1}{a+1}-ax$; ђ) $\frac{2x}{a}-5>\frac{x}{a}+a-4$;

е) $(a^2-3a+2)x\leq a^2-4a+4$.

859. Решити систем неједначина $(m\in\mathbf{R})$:

$$\begin{cases}(m+1)x<m-2,\\ 4x<1.\end{cases}$$

Решити системе неједначина (задаци 860-861):

860. а) $ax-a^2<x-1$, $(a-3)x+8<x+2a$, $a\in\mathbf{R}$;

б) $2a<ax+a^2$, $6-(a+2)x<x-2a$, $a\in\mathbf{R}$;

в) $x+4c<cx+c^2+3$, $4-cx<2(x-c)$, $c\in\mathbf{R}$;

г) $cx-c^2<4c-x+3$, $cx+4<2(c+x)$, $c\in\mathbf{R}$.

861. а) $(a-2)(1-x)>-x$, $3(a-1)(2-x)>3(a-2)(2-x)+5$, $a\in\mathbf{R}$;

б) $3(2-m)(x-2)>3(1-m)(x-2)+5$, $x-4<(1-m)(x-3)$, $m\in\mathbf{R}$.

862. Решити систем неједначина и дати геометријску интерпретацију:

а) $\begin{cases}x+3y+2\geq 0,\\ -x-y+1\geq 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y+1\geq 0,\\ x+y-2\geq 0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-y+7\geq 0,\\ x-3y-2\geq 0.\end{cases}$

863. Решити по x једначине:

а) $a^2(x-1)+2x=a(3x-5)+6$;

б) $a^2(x-1)-4a=x+3$, $a\in\mathbf{R}$;

и затим одредити a тако да буде

1° $x = 0$, 2° $x > 0$, 3° $x < 0$.

864. Решити једначине ($a \in \mathbf{R}$):

а) $5x - a = ax - 4$; б) $x - 2 = a - ax$;

в) $x + \dfrac{x-1}{a+1} = \dfrac{x+1}{a+1} - ax$; г) $\dfrac{2x}{a} - 5 = \dfrac{x}{a} + a - 4$.

и одредити вредности параметра a тако да буде:

1° $x > 0$; 2° $x = 0$; 3° $x < 0$.

865. Решити једначину $\dfrac{x}{a^2+a} - \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{x}{a^2+2a+1} - \dfrac{1}{(a+1)^3}$ и одредити знак решења, $a \in \mathbf{R}$.

866. Одредити m тако да буде $x > 0$ и $y < 0$, ако је

$$\begin{cases} (3m-9)x + (3-m)y = 3, \\ (2-3m)x + my = -5. \end{cases}$$

867. Наћи све вредности k за које систем $x - 2y = k$, $3x + y = 8$ има решење, које задовољава услов $x > -1$, $y > 0$.

868. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -x + ky = \dfrac{k^2-1}{k+1}, \ k \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

и у случају када има јединствено решење одредити све вредности k тако да буде $2y - x < 0$.

869. Дат је систем једначина: $x + y = 1$, $-x + (p-1)y = p - 2$, $p \in \mathbf{R}$

а) Решити систем.

б) Одредити све вредности p тако да за решења система важи $x + 2y \geq 0$.

870. Дат је систем једначина: $(b+2)x - y = \dfrac{1}{b-1}$, $(b-1)x + (b-1)y = b+2$, $b \in \mathbf{R}$.

а) Решити систем.

б) Одредити све вредности b тако да за решења система важи $x \geq y$.

871. Дат је систем једначина:

$$\begin{cases} ax - by = b, \\ (a+1)x - 2by = 3b - ab, \ a, b \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

а) Решити и дискутовати систем.

б) У случају када систем има јединствено решење (x_0, y_0), одредити све вредности за b тако да важи: $\left(2x_0 - \dfrac{3(a-1)}{y_0}\right)^2 : \left((2b-3)(x_0 - \dfrac{4y_0}{a-1})\right) \leq 1$.

872. Дат је систем једначина $x + py = 3, px + 4y = 6$.
а) Решити систем.
б) У случају када постоји јединствено решење, одредити све вредности параметра p тако да буде $|x - y| > 1$.

873. Одредити k тако да систем једначина:
а) $x + ky = 2k - 1, x + (2k - 1)y = k$
има јединствено решење и да важи $|x + 2y| < x + 1$;
б) $kx + y = 2k - 2, (2k - 2)x + y = k$ има јединствено решење и да важи $|x + y| \leq y + 2$.

874. Одредити m тако да систем једначина: $x + m^2y = m(2 - m), x + y = 1$ има јединствено решење и да важи услов $\frac{x}{y} \leq 0$.

875. Доказати неједнакости: а) $a^2c + b^2a + c^2b \geq 3abc, \quad a, b, c \geq 0$;

б) $\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \geq 1 + x, \quad x \geq 0$;

в) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c, \quad a, b, c > 0$;

г) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \quad a, b, c \geq 0$;

д) $\frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} + \frac{2}{a + b} \geq \frac{9}{a + b + c} \quad a, b, c > 0$;

ђ) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \quad a, b, c > 0$.

876. Доказати импликације:
а) $x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow |x + y| \leq 2$;
б) $x^2 + y^2 > 2 \Rightarrow |x + y| \geq \sqrt{2}$;
в) $a + b = 2 \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2$;
г) $|a| < 1 \wedge |b| < 1 \Rightarrow |a + b| < |1 + ab|$;
д) $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$;
ђ) $xy = 1 \wedge x > y \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x - y} > 2\sqrt{2}$;
е) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{4}{a}$.

877. а) Ако је $a + b + c = 6$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$;
б) Ако је $x + y + z = 1$, доказати да је $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

878. Два аутомобила полазе истовремено из места A према месту B. Први иде половину времена брзином u, а другу половину времена брзином v; други иде половину пута брзином u, а другу половину брзином v. Који ће аутомобил пре стићи на циљ?

Глава VII

СЛИЧНОСТ

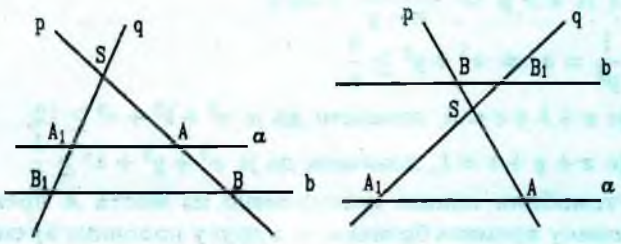
7.1. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ ДУЖИ И ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

Ако су дате дужи a, b, k где је k јединична дуж, и ако је $a = mk$, $b = nk$, тада количник $m : n$, односно $\frac{m}{n}$, називамо размером дужи a и b, што означавамо са $a : b = m : n$, односно $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Талесова теорема. Ако су паралелне праве a и b трансверзале правих p и q и ако је: $p \cap q = \{S\}$, $a \cap p = \{A\}$, $a \cap q = \{A_1\}$, $b \cap p = \{B\}$, $b \cap q = \{B_1\}$, тада је

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1} = k$$

где је k коефицијент сличности троуглова SAA_1 и SBB_1 (в. сл.)



879. Дата је дуж AB. Одредити на тој дужи тачку M тако да је $AM : MB = 2 : 1$.

880. Дата је дуж AB. Наћи тачке C и D, које ову дуж деле унутрашњом и спољашњом поделом у односу $m : n$.

881. Дате су дуж a, b, c. Конструисати дуж x тако да је $a : b = c : x$.

882. Ако су a и b дате дужи, конструисати дуж:

а) $x = ab$; б) $x = \frac{a}{b}$; в) $x = \frac{a^2}{b}$.

883. Поделити дату дуж на

а) три једнака дела; б) пет једнаких делова.

884. У троуглу ABC (в. сл.) дуж DE је паралелна са AB. Наћи:

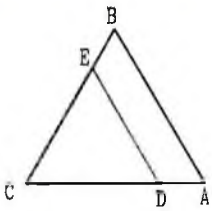
а) CE, ако је $AC = 12, CD = 4, BC = 24$;

б) BE, ако је $AC = 15, AD = 3, BC = 25$;

в) BC, ако је $AD = 6, CD = 14, CE = 7$;

г) CE, ако је $CD = 8, AC = 20, BE = 6$;

д) AC, ако је $AD = CE, CD = 4, BE = 9$.



885. На дужи AB дужине 92 дате су тачке C и D, такве да важи $\frac{AC}{CD} = \frac{2}{3}$ и $\frac{CD}{DB} = \frac{5}{7}$. Одредити дужине дуж AC, CD и DB.

886. Симетрала унутрашњег угла троугла ABC код темена A дели наспрамну страницу BC на одсечке пропорционалне осталим двема страницама, тј. $AB : AC$. Доказати.

887. Ако полуправа из темена C датог троугла ABC дели наспрамно страницу на одсечке пропорционалне страницама AC и BC, тада је та полуправа симетрала $\sphericalangle C$.

888. Кроз средиште M странице AB троугла ABC конструисана је права паралелна симетрали CN угла ACB. Та права сече страницу BC у D, а праву AC у E. Доказати да је $BD = AE$.

889. Доказати да симетрала спољашњег угла код темена A троугла ABC дели страницу BC у односу $AB : AC$ $(AB \neq BC)$.

890. Дат је трапез $ABCD$ са основицама $AB = a$ и $CD = b$. Одредити дужину одсечка који дијагонале трапеза одсецају на средњој линији трапеза.

891. Права која садржи пресек дијагонала трапеза $ABCD$ и паралелна је са основицама a и b, сече краке AD и BC редом у тачкама M и N. Одредити дужину MN.

892. Нека тачке C и D деле тетиву AB круга на три једнака дела. Доказати да је од три добијена централна угла $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOB$ средњи највећи.

893. Нека је M средиште основице AB трапеза $ABCD$, P произвољна тачка праве BC, тачка Q пресек правих PM и AC, X пресек правих DQ и

AB и Y пресек правих DP и AB. Доказати да је тачка M средиште дужи XY.

894. Дат је троугао ABC. Права p која је паралелна страници BC сече дужи AB и AC редом у тачкама D и E. Права q која садржи тачку C и паралелна је правој BE сече праву AB у тачки F. Доказати да је $AB^2 = AD \cdot AF$.

895. Дат је троугао ABC и тачка D на страници BC. Права која садржи тачку D и паралелна је страници AC сече страницу AB у тачки E, а права која садржи тачку D и паралелна је страници AB сече страницу AC у тачки F. Доказати да је $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$.

7.2. ХОМОТЕТИЈА

Нека је O дата тачка и k дати број различит од нуле. Пресликавање $\mathcal{H}_O$ фигуре $\mathcal{F}_1$, при којем свакој тачки $M \in \mathcal{F}$ одговара тачка $M_1 \in \mathcal{F}_1$, таква да је $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$, назива се хомотетијом са центром O и коефицијентом k. Пишемо $H_O(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_1$.

Тачка O назива се центром хомотетије, а k је коефицијент хомотетије.

896. Дата је тачка O и троугао ABC, круг l, права p и угао α. Конструисати хомотетичну слику са центром O и коефицијентом k:

а) троугла ABC, ако је $k = 2$; б) круга l, ако је $k = \frac{1}{2}$;

в) праве p, ако је $k = -\frac{1}{2}$; г) угла α, ако је $k = -2$.

897. Дат је квадрат $ABCD$. Конструисати хомотетичну слику квадрата са коефицијентом хомотетије k:

а) ако је центар хомотетије тачка D и $k = \frac{3}{2}$;

б) ако је центар хомотетије пресек дијагонала квадрата и $k = \frac{1}{3}$;

в) ако је центар хомотетије средиште странице AB и $k = -\frac{2}{3}$.

898. Дат је троугао ABC и тачка O у равни тог троугла. Конструисати троуглове хомотетичне датом при хомотетијама:

а) $\mathcal{H}_{O,2}$; б) $\mathcal{H}_{O,-1}$; в) $\mathcal{H}_{O,-1/2}$.

899. У равни квадрата $ABCD$ дата је тачка O. Доказати да су тачке симетричне тачки O у односу на средиште страница датог квадрата такође темена квадрата.

900. Дат је оштроугли троугао ABC. Конструисати квадрат чија два темена припадају страници BC, а по једно теме страницама AB и AC.

901. У дати полукруг уписати квадрат тако да му два темена припадају пречнику, а два луку полукруга.

902. Ако кругови k_1 и k_2 имају различите полупречнике и нису концентрични, доказати да постоје две хомотетије које круг k_1 пресликавају у круг k_2.

903. За кругове једнаких полупречника постоји једна хомотетија која један круг пресликава у други. Доказати.

904. Дати су кругови k_1 и k_2 и у круг k_1 уписан троугао $A_1B_1C_1$. Конструисати троугао $A_2B_2C_2$ уписан у круг k_2 и такав да су му углови једнаки одговарајућим угловима троугла $A_1B_1C_1$.

905. Дата је фигура F_1. Нека је F_2 фигура хомотетична датој при хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$. Нека се фигура F_3 добија транслацијом фигуре F_2 за вектор $\vec{v}$. Доказати да је фигура F_3 хомотетична фигури F_1 и одредити центар и коефицијент те хомотетије.

906. Доказати да је фигура хомотетична правој - права.

907. Доказати да фигура хомотетична кругу - круг.

7.3. СЛИЧНОСТ. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

1. Пресликавање P_k равни α на саму себе, које сваке две тачке A, B преводи у тачке $A_1B_1 = k \cdot AB$, где је k дати позитиван број, назива се транформацијом сличности (или кратко сличношћу) са коефицијентом k.

2. *Ставови сличности троуглова.* Нека су ΔSAA_1 и ΔSBB_1 два троугла. Сваки од наредних услова је потребан и довољан да важи $\Delta SAA_1 \sim \Delta SBB_1$.

1° $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SA_1}{SB_1}$;

2° $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1$;

3° $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{SA}{SB}$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

3. *Примена сличности на посебне случајеве.*

1° Свака два једнакостранична троугла су слична;

2° Два једнакокрака троугла су слична ако имају једнаке углове и на основицама;

3° Два једнакокрака троугла су слична ако имају једнаке углове наспрам основица;

4° Два једнакокрака троугла су слична ако им је размера основици једнака размери кракова;

5° Свака два једнакокрака правоугла троугла су слична;

6° Два правоугла троугла су слична ако су им катете пропорционалне;

7° Два правоугла троугла су слична ако им је размера хипотенуза једнака размери једног пара катета.

908. У којим од наведених случајева (в. сл.) је BB' паралелно са CC'?

а) $AC = 12, BC = 3, AC' = 8, AB' = 6$;

б) $AC = 14, AB = 6, AC' = 7, AB' = 3$;

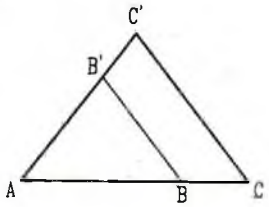
в) $AB = 6, BC = 15, AB' = 9, B'C' = 8$.

909. У једнакокраком троуглу висине $18cm$ уписан је квадрат странице $9cm$, тако да два темена припадају основици а друга два крацима троугла. Одредити основицу троугла.

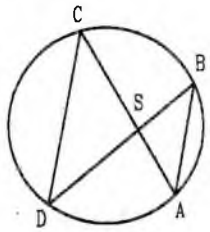
910. Основица једног троугла је a, висина h, а основица сличног троугла a'. Изразити помоћу њих висину h' другог троугла. (Бројни пример: $a = 30cm, h = 24cm, a' = 20cm$).

911. Да ли је троугао са страницама 36, 48, 64 сличан троуглу са страницама 36, 48, 27?

912. Дат је троугао са страницама 0,8, 1,2 и 1,4. Одредити странице сличног троугла обима 136.



Сл. уз зад. 908



Сл. уз зад. 916

913. Троугао ABC чије су странице $26\,cm$, $38\,cm$, и $46\,cm$ сличан је са троуглом $A_1B_1C_1$ чија је најмања страница $13cm$. Одредити остале странице троугла $A_1B_1C_1$.

914. Странице троугла ABC су $a = 18cm$, $b = 15cm$ и $c = 12cm$. Одредити обим сличног троугла ако је коефицијент сличности 5:3.

915. Обим једнакокраког троугла је $32\,cm$, а крак је за $4\,cm$ дужи од основице. Израчунати обим сличног троугла ако је његова основица $6cm$.

916. Доказати да су слични троуглови ABS и CDS (в. сл.) где је S произвољна тачка унутрашњости круга.

917. Странице четвороугла односе се као $0,5 : 0,6 : 0,9 : 1$. У њему сличном четвороуглу збир најмање и највеће странице једнак је $30\,cm$. Одредити странице другог четвороугла.

918. Површине двају сличних многоуглова су $75\,cm^2$ и $48\,cm^2$. Ако је обим већег многоугла $28\,cm$, одредити обим мањег.

919. Сенка једног предмета дуга је a метара, а сенка усправног штапа, високог h метара дуга је d метара. Израчунати помоћу a, h, d непознату висину предмета, (Бројни пример:$a = 18\,m$, $h = 2\,m$, $d = 2,4\,m$).

920. Растојање три тачке A, B, C у пољу су: $AB = 250\,m$, $AC = 450\,m$, $BC = 320\,m$. Колика су та растојања на мапи чија је размера $1 : 10000$?

921. Основица троугла је a и висина h. На ком растојању од основице треба конструисати праву паралелну са основицом да би њен одсечак између страница троугла био m? (Бројни пример: $a = 12\,cm$, $h = 8\,cm$, $m = 3\,cm$).

922. Дат је трапез $ABCD$ код кога је $AB||CD$. Нека је O пресек дијагонала AC и BD. Доказати да су троуглови OAB и OCD слични.

923. Ако је у трапезу $ABCD$ угао CDA једнак углу BCA и паралелне странице $AB = 16cm$ и $CD = 4cm$, одредити дужину дијагонале AC.

924. Дат је једнакокраки троугао ABC код кога је $AB = AC$. Права l која садржи тачку A сече праву BC у тачки D, а описани круг у тачки E. Доказати да је $AB^2 = AD \cdot AE$.

925. Дужине страница правоугаоника су $a = 5$ и $b = 2$. Одредити странице сличног правоугаоника чији обим и површина имају једнаке мерне бројеве.

926. За колико треба продужити краке једнакокраког трапеза да би се они пресекли ако је дужа основица трапеза $10\,cm$, крак $6\,cm$ и угао на основици $60°$?

927. Најдужа страница петоугла је $14\,cm$, а његов обим је $46\,cm$. Израчунати обим сличног петоугла ако је његова најдужа страница $21\,cm$.

928. Симетрала угла A троугла ABC сече страницу BC у тачки D, а описани круг у тачки E. Доказати да је $BE^2 = AE \cdot DE$.

929. Дат је паралелограм $ABCD$. Права која садржи тачку A сече дијагоналу BD и праве BC и CD редом у тачкама E, F и G. Доказати једнакост $AE^2 = EF \cdot EG$.

930. Права која садржи теме C ромба $ABCD$ сече продужетак странице AB у тачки E, а продужетак странице AD у тачки F. Ако је $BE = 9cm$ и $DF = 4cm$, одредити дужину странице ромба.

931. Права која садржи теме A ромба $ABCD$ сече страницу CD у тачки E, а продужетак странице BC у тачки F. Ако је $EC = 7cm$ и $FC = 9cm$, одредити дужину странице ромба.

932. Права садржи средиште висине на основицу једнакокраког троугла и паралелна је једном краку. Израчунати дужину одсечка те праве у троуглу, ако је дужина крака b.

933. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$. Ако је D тачка на AC таква да је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCA$ и a, b, c, редом, дужине страница BC, CA и AB троугла ABC, израчунати дужину дужи BD.

934. Наћи страницу x квадрата уписаног у једнакостранични троугао странице a.

935. Дуж која спаја средишта основа трапеза једнака је њиховој полуразлици. Наћи збир углова на већој основи трапеза.

936. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) конструисана је висина AD. Доказати да је $BD \cdot BC = \frac{1}{2}AB^2$.

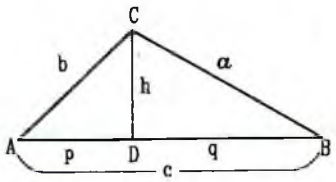
937. Нека су AA_1 и BB_1 висине троугла ABC и O ортоцентар. Доказати да је $AO \cdot OA_1 = BO \cdot OB_1$.

938. Ако је k круг описан око $\triangle ABC$, t тангента круга k у тачки A и D тачка у којој права кроз B упоредна са t сече AC, доказати да је дуж AB геометријска средина за дужи AC и AD.

7.4. ПРИМЕНА СЛИЧНОСТИ НА ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Правоугли троуглови ADC и BCD (в. сл.), слични су међусобом и слични са датим троуглом ABC ($\sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD = \beta$), па важе пропорције (Еуклидови ставови).

1° $p : h_c = h_c : q$, тј. $h_c^2 = pq$, односно $h_c = \sqrt{pq}$;
2° $b : p = c : b$, тј, $b^2 = pc$, однсно $b = \sqrt{pc}$;
3° $a : q = c : a$, тј. $a^2 = qc$, односно $a = \sqrt{qc}$;
4° Питагорина теорема: $a^2 + b^2 = c^2$.



939. Доказати Еуклидове ставове:

1° Катета је геометријска средина хипотенузе и своје (ортогоналне) пројекције на хипотенузи.

2° Висина које одговар хипотенузи је геометријска средина пројекција катета на хипотенузу.

940. Применом Еуклидових ставова доказати Питагорину теорему.

941. Ако је код једнакокраког троугла крак геометријска средина основице и висине која одговара основици, основица је двапут већа од висине. Доказати.

942. Доказати да је у правоуглом троуглу однос квадрата катета једнак односу њихових пројекција на хипотенузу.

943. Нека је AD висина правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle A = 90°$) и E, F и G тачке дужи AB, AC и DA такве да је $AE = \frac{AB}{3}, AF = \frac{AC}{3}, DG = \frac{DA}{3}$. Доказати да су троуглови EFG и ABC слични.

944. Нека је D тачка катете BC правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle C = 90°$) таква да је $\sphericalangle ADC = 90° - \sphericalangle ABC$. Ако је $AC = 6, BC = 12$ наћи дуж CD.

945. Нека је E тачка катете AC правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle C = 90°$) таква да је $DE \| BC$, при чему је CD висина троугла. Наћи однос $AE : EC$, ако је $AC : CB = 4 : 5$.

946. Конструисати дуж x, ако је:

а) $x^2 = a^2 + bc$; б) $x^2 = a^2 - bc$; в) $x^2 = a^2 - ab$;

г) $x^2 = a^2 + ab$; д) $x^2 = ab \pm cd$; ђ) $x = \dfrac{a\sqrt{ab + c^2}}{b + c}$,

где су a, b, c, d дате дужи.

947. Конструисати дуж: а) $x = \sqrt{8}$; б) $x = \sqrt{15}$;

в) $x = \sqrt{18}$; г) $\sqrt{20}$; д) $\sqrt{23}$.

948. У правоуглом трапезу $ABCD$, код кога се дијагонале AC и BD секу у тачки S под правим углом, висина CB је геометријска средина за основице. Доказати.

949. Дужине тежишних дужи у правоуглом троуглу су $t_a = 7$ и $t_b = 4$. Наћи дужину хипотенузе c.

950. Полупречник круга је $r = 13cm$. Тачка S је од средишта круга удаљена $5cm$. Колика је дужина тетиве тог круга чије је средиште тачка S?

951. Круг је пресечен двема паралелним правим које су на међусобном одстојању $3cm$ и налазе се са исте стране средишта круга. Те праве одређују тетиве дужине $18cm$ и $24cm$. Израчунати дужину r полупречника круга.

952. Над дужом катетом правоуглог троугла, као над пречником описан је круг. Израчунати дужину те катете, ако је краћа катета $30cm$, а тетива која спаја теме правог угла и тачку пресека хипотенузе са кругом је $24cm$.

953. У тетивном четвороуглу $ABCD$ дијагонала BD је управна на страницу BC, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 120°$ и $DA = 1cm$. Израчунати дужину дијагонале BD и странице CD.

954. Израчунати однос катета у правоуглом троуглу ако се висина и тежишна дуж које одговарају хипотенузи односе као $40 : 41$.

955. Нека су a и b основице једнакокраког трапеза у који је уписан круг. Изразити полупречник r тог круга у функцији a и b.

956. Нека је O средиште круга уписаног у правоугли трапез $ABCD$ (BC је дужи крак).

а) Доказати да је $\sphericalangle BOC = 90°$.

б) Ако је $OC = 2cm$ и $OB = 4cm$ наћи полупречник уписаног круга.

957. У једнакокраком тупоуглом троуглу ABC основица AC је $32cm$, а крак је $20cm$. У темену B је конструисана нормала на крак AB до пресека D са основицом. Наћи дужи AD и DC.

958. Једна страница троугла је $13cm$, наспрамни угао $60°$, а збир других двеју страница $22cm$. Наћи те две странице.

7.5. ДОДАТАК УЗ СЕДМУ ГЛАВУ

959. Дат је троугао ABC и тачке A_1 и B_1, редом, на страницама BC и AC, такве да важи $\frac{AB_1}{B_1C} = \alpha$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \beta$. Ако је S пресек дужи AA_1 и BB_1, одредити однос $\frac{AS}{SA_1}$.

960. Користећи претходни задатак доказати да се тежишне дужи троугла секу у једној тачки и да та тачка дели тежишне дужи у односу $2:1$.

961. Дата је фигура F_1. Нека је F_2 фигура хомотетична фигури F_1 у односу на центар S_{12} са коефицијентом k_{12}, а фигура и F_3 хомотетиочна фигури F_2 у односу на и центар S_{23} са коефицијентом k_{23}.

а) Доказати да је фигура F_3 хомотетична фигури F_1 и одредити центар S_{13} и коефицијент k_{13} те хомотетије.

б) Доказати да су тачке S_{12}, S_{23} и S_{13} колинеарне.

962. Доказати да, ако за дужине страница a, b, c троугла важи релација $a^2 = b^2 + bc$, тада за одговарајуће углове важи да је $\alpha = 2\beta$.

963. У троуглу ABC угао код темена A је два пута већи од угла код B. Ако су дате дужине страница b и c наћи a.

964. Ако су a, b, c дужине страница $\triangle ABC$, r дужина полупречника описаног круга тог троугла и h_a дужина висине, која одговара страници a, доказати да је $bc = 2rh_a$.

965. Доказати да се у сваком троуглу симетрала унутрашњег угла налази између висине и тежишне дужи и конструисаних из истог темена.

966. Ако су A, B, C три тачке неке праве p и A', B', C' три тачке неке друге праве p' такве да је $AB' \| BA'$ и $AC' \| CA'$, доказати да је и $BC' \| CB'$. (Папасова теорема).

967. Ако су A, B, C тачке једне праве, а A', B', C', тачке изван те праве такве да је $AB' \| BA'$, $AC' \| CA'$ и $BC' \| CB'$, доказати да су тачке A', B', C' колинеарне. (обрат Папасове теореме).

968. У дати троугао ABC уписати једнакостранични троугао $\triangle A_1B_1C_1$ тако да његова темена припадају страницама датог троугла и да једна његова страница гради са правом AC угао од $45°$.

969. У задати четвороугао $ABCD$ уписати ромб, коме су странице паралелне дијагоналама четворугла.

970. Дат је троугао ABC. Конструисати два подударна круга, који се међу собом додирују и при томе један круг додирује странице AB и AC, а други странице AB и BC.

971. Из датог троугла исећи два круга највећег полупречника.

972. На страницама AB и BC троугла ABC конструисати, редом, тачке D и E, тако да је $AD = DE = EC$.

973. Катете правоуглог троугла су дужине b и c. Наћи дужину симетрале правог угла.

974. Доказати да је полупречник круга, који полови странице троугла два пута мањи од полупречника круга описаног око тог троугла.

975. Дат је круг k и на њему течке A и B које нису дијаметрално супротне. На мањем од лукова AB дата је тачка C. Нека су D, E и F подножја нормала из тачке C на тетиву AB и тангенте круга k у тачкама A и B. Доказати да је $CD^2 = CE \cdot CF$.

976. Основице трапеза $ABCD$ су $AB = a$ и $CD = b$. Одредити у ком односу дијагонала AC дели дијагоналу BD.

977. Дат је трапез $ABCD$, код кога је $AB \| CD$ и тачка E на дужи AD, таква да важи $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Нека права која садржи тачку E и паралелна је са AB сече дуж BC у тачки F. Доказати да је $EF = \frac{m \cdot CD + n \cdot AB}{m+n}$.

978. Кругови k_1 и k_2 додирују се у тачки S. Праве a и b које садржи тачку S секу кругове k_1 и k_2 у тачкама A_1 и A_2, односно B_1 и B_2. Доказати да су троуглови SA_1B_1 и SA_2B_2 слични.

979. Висине два троугла су пропорционалне. Доказати да су ти троуглови слични.

980. Нека су AA_1 и BB_1 висине троугла ABC. Доказати да су троуглови A_1B_1C и ABC слични.

981. Нека су AA_1, BB_1, CC_1 висине троугла ABC. Доказати да је $A_1B_1 \cdot A_1C_1 = A_1B \cdot A_1C$.

982. На хипотенузи AB правоуглог троугла ABC изабрана је тачка M и у њој конструисана нормала на хипотенузу. Та нормала сече праве BC и AC у тачкама P и Q, а круг описан око троугла ABC у тачки R $(P - R - Q)$. Доказати да је $MR^2 = MP \cdot MQ$.

983. На страници AC троугла ABC дата је тачка D. Права која садржи тачку D и паралелна је тежишној дужи AA_1 сече страницу BC у тачки E, а права која садржи тачку D и паралелна је тежишној дужи CC_1 сече страницу AB у тачки F. Доказати да праве AA_1 и CC_1 деле дуж EF На три једнака дела.

984. Нека су r_1 и r_2 полупречници кругова k_1 и k_2 који се додирују и T_1 и T_2 додирне тачке једне њихове заједничке спољашње тангенте. а) Доказати да је $T_1T_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$. б) У "криволинијски" троугао уписан је круг k (који додирује дуж T_1T_2 и кругове k_1 и k_2). Израчунати његов полупречник x.

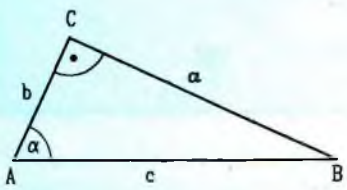
985. Доказати да је збир квадрата дијагонала трапеза $ABCD$ једнак збиру квадрата бочних страница и двоструког производа основица.

986. Доказати да је у правоуглом троуглу четвороструки збир квадрата тежишних дужи конструисаних из темена оштрих углова једнак петоструком квадрату хипотенузе.

Глава VIII

ТРИГОНОМЕТРИЈА ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

8.1. ДЕФИНИЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ОШТРОГ УГЛА



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \qquad \mathrm{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

987. Ако је $a = 10cm$, основица и $b = 13cm$ крак једнакокраког троугла ABC, одредити вредности свих тригонометријских функција унутрашњег угла на основици тог троугла.

988. Странице правоугаоника су: $b = 6cm$, и $a = 8cm$. Одредити вредности тригонометријских функција оштрог угла који образује дијагонала:

а) са већом страницом правоугаоника,

б) са мањом страницом правоугаоника.

989. Дијагонале ромба су $d_1 = 16cm$ и $d_2 = 12cm$. Одредити вредности тригонометријских функција углова које образују страница и дијагонале ромба.

990. Катета правоуглог троугла је $a = 16cm$, а синус њој наспрамног угла је $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Одредити странице тог троугла.

991. Израчунати вредности тригонометријских функција оштрих углова правоуглог троугла чија је хипотенуза x и једна катета $\sqrt{x}(x > 1)$.

992. Израчунати вредности тригонометријских функција нагибног угла дијагонале коцке према основи.

993. Дат је правилан тетреаедар. Израчунати вредности тригонометријских функција угла који заклапају:

а) стране ABC и ACD; б) страна ABC и ивица AD.

8.2. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕМЕНТАРНИХ УГЛОВА

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \text{ или } \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \text{ или } \sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{ctg}x \text{ или } \mathrm{tg}(90^\circ - x) = \mathrm{ctg}x$$

$$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{tg}x \text{ или } \mathrm{ctg}(90^\circ - x) = \mathrm{tg}x$$

994. Дате тригонометријске функције изразити одговарајућим функцијама комплементног угла:

а) $\sin 28^\circ$; б) $\cos 49^\circ$; в) $\mathrm{tg}62^\circ$;
г) $\mathrm{ctg}63^\circ$; д) $\cos(40^\circ - \alpha)$; ђ) $\sin(30^\circ - \alpha)$;
е) $\mathrm{tg}(45^\circ + \alpha)$; ж) $\mathrm{ctg}(30^\circ + \alpha)$; з) $\mathrm{tg}(80^\circ - \alpha)$.

995. Проверити тачност једнакости:

а) $\sin 47^\circ 30' = \cos 42^\circ 30'$; б) $\cos(30^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha), \alpha < 30^\circ$;
в) $\mathrm{tg}(2\alpha + 16^\circ) = \mathrm{ctg}(74^\circ - 2\alpha), \alpha < 37^\circ$.

996. Тригонометријске функције:

а) $\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}$; в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{10}$; г) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{15}$;

написати као функције углова већих од $\frac{\pi}{6}$.

997. Ако је $\alpha + \beta = 90^\circ$, одредити вредност израза:

а) $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$; б) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\beta}$; в) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta}$.

998. Ако је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ одредити вредност израза:

а) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{1+\cos\beta}{\sin\alpha}$; б) $\dfrac{2-\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}-\dfrac{2+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\beta}$.

Упростити изразе (999-1000):

999. а) $\dfrac{2\cos 48^\circ+\sin 42^\circ}{3\cos 48^\circ}$; б) $\dfrac{2\mathrm{tg}36^\circ+4\mathrm{ctg}54^\circ}{2\mathrm{ctg}54^\circ+\mathrm{tg}36^\circ}$.

1000. а) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}+3\cos\frac{\pi}{8}}{5\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}+\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{14}}{2\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{14}}$.

1001. Ако су α,β и γ углови троугла онда је:

а) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$; б) $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

8.3. ВРЕДНОСТИ НЕКИХ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

$f(\alpha)\backslash\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Одредити вредност израза (задаци 1002-1006):

1002. а) $2\sin 30^\circ+4\cos 60^\circ$; б) $3\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{ctg}30^\circ$.

1003. а) $(\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)(\cos 45^\circ-\sin 45^\circ)$;

б) $\cos 30^\circ(\mathrm{ctg}60^\circ-\mathrm{tg}30^\circ)$.

1004. а) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}$; б) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$.

1005. а) $\dfrac{\mathrm{tg}60^\circ-\mathrm{tg}30^\circ}{\sin 30^\circ+\cos 60^\circ}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}30^\circ+\mathrm{ctg}60^\circ}{\mathrm{tg}45^\circ+2\sin 30^\circ}$.

1006. а) $\dfrac{\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ-\cos^2 45^\circ}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 30^\circ+\mathrm{tg}^2 45^\circ}{\mathrm{ctg}^2 30^\circ-\mathrm{ctg}^2 45^\circ}$;

в) $\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+4\cos^2\frac{\pi}{6}}$; г) $\dfrac{3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{4}}$.

8.4. ОСНОВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ИЗМЕЂУ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Ако је $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, онда је:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
2. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
3. $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
4. $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$,
5. $\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$,
6. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

1007. Израчунати тригонометријске функције оштрог угла α ако је:
а) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{60}{229}$; в) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{7}{24}$; г) $\mathrm{ctg}\alpha = m$;

1008. Ако је $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, израчунати $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

1009. Ако је $\sin\alpha = \dfrac{k}{n}$ и $0 < k < n$, одредити вредности осталих тигонометријских функција оштрог угла.

1010. Израчунати вредност израза $\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$ ако је $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1011. Одредити $\sin 15^\circ$ ако је $\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1012. Израчунати $\cos 22^\circ 30'$ ако је $\sin 22^\circ 30' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1013. Дато је $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Одредити $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

Одреди вредност израза (задаци 1014-1015):

1014. а) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$; б) $\dfrac{\sin^3 x - 2\cos^3 x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x}$
ако је $\mathrm{tg}x = 2$.

1015. $A = \dfrac{\sin^2 x + \sin x\cos x + 2}{3\sin x\cos x + \cos^2 x - 4}$, ако је $\mathrm{tg}x = 3$.

1016. Израчунати:

а) $A = \dfrac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$, ако је $\mathrm{tg}x = 3$;

б) $A = \dfrac{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2}$, ако је $\mathrm{tg}x = 1$.

1017. Одредити вредност израза ако је $\mathrm{tg}x = 2$:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x$; б) $\sin^6 x + \cos^6 x$; в) $\dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^6 x - \cos^6 x}$.

1018. Ако је $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = 1$, израчунати $\mathrm{tg}\alpha$.

1019. Ако је $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = p$, одредити збир $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$.

1020. Ако је $\sin x + \cos x = s$ и $\sin x \cos x = p$ показати да важи $p = \dfrac{1}{2}(s^2 - 1)$.

1021. Показати да вредност израза: $A = \cos^4 x(3 - 2\cos^2 x) - \sin^4 x(2\sin^2 x - 3)$ не зависи од x.

1022. Какав је троугао за чије оштре углове важи једнакост:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1?$$

Упрости изразе (задаци 1023 - 1027):

1023. $\dfrac{2 - \mathrm{cosec}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - 1} - \mathrm{cosec}^2\alpha + 1$. **1024.** $(1 + \sin\alpha)(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)(1 - \sin\alpha)$.

1025. $(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \mathrm{tg}\alpha)(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \mathrm{tg}\alpha)$. **1026.** $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \mathrm{tg}\alpha$.

1027. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

Доказати идентитете (задаци 1028-1046):

1028. $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

1029. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$. **1030.** $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha$.

1031. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1$.

1032. $\sin^3\alpha(1 + \mathrm{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \mathrm{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

1033. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\mathrm{tg}^2\alpha$.

1034. $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin x + \cos x$.

1035. $\mathrm{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos^3\alpha} - \dfrac{1}{\sec\alpha - \mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$.

1036. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \mathrm{tg}\alpha)$.

1037. $\dfrac{1+\mathrm{ctg}\alpha}{1-\mathrm{ctg}\alpha}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+1}{\mathrm{tg}\alpha-1}.$ **1038.** $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha.$

1039. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta.$

1040. а) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha.$

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2\mathrm{ctg}^2\alpha.$

в) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}+\dfrac{\sin x+\cos x}{1-\mathrm{tg}^2 x}=\sin x+\cos x.$

1041. $\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}=\sin x-\cos x.$

1042. $\cos^2\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha.$

1043. $(\mathrm{ctg}\alpha+1)^2+(\mathrm{ctg}\alpha-1)^2=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}.$

1044. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha=\sin^2\alpha.$

1045. $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}.$

1046. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$

8.5. РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

1047. Одредити остале основне елементе правоуглог троугла, ако је дата хипотенуза и оштар угао:

а) $c=327cm, \alpha=29°$; б) $c=71,5cm, \alpha=33°22'$.

1048. Решити правоугли троугао ако је дата висина која одговара хипотенузи $h_c=5,4cm$ и оштар угао $\alpha=27°36'$.

1049. Израчунати дужину хипотенузе правоуглог троугла, ако је висина која одговар хипотенузи $h_c=105$ и угао $\alpha=27°50'$.

1050. Израчунати крак, висину која одговара основици и површину једнакокраког троугла, ако је основица $c=92cm$ и угао на основици $\alpha=35°$.

1051. Решити једнакокраки троугао ако је крак $z=17,2cm$ и угао на основици $\alpha=45°50'$.

1052. Решити једнакокраки троугао ако је угао при врху $\gamma=38°32'$ и основица $c=1980cm$.

1053. Одредити дијагонале и висину ромба ако је страница $a=12cm$, а угао $\alpha=38°$.

1054. Израчунати страницу и висину ромба ако је дата површина P и оштар угао α.

1055. Основице једнакокраког трапеза су $10cm$ и $6cm$, а крак је нагнут према основици под углом $\alpha = 60°$. Израчунати крак, висину и површину трапеза.

1056. У круг полупречника R уписан је правилан n-угао. Одредити његову страницу и површину.

1057. Око круга полупречника r описан је правилап n-угао. Одредити страницу a и површину P правилног n- угла.

1058. Дата је страница a правилног n-угла. У функцији странице a (изразити) одредити површину P, полупречник R описаног круга и полупречник r уписаног круга.

1059. Страница правилног осмоугла је $a = 1,5$. Одредити централни угао α, полупречник круга R описаног око осмоугла, полупречник r уписаног круга и површину осмоугла.

1060. Правилни петнаестоугао уписан је у круг полупречника $R = 2$. Израчунати централни угао, страницу, полупречник уписаног круга и површину петнаестоугла.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I – Логика и скупови

1. Тачне су формуле: а), г), ђ).

2. а), б), в), г), д) и е) су искази, од којих су а) и в) тачни; ђ) - није исказ.

3. а) $\bot$; б) $\top$; в) $\bot$; г) $\top$; д) $\bot$; ђ) $\top$; е) $\top$; ж) $\bot$; з) $\top$; и) $\bot$.

4. а) $\tau(p) = \bot, \tau(q) = \top, \tau(F) = \top$; б) $\tau(p) = \top, \tau(q) = \bot, \tau(F) = \top$;

5. а) $\Leftrightarrow$; б) $\Leftarrow$; в) $\Leftrightarrow$; г) $\Leftrightarrow$; д) $\Leftrightarrow$; ђ) $\Leftrightarrow$; е) $\Rightarrow$; ж) $\Rightarrow$; з) $\Leftrightarrow$; и) $\Leftrightarrow$; ј) $\Leftarrow$; к) $\Leftrightarrow$.

6. а) неопходно, довољно; б) довољно; в) довољно; г) неопходно.

7. а) $x \in \{1, 2, 3\}$; б) $x \in \{1, 2, 3\}$; в) $x \in \{3, 4, ..., 9\}$; г) $x \in \{2, 3, ..., 9\}$; д) $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$; ђ) $x \in \{2, 3, ..., 9\}$; е) $x \in \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$; ж) $x = 3$; з) $x \in \{2, 3, 4, 5\}$; и) $x \in \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

8. а)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

б), в) су таутологије

г)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow \neg q)$	$(q \Rightarrow \neg p)$	$\Leftrightarrow$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

9.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

а) Ако је $p \Rightarrow q$ тачно, а $p \Leftrightarrow q$ лажно, тада p мора бити $\bot$, а q-$\top$, па је $q \Rightarrow p$ - лажно.
б) Из таблице се види да ако је $p \Leftrightarrow q$ тачно, тада је $\neg p \Leftrightarrow q$ - лажно, а $q \Rightarrow p$ - тачно, док $\neg p \Rightarrow q$ може бити тачно или лажно.

10. Таутологије су формуле: в), ђ) и е).

11. Таутологије су формуле: б), в), г), и е).

13. а) Формула има вредност $\bot$ само ако је $\tau(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))) = \top$ и $\tau(q \Rightarrow (s \vee t)) = \bot$, одакле је $\tau(q) = \top$, $\tau(s) = \tau(t) = \bot$, $\tau(p) = \top$, $\tau(p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)) = \top$. Ово је немогуће јер из $\tau(q) = \top$, $\tau(p) = \top$, следи $\tau(p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)) = \bot$. Дакле, формула је таутологија.

14. Да је дата формула таутологија лако се доказује применом таблице. Означимо, сада, са p исказ: "a^2 је паран број" и са q исказ: "a је паран број". Очигледно је да $\neg q \Rightarrow \neg p$ (ако је a непаран број, онда је и a^2 непаран број). На основу таутологије ће, дакле, бити тачно $p \Rightarrow q$.

15. Упутство: применити таутологију $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, при чему је p: "$x + y \neq 5$", а q: "$x \neq 1 \vee x \neq 4$". Тада ће $\neg q$ бити исказ $\neg(x \neq 1 \vee x \neq 4) \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 4$. (Примена таутологије $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$).

16. б) $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1$

18. Таква је, на пример формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

19. а) На пример $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ или само $\neg q$.
б) На пример $\neg[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ или $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ или само q.

20. Све такве формуле x су еквивалентне формули $p \Leftrightarrow q$ јер је $(p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow q$.

21. а) Тачно; б) тачно; в) нетачно; г) тачно; д) нетачно; ђ) нетачно; е) нетачно; ж) тачно.

22. а) Формула има значење: од сваког природног броја постоји већи и тачна је; б) тачно; в) нетачно; г) тачно; д) тачно.

23. а) Нетачно - на пример за $x = 0$, $y \neq 0$; б) нетачно - на пример за $x = y = 0$; в),г),д) су тачне формуле; ђ) је нетачна формула.

24. а) $(\exists x)(x \neq 0)$; б) $(\forall x)(x^2 \geq 0)$; в) $(\exists x)(x \cdot 0 \neq 0)$; г) $\neg(\exists x)(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin \mathbf{Z} \vee x + 5 \leq 0) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x + 5 \leq 0)$; д) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \leq 0)$; ђ) $(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x \notin \mathbf{Z})$.

25. а) $x|z \wedge y|z \wedge (\forall u)(x|u \wedge y|u \Rightarrow z|u)$; б) $(\exists y)(y \in \mathbf{Z} \wedge x = y^2)$;
в) $\neg(\exists x)(\exists y)(x^2 = 0 \wedge y^2 = 0 \wedge x \neq y)$, или $(\forall x)(\forall y)(x^2 = 0 \wedge y^2 = 0 \Rightarrow x = y)$;
г) $(\exists x)(x^2 = 0 \wedge (\forall y)(y^2 = 0 \Rightarrow x = y)$;
е) $(\forall x \in \mathbf{Q})(\forall y \in \mathbf{Q})(\exists z \in \mathbf{Q})(x \neq y \Rightarrow (x < z < y \vee y < z < x))$.

26. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{a, c\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$.

27. а) $\{m, p, q\}$; б) $\{m, n, p, q, r\}$, в) $\emptyset$.

28. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$. а) $\{-2, -1, 0\}$; б) $\{-2, -1, 0, 1, 4, 6, 12\}$; в) $\{1\}$; г) $\emptyset$; д) $\{1, 2, 3\}$; ђ $\{-4, -3, 3, 4\}$; е) $\{1\}$; ж) $\{4\}$.

29. Пошто елементи d, h и i припадају скупу $B \cap X$, а не припадају скупу B, то они морају припадати скупу X. Елементи c и d припадају скупу $A \cup X$, па морају припадати скупу X. Дакле, $X = \{c, d, h, i\}$. Очигледно је да, осим ових елемената скуп X не садржи ниједан други елемент.

30. $X = \{3, 4, 6\}$.

31. $A = (-\infty, 1)$, $B = [3, +\infty)$, $A \cap \mathbf{N} = \emptyset$, $B \cap \mathbf{N} = \{3, 4, 5, ...\}$.

32. а) $(1, 3]$; б) $(-5, 4)$; в) $(-\infty, 3)$; г) $(-2, -1)$; д) $(-2, -1) \cup (1, 2)$; ђ) $(0, 4] \cup (7, 9]$; е) $(-5, 5]$; ж) $[-1, 0] \cup (2, 3)$.

33. а) $P(A) = \{\emptyset, A\}$; б) $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, B\}$;
в) $P(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, C\}$.

34. а) $x = 1$, или $x = \{1\}$, или $x = \{1, \{1\}\}$;
б) $x = \emptyset$, или $x = \{1\}$, или $x = \{\{1\}\}$, или $x = \{\{1, \{1\}\}\}$, или $x = \{1, \{1\}\}$, или $x = \{1, \{1, \{1\}\}\}$, или $x = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$, или $x = a$.

35. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$, $B \setminus C = \emptyset$, $B \cup C = C$, $(B \cap C) \cup (A \setminus C) = \{-1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}$.

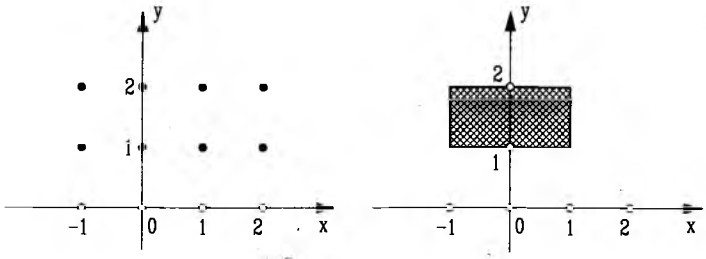
36. а) $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$ - користили смо таутологију $p \vee p \Leftrightarrow p$.
е) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - користили смо таутологију $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, при чему је p - $x \in A$, q - $x \in B$ и r - $x \in C$.
л) $x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A' \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A) \Leftrightarrow \perp \Leftrightarrow x \in \emptyset$;

ђ) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

37. а) Најпре треба доказати таутологију $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$, па ће на основу ње бити $x \in A \cup (A' \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (\neg(x \in A) \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

38. а) $x \in \emptyset \setminus A \Leftrightarrow x \in \emptyset \wedge x \notin A \Leftrightarrow \perp \Leftrightarrow x \in \emptyset$;
в) Доказати таутологију $p \wedge \neg(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$;
е) Доказати таутологију $(p_1 \vee p_2) \wedge \neg(q_1 \vee q_2) \Rightarrow (p_1 \wedge \neg q_1) \vee (p_2 \wedge \neg q_2)$.

39. $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$,
$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$,
$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,
$B \times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.



Сл. уз зад. 40

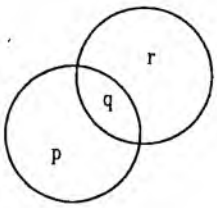
40. Види слику.

41. $A = \{m, n, p\}$, $B = \{0, 1\}$.

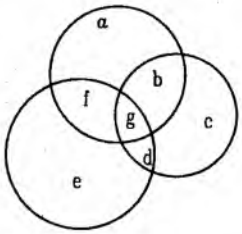
42. а) $E_1 \cap E_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x+2y = 10 \wedge x+y = 3\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x = -4 \wedge y = 7\} = \emptyset$,
$E_1 \cup E_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}, x + 2y = 10 \vee x + y = 3\} = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,
$E_1 \times E_2 = \{(2, 4, 1, 2), (2, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1), (6, 2, 1, 2), (6, 2, 2, 1), (8, 1, 1, 2), (8, 1, 2, 1)\}$;
б) $E_1 = \{(2, 2)\}$, $E_2 = \{(1, 2), (3, 1)\}$ итд.

43. а) $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C$. Овде смо користили таутологију $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Слично се доказују и тврђења б)-ђ).

44. Означимо са p број елемената првог скупа, који не припадају другом, са q број елемената у пресеку и са r број елемената другог скупа, који не припадају првом. Тада је (в. сл.) $p + q + r = 15$ и $p + q = 8$, одакле је $r = 7$, а број елемената другог скупа је $r + q = 12$.



Сл. уз зад. 44



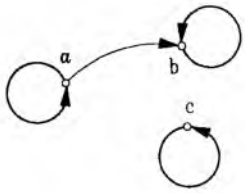
Сл. уз зад. 45

45. Ако означимо са a број преводилаца, који говоре само руски, c - само француски, e - само енглески, b - руски и француски, f - руски и енглески, d - енглески и француски и g - сва три језика, имаћемо (в. сл.) $a + b + c + d + e + f + g = 52$, $a + b + g + f = 20$, $b + c + g + d = 19$, $f + g + d + e = 35$, $f + g = 11$, $g + b = 7$, $g + d = 9$, одакле се налази
а) $g = 5$; б) $a = 7$.

46. 480.

47.

ρ	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\bot$	$\top$



48. Није, јер није рефлексивна.

49. Како је $x\rho y \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 1$ на одговарајућем месту у таблици је $\top$, а на свим осталим местима $\bot$.

50. $\rho = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Ова релација није ни рефлексивна, ни симетрична, ни транзитивна.

51. а) симетричност; б) антисиметричност.

52. а) симетричност; б) рефлексивност, транзитивност.

53. а)

ρ	0	1	2	3
0	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
1	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
2	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
3	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Релација ρ није рефлексивна, јесте симетрична, није антисиметрична (на пр. $1\rho 0 \wedge 0\rho 1 \wedge 0 \neq 1$)) и није транзитивна (на пр. $1\rho 0 \wedge 0\rho 1 \wedge \neg(1\rho 1)$). б), в), г) релације су симетричне, нису ни рефлексивне, ни антисиметричне, ни транзитивне.

54. а), б) ρ је антисиметрична и транзитивна, није ни рефлексивна, ни симетрична.

55. Класе еквиваленције су: $C_{x+2=0} = \{x+2=0,\ 2x+4=0,\ 2x+2=-2\}$, $C_{x+1=0} = \{x+1=0,\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\}$, $C_{x^2=4} = \{x^2 = 4\}$,

56. Класе еквиваленције су $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1,-1\}$, $C_2 = \{2,-2\}$, $C_3 = \{3,-3\}$, $C_4 = \{4,-4\}$, $C_5 = \{5,-5\}$.

57. а) јесу;
б) $f(f(a)) = f(b) = a$, $f(f(b)) = f(a) = b$, $f(f(f(d))) = f(f(c)) = f(d) = c$, $g(f(g(a))) = g(f(c)) = g(d) = d$, $g(g(c)) = g(a) = c$;
в) $x = b$.

58. а) $f(1) = 5$, $f(2) = 8$, $g(1) = 3$, $g(2) = 4$, $f(g(1)) = f(3) = 11$, $g(f(1)) = g(5) = 7$;
в) $f(2x) = 2+6x$, $g(3x) = 2+3x$, $g(f(x)) = 2+2+3x = 4+3x$, $f(g(x)) = 2+3(2+x) = 8+3x$.

59. а) -1; б) $f(\frac{5}{6}) = \frac{2}{3}$; в) $f(2) = 3$; г) $f(\frac{7}{16}) = -\frac{1}{7}$; д) $f(\frac{16}{25}) = \frac{7}{25}$; ђ) $f(-\frac{1}{2}) = -2$; е) $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x+1$; ж) $2x-3$; з) $4x-1$.

60. Пресликавања скупа $\{a,b\}$ у скуп $\{1,2,3\}$ су: $f_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_3 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_4 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $f_6 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_7 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_8 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_9 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Пресликавања скупа $\{1,2,3\}$ у скуп $\{a,b\}$ има 8.

61. f је НА, али није 1-1.

62. а) $f(5) = 5$, $f(12) = 3$, $f(253) = 10$, $f(f(253)) = 1$;
б) решења има бесконачно много, то су сви природни бројеви, чији је збир цифара 5, на пример: 5, 104, 4001, 1002200, 32 итд ...
в) f је НА, али није 1-1.

63. а) Јесте и 1-1 и НА; б) није ни 1-1, ни НА; в) јесте и 1-1 и НА; г) није ни 1-1, ни НА; д) јесте и 1-1 и НА; ђ) није ни 1-1, ни НА.

64. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$, $h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$;

$$j^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad k^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad l^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

65. а) Докажимо најпре да је f 1-1 пресликавање. Из $f(x_1) = f(x_2)$, тј. $7x_1 - 1 = 7x_2 - 1$ после додавања јединице и дељења две стране једнакости са 7, следи $x_1 = x_2$. Нека је сада y произвољан реални број. Из $y = 7x - 1$ следи $x = \frac{y+1}{7}$, па је тачна формула $(\forall y)(\exists x)(y = f(x))$. Пошто је f 1-1 и НА, то постоји инверзна функција f^{-1}. Да бисмо је одредили уочимо да треба да буде $f^{-1}(f(x)) = x$, тј. $f^{-1}(7x-1) = x$. Ако означимо $7x - 1 = t$, добијамо $x = \frac{t+1}{7}$, односно $f^{-1}(t) = \frac{t+1}{7}$. Дакле, инверзна функција функције f може се дефинисати са $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{7}$;

б) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$; в) $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{5}$; г) $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{10}$; д) $f^{-1}(x) = 3x + \frac{1}{4}$; ђ) $f^{-1}(x) = 3x - 2$.

66. а) $f(x) = (x+1)^2$. Како је $f(x) \geq 0$ то функција није НА, а како је на пример $f(-2) = f(0) = 1$, то функција није ни 1-1. б) није НА, али јесте 1-1; в) није ни НА, ни 1-1.

67. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x+5) = 2(2x+5) + 5 = 4x + 15$, $(f \circ g)(x) = 10x + 11$, $(g \circ f)(x) = 10x + 28$, $(g \circ g)(x) = 25x + 18$.

68. $(f \circ g)(x) = 3 + 2x^2$, $(g \circ f)(x) = 2 + 4x + 4x^2$, $(g \circ g)(x) = 2 + 2x^2 + x^4$, $g^3(x) = 5 + 8x^2 + 8x^4 + 4x^6 + x^8$, $(f \circ g^3)(x) = 11 + 16x^2 + 16x^4 + 8x^6 + 2x^8$.

69. а) $(f \circ g)(0) = -1$, $(g \circ f)(1) = 0$, $(f \circ g)(x) = |x| - 1$, $(g \circ f)(x) = |x - 1|$, $(f \circ f)(x) = x - 2$, $(g \circ g)(x) = ||x|| = |x|$.

71. За $x = 2$ добијамо $f(2) + 3f(\frac{1}{2}) = 4$, а за $x = \frac{1}{2}$, добијамо $f(\frac{1}{2}) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Ако другу једначину помножимо са 3 и одузмемо од прве, добићемо $f(2) = -\frac{13}{32}$.

72. а) Нека је $\frac{3x-1}{x} = t$, одакле је $x = \frac{1}{3-t}$, $t \neq 3$, па је $g(t) = \frac{2}{3-t}$, тј. $g(x) = \frac{2}{3-x}$ $x \neq 3$; б) $f(x) = 2 - x$; в) $h(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

73. а) Уведимо смену $t = \frac{x}{2} - 3$. Тада је $x = 2t + 6$, па је $f(t) = 2t + 6 + 1 = 2t + 7$. Дакле, $f(x) = 2x + 7$. б) $f(x) = 3x - 5$; в) $f(x) = 5x - 1$; г) $f(x) = 7x + 2$;

74. а) Испред тројке може се налазити било који двоцифрени број, а њих има деведесет. б) 180.

75. 15.

76. Десет: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE.

77. Осам.

78. Првих четири путника могу се распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начина, следећих троје на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина, а преосталих троје на $3 \cdot 2 = 6$ начина. Према томе, број могућих распореда једнак је $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$. *Напомена.* Овај као и још неки задаци, могу се урадити применом формуле за број варијација без понављања k–те класе од n елемената: $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Тако је број распореда прва четири путника $V_5^4 = 120$, следећих троје $V_5^3 = 60$ и преосталих $V_3^2 = 6$.

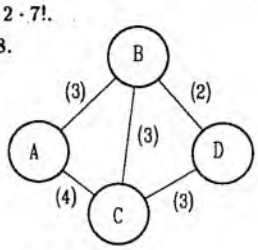
79. Означимо са n број тачака. Под овим условима оне одређују $\frac{n(n-1)}{2}$ правих, па је $\frac{n(n-1)}{2} = 2n$, одакле налазимо да је $n = 0$ или $n = 5$. *Напомена.* У овом задатку, као и у неким сличним, може се применити формула за број комбинација (без понављања) k–те

класе од n елемената: $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}$. Овде је број правих које одређују n тачака једнак $C_n^2 = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

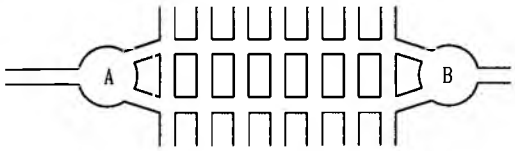
80. а) Двоцифрени завршеци могу бити 25 или 75 јер се цифре не могу понављати, па троцифрени завршеци могу бити само 025 или 075. У свакој од ових могућности "искоришћене" су по три цифре - преостају још седам цифара које се могу распоредити на 7! начина. Резултат: $2 \cdot 7!$

б) $3 \cdot 6 \cdot 6! + 2 \cdot 7!$.

81. $6 \cdot 3 = 18$.



Сл. уз зад. 82



Сл. уз зад. 83

82. Мрежа путева од A до D изгледа као на слици. Ако се иде путем $A-B-D$ тад има 6 путева, путем $A-C-D$ има 12 путева, ако се иде путем $A-B-C-D$ има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, а $A-C-B-D$ $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ пута. Укупан број путева је $6 + 12 + 27 + 24 = 69$.

83. Почевши од трга A (в. сл.) и сваки пут када једносмерном улицом стигне на раскрсницу, возач може да бира два пута. Укупан број могућности је $2^8 = 256$.

84. Означимо са $|C|$ број елемената скупа C. Тада је $\max(|A|, |B|) \leq |A \cup B| \leq m+n$, $0 \leq |A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$, $0 \leq |A \setminus B| \leq n$; $0 \leq |B \setminus A| \leq m$, $|A \times B| = mn$.

85. 2^6 начина.

86. Први топ се може поставити на произвољно поље на $8^2 = 64$ начина. Други топ се може поставити на $7^2 = 49$ начина (на било које поље које није у истој врсти или колони у којој је први топ). Трећи топ се може поставити на $6^2 = 36$ начина итд. Тражени број начина је $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

87. Како је $2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$, сваки делилац броја 2400 је облика $2^x 3^y 5^z$, где је $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$. Пошто постоји 6 могућности за x, 2 за y и 3 за z, то постоји $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ различитих делилаца броја 2400.

88. $9 \cdot 10^3 = 9000$. **89.** $30^2 \cdot 10000 = 9 \cdot 10^6$. **90.** $6^3 = 216$. **91.** $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. **92.** 24.

93. Од 12 плавих тачака може се конструисати $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ дужи и свака од њих се може комбиновати са 9 црвених тачака, тако да добијамо $66 \cdot 9 = 594$ троугла чија су два темена плава и једно црвено. Слично имамо $\dfrac{9 \cdot 8}{2} \cdot 12 = 432$ троугла чија су два темена црвена, а једно плаво. Дакле, укупан број троуглова код којих темена нису исте боје је $594 + 432 = 1026$.

94. Највише троуглова има ако су сваке три тачке са разних правих неколинеарне. Тада се троуглови добијају тако да им је основица на једној правој, а врх нека од преосталих десет тачака (таквих троуглова има $3 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 300$) или тако да су им темена на различитим правим (таквих троуглова има $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$). Дакле, највећи могући број троуглова је $125 + 300 = 425$.

95. $\dfrac{12 \cdot 11}{2} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 660$.

96. Квадратну мрежу 8×8 образује 9 хоризонталних и 9 вертикалних линија. Две хоризонталне и две вертикалне линије одређују правоугаоник. Дакле, правоугаоника има $\dfrac{9 \cdot 8}{2} \cdot \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 1296$.

97. а) Столице "бирају" ђаке на $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$ начина; б) ђаци бирају столице на $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400$ начина.

98. а) $5 \cdot 6^3 = 1080$; б) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; в) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$; г) Ако је нула на последњем месту таквих бројева има $5 \cdot 4 \cdot 3$, а ако је на последњем месту петица $4 \cdot 4 \cdot 3$. Укупно, $5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 108$. *Напомена.* У примеру а) може се применити формула за број варијација са понављањем k–те класе од n елемената $\overline{V}_n^k = n^k$. Свих четвороцифрених бројева (укључујући и оне који почињу нулом) има $\overline{V}_6^4 = 6^4$, а од тог броја треба одузети оне који почињу нулом – њих има $\overline{V}_6^3 = 6^3$. Тражени број је $\overline{V}_6^4 - \overline{V}_6^3 = 6^4 - 6^3 = 1080$. Слично се може резоновати и у задатку 100, као и неким другим задацима.

99. Кандидати за прву цифру су 2, 4, 6 и 8, за другу 1, 3, 5, 7 и 9, за трећу 0, 3, 6 и 9, за четврту 2, 3, 5 и 7, за пету 4, 6, 8 и 9 и за шесту 0 и 5. Према томе, оваквих бројева има $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2560$.

100. $2 \cdot 3^{99}$.

101. Долази у обзир 6 слова: А, Е, J, К, М и Т. Број могућности за таблице је $6 \cdot 1000000 = 6000000$.

102. Прва цифра се може изабрати на четири начина (2, 4, 6 или 8), друга на десет, а трећа на пет начина, па оваквих бројева има $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$.

103. Књиге на руском се могу распоредити на $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ начина, на енглеском на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ и на француском на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начина. Како има 6 могућих распореда по језицима (РЕФ, РФЕ, ЕРФ, ЕФР, ФРЕ, ФЕР), укупан број распореда је $5040 \cdot 6 \cdot 120 \cdot 6 = 21772800$.

104. Када се распореде парне цифре, три преостале непарне цифре се могу распоредити на $3! = 6$ начина. Постоји $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ могућности да се распореде парне цифре на прва три места (нула не може бити на првом месту), а по $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ могућности да се распореде од другог до четвртог, трећег до петог, или четвртог до шестог места. Стога је тражени број $6(4 + 6 + 6 + 6) = 132$.

105. а) Ако формула не би била таутологија, тада би за неке вредности искасних слова p, q, r морала имати истинитосну вредност $\perp$, а то је могуће само ако је $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \top$ (1) и $\tau((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)) = \perp$ (2).

Из (2) следи да је $\tau(r \Rightarrow p) = \top$ (3) и $\tau(q \Rightarrow p) = \perp$ (4),

а из (4) да је $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \top$.

Како је $\tau(p) = \perp$ из (3) следи да је $\tau(r) = \perp$, па је

$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \tau((\perp \Rightarrow \top) \Rightarrow \perp) = \tau(\top \Rightarrow \perp) = \perp$,

што је у супротности са (1). Дакле, не постоје вредности за које би ова формула била нетачна, па је она таутологија.

ђ) Ако претпоставимо да формула није таутологија морало би бити $\tau(p_1 \Rightarrow p_2) = \tau(p_2 \Rightarrow p_3) = \cdots \tau(p_{n-1} \Rightarrow p_n) = \top$ (1) и $\tau(p_1 \Rightarrow p_n) = \perp$ (2). Из (2) следи да је $\tau(p_1) = \top$ и $\tau(p_n) = \perp$, а због тога из (1) имамо да мора бити $\tau(p_2) = \tau(p_3) = \cdots = \tau(p_n) = \top$. Пошто је немогуће да p_n у исто време има и вредност $\top$ и $\perp$, претпоставка да формула није таутологија је погрешна.

106. а) Ако је $\tau(p) = \top$ формула је еквивалентна формули $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n)$, а ако је $\tau(p) = \perp$ лева и десна страна формуле су тачне.

в) Ако је $\tau(p) = \top$ лева и десна страна формуле су тачне, а ако је $\tau(p) = \perp$ добијамо таутологију $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \neg p_n$.

107. Решење је ($x = 0$ и $y = 0$), или ($y = 0$ и $z = 0$), или ($z = 0$ и $x = 0$), односно да су бар две од променљивих x, y, z једнаке нули.

108. Ако увдедемо операцију $\veebar$ - "ексклузивна дисјункција", која је одређена таблицом:

p	q	$p \veebar q$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

може се доказати да је $x \in A \triangle B \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$, па се особине а) - з) могу доказивати тако што се пре свега докажу одговарајуће таутологије, на пример за:
а) $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$; г) $(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$;
ж) $(p_1 \vee p_2) \veebar (q_1 \vee q_2) \Rightarrow (p_1 \veebar q_1) \vee (p_2 \veebar q_2)$.

109. а) $X = \{a, d, e\}$; б) $X = \{a, b, e\}$.

110. а) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
б) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;
в) $x \in P(A \cap B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B \Leftrightarrow x \subset A \wedge x \subset B \Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \cap P(B)$;
г) $x \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B) \Leftrightarrow x \subset A \vee x \subset B \Rightarrow x \subset A \cup B \Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$.
Да не важи обрнута импликација, види се на следећем примеру:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, X = \{2, 3, 4\}.$$

Тада је $X \subset A \cup B$, али није ни $X \subset A$, ни $X \subset B$.

111. Претпоставимо супротно, тј. да није $A \subset B$, ни $B \subset A$. Тада постоји $x \in A$ и $x \notin B$ и постоји $y \in B$ и $y \notin A$. За скуп $S = \{x, y\}$ важи да је $S \subset A \cup B$, али није ни $S \subset A$, ни $S \subset B$, што је контрадикција!

112. а) Нема решења; б) $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \{1, 3\}$, $X_3 = \{2, 3\}$, $X_4 = \{1, 2, 3\}$;
в) решење је било који скуп X који садржи елементе 1 и 2, а не садржи елемент 3.

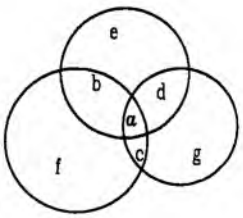
113. а) X је било који подскуп скупа $\{0, 1, 2\}$ – укупно има 8 оваквих скупова. б) X је било који подскуп скупа $\{1, 2, 3\}$ – укупно има 8 оваквих скупова.

114. а) Није, на пример $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\{\emptyset\}\}$.
б) Није, на пример $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1, 2\}\}$.

115. Не постоје. Нека $x \in A \cap B$; тада $x \notin C$. На тај начин $x \in (A \cap B) \setminus C$.

116. Како ова релација важи за све подскупове $X \subset C$, важиће и када је $X = \emptyset$ и када је $X = C$. У тим случајевима, добијамо: $\emptyset \cap A = \emptyset \cup B$ и $C \cap A = C \cup B$, тј, $A = C$ и $B = \emptyset$.

117. Уз ознаке као на слици имамо:



$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h &= 20, \\ a+b+d+e &= 16, \\ a+b+c+f &= 15, \\ a+c+d+g &= 17. \end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са -2 и саберемо са остале три добијамо $a-(e+f+g+2h) = 8$, одакле је $a \geq 8$, јер је $e \geq 0$, $f \geq 0$, $g \geq 0$ и $h \geq 0$.

118. а) $(a, b)\rho_1(c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d$. Сваком целом броју одговара једна класа еквиваленције.
б) $(a, b)\rho_2(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Рефлексивност: $(a, b)\rho_2(a, b) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \top$.

Симетричност: $(a,\, b)\rho_2(c,\, d) \Leftrightarrow (\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}) \Leftrightarrow (c,\, d)\rho_2(a,\, b)$.
Транзитивност:
$(a,\, b)\rho_2(c,\, d) \wedge (c,\, d)\rho_2(e,\, f) \Leftrightarrow (\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f}) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow (a,\, b)\rho_2(e,\, f)$. $C_{(a,b)} = \{(x, y) \mid \frac{a}{b} = \frac{x}{y}\}$. Дакле, сваком рационалном броју $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости бројеви одговара једна класа еквиваленције.

119. Класа еквиваленција има m: $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$. У некој од њих, на пример C_i налазе се сви цели бројеви који при дељењу са m дају остатак i.

121. а) Пошто дати услов важи за све $x, y, z \in A$, важиће и када је $z = x$. Дакле, $x\rho x \wedge y\rho x \Rightarrow x\rho y$. Међутим ρ је рефлексивна, па важи $x\rho x$, дакле $(\forall x,\, y)\ (y\rho x \Rightarrow x\rho y)$; б) Пошто је ρ симетрична, важи $y\rho z \Leftrightarrow z\rho y$, па је $x\rho z \wedge y\rho z \Leftrightarrow x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow x\rho y$, а то је управо услов транзитивности.

122. а) Нека је $\frac{2x-3}{x} = t$. Тада је $x = \frac{3}{2-t}$, па је $f(t) = \dfrac{4 \cdot \frac{3}{2-t} - 9}{2 \cdot \frac{3}{2-t} - 3} = \frac{9t-6}{3t} = 3 - \frac{2}{t}$.

Значи да је и $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$. Докажимо да је f 1-1 пресликавање. Нека је $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in R \setminus \{0\}$. Тада је $\frac{2}{x_1} \neq \frac{2}{x_2}$ и $3 - \frac{2}{x_1} \neq 3 - \frac{2}{x_2}$. Дакле, важи $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функција f није НА пресликавање, јер не постоји x тако да је $f(x) = 3$. б) $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$, јесте 1-1, није НА. в) $f(x) = 5 + \frac{4}{x}$, јесте 1-1, није НА. г) $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$, јесте 1-1, није НА.

123. а) Најпре доказујемо а је f 1-1. Нека $x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Из $x_1 + 1 = x_2 + 1$ следи $x_1 = x_2$. Ако $x_1, x_2 \in [0, 1]$ из $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$ следи $x_1^2 = x_2^2$, а одатле $x_1 = x_2$ (због $x_1, x_2 \geq 0$). Најзад, ако је $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, а $x_2 \in [0, 1]$ није могуће $x_1 + 1 = x_2^2 + 1$, јер $x_2^2 \in [0, 1]$, а $x_1 \notin [0, 1]$. Да је f НА закључујемо на следећи начин: ако је $1 \leq y \leq 2$, из $y = x^2 + 1$ следи $x = \sqrt{y-1}$, а ако $y < 1$ или $y > 2$, из $y = x + 1$ следи $x = y - 1$. Дакле,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, x < 1 \vee x > 2 \\ \sqrt{x-1}, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1, x < -1 \vee x > 0 \\ \sqrt{x+1}, \ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

124.

$$\text{а) } (f \circ f)(x) = \begin{cases} f(0), x < 0 \\ f(x), x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases};$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(0), x < 0 \\ f(-x^2), x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0, x \geq 0 \end{cases} = 0;$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} g(0), x < 0 \\ g(x), x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ -x^2, x \geq 0 \end{cases};$$

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} g(0), x < 0 \\ g(-x^2), x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0, x \geq 0 \end{cases} = 0;$$

$$\text{б) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ 0, x > 0 \end{cases};$$

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} x, x \leq 0 \\ 0, x > 0 \end{cases};$$

$(f \circ f)(x) = (g \circ f)(x) = 0.$

125. Нека су, најпре, f и g 1-1 пресликавања. Тада је за $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ $g(x_1) = y_1 \neq g(x_2) = y_2$, а $f(y_1) \neq f(y_2)$, па је $(f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$ што значи да је $f \circ g$ 1-1 пресликавање. Нека су, сада, f и g НА пресликавања. Тада за свако $z \in C$ постоји $y \in B$ тако да је $f(y) = z$, а за то $y \in B$ постоји $x \in A$ тако да је $g(x) = y$, па је за дато $z \in C$ $(f \circ g)(x) = z$, тј. $f \circ g$ јесте НА пресликавање.

126. Означимо ли $\frac{x}{x-1}$ са t и $\frac{x-1}{x}$ са $\frac{1}{t}$, имаћемо $f(t) - 2f(\frac{1}{t}) = 0$ (1). Ако у (1) заменимо t са $\frac{1}{t}$ добићемо $f(\frac{1}{t}) - 2f(t) = 0$ (2). Ово је могуће јер релација (1) важи за свако $t \neq 0$, $t \neq 1$. Ако (2) помножимо са 2 и затим саберемо са (1), добијамо $-3f(t) = 0$, осим за $t = 0$, $t = 1$, односно $f(x) = 0$, осим можда за $x = 0$, $x = 1$.

127. а) Означимо $\frac{x-2}{x+1} = z$. Тада ће бити $x = \frac{z+2}{1-z}$, $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{z}$. Према томе важи $f(\frac{1}{z}) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z}$ (1). У (1) заменимо z са $\frac{1}{z}$. Имаћемо $f(z) + 2f(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1+2z}{z-1}$ (2). Из (1) и (2), добија се $f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}$, осим, можда за $x = 0$, $x = 1$. Провером се утврђује да овај услов важи за $x = 0$!

б) $f(x) = \frac{5x+7}{8(1-x)}$, $x \neq 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

128. а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1$, $(f \circ g)(x) = 1$, $(g \circ f)(x) = 1$;

б) $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{3}{2}x$, $g(2x+1) = \frac{x}{2}$. Сменом $\frac{x}{x-1} = p$ и $2x+1 = q$ добија се $x = \frac{p}{p-1}$ и $x = \frac{q-1}{2}$, па је $f(p) = \frac{3p}{2(p-1)}$ и $g(q) = \frac{q-1}{4}$. Одатле је $(f \circ g)(x) = \frac{3}{2}\frac{x-1}{x-5}$; $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{8(x-1)}$.

129. Има девет четвороцифрених бројева који се записују једном цифром. Испитајмо сада колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу две цифре. Нрва цифра у таквом броју може бити једна од цифара 1, 2, 3, ...,9. Од преосталих девет цифара треба изабрати једну и уписати је једном, два или три пута. То се може урадити на седам начина. Дакле, тражених бројева има $9 + 9 \cdot 9 \cdot 7 = 576$.

130. Седмоцифрених бројева има $9 \cdot 10^6$. Половина од њих има паран, а половина непаран збир цифара. Дакле, седмоцифрених бројева чији је збир цифара паран има $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^6 = 45 \cdot 10^5$.

131. а) Ако је број улица у насељу једнак n, онда из услова да се сваке две улице секу добијамо $\frac{n(n-1)}{2} = 21$, одакле следи да је $n = 7$.

б) Нретпоставимо да се улице у насељу изграђују једна за другом. Изградњом сваке нове улице (после прве) број стамбених четврти, са свих страна ограничених улицама, повећава се за број који је за један мањи од броја новодобијених раскрсница. Зато је тражени број $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

132. Ако се три пута појављује нула, она је на месту јединица, десетица или стотина. На месту хиљада може бити било која од цифара 1, 2, ...,9, па таквих бројева има 9. Ако се три пута појављује цифра k, $k \neq 0$ онда четврта цифра може бити нула (ако је на првом месту добијају се троцифрени бројеви) или цифра l, $l \neq 0$, $l \neq k$. Број свих таквих

бројева је $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$, јер четврта цифра (различита од претходних) може стајати на неком од четири места. Према томе са наведеним својством има $324 + 9 = 333$ броја.

Глава II – Реални бројеви

133. а) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2100 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, па је НЗД$(180, 2100) = 60$, НЗС$(180, 2100) = 6300$.
б) 23 и 276; в) 154 и 355740; г) 1 и 128700.

134. а) 90; б) НЗС$(24, 18) = 72$; в) НЗД$(360, 504) = 72$.

135. $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Најмањи тражени бројеви су: а) $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; б) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575$.

136. Како је $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$, а производ три узастопна цела броја је дељив и са 2 и са 3, то је и $m^3 - m$ дељиво са 6.

137. Упутство: $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 + 1)(m - 1)(m + 1)$.

138. а) $2n^3 - 3n^2 + n = n(2n^2 - 2n - n + 1) = n(n-1)(2n-1)$. Од бројева $n, n-1$ један је дељив са 2. Ако бројеви n и $n-1$ нису дељиви са 3, онда је број $n+1$ дељив са 3, па је и број $2n - 1 = 2(n+1) - 3$ дељив са 3. б) $n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$.

139. а) 1; б) било који прост број; в) било који квадрат простог броја.

140. Упутство: Број 1995 је дељив са три, а није дељив са 9.

141. Приметимо да је $7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$, последња цифра броја 7^5 је 7, броја 7^6 је 9, броја 7^7 је 3, 7^8 је 1 итд. Видимо да се последња цифра броја $7^n, n \in \mathbf{N}$ периодично, са периодом 4, понавља.
а) Како је број 77 облика $4k+1$, то је последња цифра броја 7^{77} - цифра 7. Истом цифром се мора завршавати и број 77^{77}; б) 7.

142. Последња цифра броја 9^n је 1, ако је n паран природан број, а последња цифра броја 4^m је 4, ако је m непаран природан број. Због овога се број $9^{44} + 4^{99}$ завршава цифром 5.

144. а) Нека је n тражени број. Непосредно се установљава да је број $n+1$ дељив са 2 и са 3 и са 4 и са 5 и са 6, а пошто је $NZS(2,3,4,5,6) = 60$, то је $n + 1 = 60$ и $n = 59$; б) 238.

145. Представимо један такав број у облику $\overline{xyz}$. Тада је $x + y + z = 14$, а пошто су x, y, z цифре, може бити $-7 \leq x - y + z \leq 18$, односно $x - y + z = 11$ или $x - y + z = 0$. У првом случају би било $2(x + z) = 25$, што је немогуће, а у другом се добија $y = 7$ и $x + z = 7$. Сви тражени бројеви су: 176, 275, 374, 473, 572, 671 и 770 и има их седам.

147. $n \in \{-11, -1, 1, 7\}$.

148. а) $-6\frac{1}{2}$; б) $2\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $136\frac{16}{27}$.

149. Пошто је $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{30}{120}$ и $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{40}{120}$, могу се узети, на пример, бројеви: $\frac{31}{120}, \frac{32}{120}, \frac{33}{120}, \ldots, \frac{39}{120}$.

150. $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

151. а) $\frac{58}{100} = \frac{29}{50}$; б) $\frac{23}{10}$; в) $-\frac{345}{100} = -\frac{69}{20}$; г) $-\frac{2071}{1000}$.

152. $1 = 1,000\ldots$; $-\frac{1}{6} = -0,1666\ldots$; $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots$; $\frac{4}{9} = 0,111\ldots$; $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$

153. а) Нека је $x = 0,2(3)$. Тада је $10x = 2,(3)$, па је $10x - x = 2,1$, $x = \frac{2,1}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$;
б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{149}{30}$; г) Нека је $x = 0,(45)$. Тада је $100x = 45,(45)$, па је $99x = 45$ и $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;
д) $-\frac{2209}{990}$; ђ) $\frac{1559}{9900}$; е) $\frac{29090}{999}$; ж) $\frac{1}{7}$.

154. Претпоставимо да је $b \neq d$. Тада би било $a - c = \sqrt{2}(d - b)$, па је $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно. Дакле $b = d$. Из дате једнакости сада непосредно следи да је и $a = c$.

155. $a = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$. Пошто је $2 < \sqrt{5} < 3$, то је $3 < a < 4$.

156. а) Претпоставимо супротно, да постоји рационалан број такав да је $(\frac{p}{q})^2 = 2$ и да су p и q узајамно прости природни бројеви. Тада је $p^2 = 2q^2$, па је p^2 паран број, одакле произилази и да је p паран број, $p = 2k, k \in \mathbf{N}$. Сада из $p^2 = 2q^2$ следи $q^2 = 2k^2$, значи да је и q паран број, па p и q нису узајамно прости. г) Нека је $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in \mathbf{Q}$. Тада је $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$, па је $3 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$, тј. $2r\sqrt{2} = r^2 - 1$, односно $\sqrt{2} = \dfrac{r^2-1}{2r} \in \mathbf{Q}$, што је немогуће; ђ) $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Претпоставимо супротно, да је $3 + 2\sqrt{2} = r \in \mathbf{Q}$. Тада би било $\sqrt{2} = \dfrac{r-3}{2} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно.

157. а) $a + b$ може бити рационалан, на пример $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$ или ирационалан, на пример $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$. б) Број $a + r$ је ирационалан, јер би у противном било $a + r = r_2 \in \mathbf{Q}$, па је $a = r_2 - r \in \mathbf{Q}$. в) Ирационалан. г) Рационалан или ирационалан. д) Рационалан или ирационалан. ђ) За $r \neq 0$ ирационалан, за $r = 0$ $a \cdot 0 = 0 \in \mathbf{Q}$. е) Ирационалан. ж)Ирационалан.

158. Упутство: $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

160. а) Како је $b = 4a - a^2 - 3 + \sqrt{3}(4 - 2a)$ мора бити $4 - 2a = 0$, тј. $a = 2$. Тада је $b = 1$; б) $a = -\dfrac{11}{4}$, $b = \dfrac{3}{2}$.

161. а) $(3a + \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) = 3a^2 + 2 + 4a\sqrt{2}$. Како је $a \neq 0$, број $4a\sqrt{2}$ је ирационалан, а збир рационалног броја $3a^2 + 2$ и ирационалног је ирационалан.

162. Ограничени су скупови B и C. Једна мајоранта скупа B је $b = 1000$, а скупа C број $c = 0$.

163. $\sup M_1 = \dfrac{1}{2}$, $\sup M_4 = 1$, $\sup M_5 = \dfrac{1}{2}$, $\sup M_6 = 1$, $\sup M_7 = 0$. Скупови M_2 и M_3 нису ограничени одозго и немају супремум.

164.

$$\text{а)}\ \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}; \quad \text{б)}\ \frac{x-|x|}{2} = \begin{cases} 0, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}; \quad \text{в)}\ \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}.$$

165. а) $-1 < x < 1$; б) $-3 \leq x < -\dfrac{1}{3}$, или $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$; в) $-\infty < x \leq -2$, или $2 \leq x < +\infty$; г) $1 < x < 3$.

166. а) $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = -5 \vee x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 8$; б) $x = -\dfrac{5}{2} \vee x = \dfrac{3}{2}$; в) $x = \dfrac{1}{5} \vee x = 1$; г) $6 + 2x = 8 \vee 6 + 2x = -8 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7$; д) $-8 \leq 6 + 2x \leq 8 \Leftrightarrow -14 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 1$; ђ) $6 + 2x \geq 8 \vee 6 + 2x \leq -8 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -7$; е) $-2 \leq x \leq 8$; ж) $x < -1 \vee x > 2$; з) $1 < x < \dfrac{4}{3}$; и) $x < -\dfrac{2}{9} \vee x > \dfrac{2}{3}$; ј) $-2 \leq |x| - 1 \leq 2$, тј. $-1 \leq |x| \leq 3$, $|x| \leq 3$, $-3 \leq x \leq 3$; к) $x < -4 \vee -2 < x < 1 \vee x > 3$.

167. а) Нека је $x \geq y$. Тада је $|x - y| = x - y$, па је $\dfrac{1}{2}(|x - y| + x + y) = \dfrac{1}{2}(x - y + x + y) = x$. Слично се добија и у случају $x < y$.

168. а) 1° Ако су a и b позитивни бројеви, онда је $|a| = a$, $|b| = b$ и $|a \cdot b| = a \cdot b$. Одавде је: $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b| \Rightarrow |ab| = |a||b|$.
2° Ако су a и b негативни бројеви онда је $|a| = -a$, $|b| = -b$ и $|a \cdot b| = a \cdot b$, јер је производ негативних бројева позитиван број. Сада је: $|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.
3° Ако је $a > 0$ и $b < 0$, онда је $|a| = a$, $|b| = -b$ и $|a \cdot b| = -ab$, јер је производ позитивног и негативног броја негативан број. Сада је: $|a \cdot b| = -ab = a| - b| = |a||b|$.

4° Ако је $a < 0$, $b > 0$, онда је $|a \cdot b| = |ba| = |b||a| = |a||b|$.
5° Ако је бар један од бројева a, b једнак нули, онда је њихов производ нула, па је лева и десна страна једнака нули.

б) Применом доказа под а) имамо $|b| \cdot |\frac{1}{b}| = 1$, јер је $b \cdot \frac{1}{b} = 1$. А како је $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{|b|}$, даље је $|\frac{a}{b}| = |a \cdot \frac{1}{b}| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$.

169. а) $|2 \cdot (-7)| = |-14| = 14$; $|2| = 2, |-7| = 7$, па је $|2||-7| = 2 \cdot 7 = 14 = |2 \cdot (-7)|$; б) $|\frac{2}{-7}| = |-\frac{2}{7}| = \frac{2}{7}$; $\frac{|2|}{|-7|} = \frac{2}{7}$, па је $\frac{|2|}{|-7|} = \frac{2}{7} = |\frac{2}{-7}|$.

170. а) 2,65; б) 0,68; в) 5,36; г) 8,16; д) 29,17.

171. а) 2,7; 2,72; 2,716; 2,7158; 2,71582; б) 2,6; 2,65; 2,646; 2,6458; 2,64576.

172. 3,48; 3,481; 3,4806; 3,48056; 3,480562; 3,4805616.

173. а) $\Delta(x') = 0,01$, $\delta(x') = 0,04166$.

174. $\Delta(x') = 10$, $\Delta(y') = 10$, $\delta(x') = \frac{10}{35000} = 0,0002857$, $\delta(y') = \frac{10}{72000} = 0,0001388$.

175. Релативна грешка првог мерења је $\delta(x') = \frac{0,02}{2,34} = 0,0085$, а другог $\delta(y') = \frac{0,01}{1,23} = 0,0081$, па је друго мерење тачније.

176. а) $6,40 \pm 0,03$; б) $8,53 \pm 0,05$; в) $9,69 \pm 0,06$; г) $-9,32 \pm 0,05$; д) $-8,71 \pm 0,1$; ђ) $3,11 \pm 0,05$.

177. а) Приближна вредност је 25,23, а грешка је мања од 0,2.
б) Приближна вредност је 64,45, а грешка је мања од 0,03.
в) Приближна вредност је 2,07, а грешка је мања од 0,02.

178. Може се узети да је $c = 7,375 \pm 0,075$, па је $\Delta(x') = \Delta(a') + \Delta(b') + \Delta(c') = 0,05 + 0,1 + 0,075 < 0,5$ и како је $13,5 - 5,8 + 7,375 = 15,075$, то је $x = 15,075 \pm 0,5$.

179. $x = 7,0$, $\Delta(x') < 0,05 = \frac{1}{2} \cdot 0,1$.

180. Како је $2,3 \leq a \leq 2,5$ и $3,6 \leq b \leq 3,8$, то је $5,9 \leq a + b \leq 6,3$, а како је $O = 2(a + b)$, то је $11,8 \leq O \leq 12,6$. Приближна вредност за обим је $\frac{11,8 + 12,6}{2} = 12,2$, а граница апсолутне грешке $\frac{12,6 - 11,8}{2} = 0,4$. Слично добијамо за $P = a \cdot b : 8,28 \leq a \cdot b \leq 9,50$. Приближна вредност за површину је 8,89, а граница апсолутне грешке је 0,61.

181. Како је $5,7 \leq a \leq 5,9$ и $2,3 \leq b \leq 2,5$, то је $\frac{5,7}{2,5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{5,9}{2,3}$, тј. $2,28 < \frac{a}{b} < 2,57$. Ако је $\frac{a}{b} \approx 2,425$, онда грешка није већа од 0,145.

182. Означимо са $g(a)$ и $G(a)$ најмању, односно највећу вредност величине a. Може се формирати таблица:

	g	G
x	3,20	3,26
y	1,77	1,78
$3y$	5,31	5,34
$x + 3y$	8,51	8,60
$x - y$	1,42	1,49
$y(x - y)$	2,5134	2,6522
u	3,2086	3,4217

За приближну вредност за u природно је узети аритметичку средину бројева $g(u)$ и $G(u)$, тј. 3,3152, а $\Delta(u') = 0,1065$. Уочимо да је, на пример, $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $G(x - y) = G(x) - g(y)$ и сл.

183. Тачна вредност аргумента је $x = \sqrt{2}$, приближна $x' = 1,41$. Тачна вредност функције је $y(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3$, а приближна вредност функције $y(x') = 1,41^3$. Апсолутна грешка аргумента је $\sqrt{2} - 1,41$, а функције $\sqrt{2}^3 - 1,41^3$. Граница апсолутне грешке за аргумент је $0,0043 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, а за функцију $2\sqrt{2} - 1,41^3 = 2,828427\ldots - 2,803221 = 0,025206 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$.

184. а) Ако је p прост број различит од 3, онда је p облика $3k \pm 1$, $k \in \mathbf{N}$. Тада је $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 72k^2 \pm 48k + 9$ - број дељив са 3, па је једино могуће да је $p = 3$. Тада је $8p^2 + 1 = 73$ - такође прост број. б) $p = 3$.

186. а) Како је $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ и p прост број већи од 3, то су бројеви $p-1$ и $p+1$ два узастопна парна броја и један од њих је дељив са 4, па је призвод $(p-1)(p+1)$ дељив са 8. Од бројева $p-1, p+1$ један је дељив са 3 јер су $p-1, p, p+1$ три узастопна природна броја, а p није дељиво са 3. Дакле, производ $(p-1)(p+1)$ је дељив са 3, па и са 24. б) $p^2 - q^2 = p^2 - 1 - (q^2 - 1)$. Применити резултат а).

187. а) Број $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ је непаран, па не може бити дељив парним бројем 1994.
б) Ако је n облика 3к или $3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$, онда је $n(n+1)$ дељиво бројем 3, а број $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$ није дељив са 3, па ни са 1995. Ако је $n = 3k + 1$, онда је $n^2 + n + 2 = (3k+1)(3k+2) + 2 = 3m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, па ни тада број није дељив са 3, дакле, ни са 1995.

188. а) Од бројева $n, n+2, n+4$ тачно један је дељив са 3, па, како 2^n није дељиво са 3, то ни број a није дељив са 3, па ни са 1995, јер је 1995 дељиво са 3.

189. а) Нека је a цео број. Тада је $a = 3k$, $a = 3k+1$ или $a = 3k+2$, $k \in \mathbf{Z}$. У првом случају је $a^2 = 9k^2$, у другом $a^2 = (3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$, а у трећем $a^2 = (3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)$. Дакле, ни у једном случају a^2 не даје остатак 2 при дељењу са 3.
б) $x^2 = 20 + 3y = 3(y+6) + 2$. Ово је немогуће, на основу а).

190. Упутство - погледати решење претходног задатка.

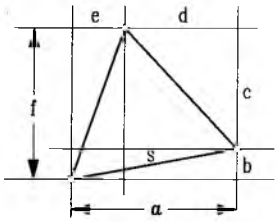
191. а) Једначина је еквивалентна једначини $2(x+y) = xy$, односно $(x-2)(y-2) = 4$. Пошто се број 4 може написати као производ целих бројева само на следеће начине: $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$, $4 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-4)$, $(-2) \cdot (-2)$ и $(-4) \cdot (-1)$ решења су: $(x,y) \in \{(3,6),(4,4),(6,3),(1,-2),(-2,1)\}$.
б) Једначина се може написати у облику $(x-3)(y+1) = 11$. Решења су: $(x,y) \in \{(14,0),(4,10),(2,-12),(-8,-2)\}$.
в) Једначина се може написати у облику $(x-5)(y-5) = 25$. Решења су: $(x,y) \in \{(30,6),(10,10),(6,30),(-20,4),(0,0),(4,-20)\}$.
г) Пошто је $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x-y)(x+3y)$, решења су $(x,y) \in \{1,0),(-1,0)\}$.

192. а) Збир два ненегативна цела броја једнак је 2 ако и само ако су ти бројеви једнаки 1 и 1 или 2 и 0. Пошто су x^2 и y^2 потпуни квадрати, долази у обзир само први случај, па су решења: $(x,y) \in \{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$.
б) Једначина се може написати у облику $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$. Решења су $(x,y) \in \{(2,0),(2,-2),(1,-1),(3,-1)\}$.
в) Једначина се може написати у облику $x^2 + (x+y)^2 + y^2 = 2$. Решења су: $(x,y) \in \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),(1,-1),(-1,1)\}$.
г) Једначина је еквивалентна једначини $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 12$. Решења су $(x,y,z) \in \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$.

193. Како је $a = \dfrac{p_2p_3\cdots p_n + p_1p_3\cdots p_n + \cdots + p_1p_2\cdots p_{n-1}}{p_1p_2\cdots p_n}$ види се да број a није цео, јер бројилац броја a није дељив са p_1 (први сабирак у том бројиоцу није дељив са p_1, а сви остали јесу).

194. а) Нека је $a, b \in \mathbf{Q}, a < b$. Тада је $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ и $\dfrac{a+b}{2} \in \mathbf{Q}$.

б) Претпоставимо да је $a, b \in \mathbf{Q}$ и $a < b$ и да између a и b постоји само коначан број рационалних бројева: $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$. То је немогуће, јер на основу а) између рационалних бројева a и a_1 мора постојати рационалан број итд.



Сл. уз зад. 194

195. Претпоставимо да такав троугао постоји (в. сл.). Тада су a, b, c, d, e и f цели бројеви. Површина троугла је $af - \dfrac{ab + cd + ef}{2} = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Међутим за страницу s троугла важи $s^2 = a^2 + b^2$, па је $\sqrt{3} = \dfrac{2(2af - ab - cd - ef)}{2(a^2 + b^2)} \in \mathbf{Q}$, што је немогуће.

196. Ако заменимо број $1 + \sqrt{3}$ у једначини добијамо $(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$ па мора бити $4a + b + 42 = 0$ и $2a + b + 18 = 0$, јер је $\sqrt{3}$ ирационалан број. Из овог система једначина налазимо да мора бити $a = -12, b = 6$.

197. а) Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{19} = r \in \mathbf{Q}$. Тада је $\sqrt{2} + \sqrt{17} = r + \sqrt{19}$. После квадрирања добијамо $2\sqrt{34} = r^2 + 2r\sqrt{19}$, одакле, после још једног квадрирања, имамо $\sqrt{19} = \dfrac{136 - r^4 - 76r^2}{4r^3} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно јер је $\sqrt{19}$ ирационалан број.

198. $a = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} + \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100 - 99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9.$

199. Дата једначина еквивалентна је једначини $4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$, па се непосредно закључује да је $(x, y) = (1, -1)$ њено једино решење.

Глава III – Пропорционалност

200. 1° $a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{a} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{d}{a} \Leftrightarrow a : c = b : d;$

У свакој пропорцији могу мењати места:

а) унутрашњи чланови,
б) спољашњи чланови,
в) спољашњи и унутрашњи,
г) спољашњи са унутрашњим и унутрашњи са спољашњим.

3° $a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{k}{k} \Leftrightarrow ak : bk = c : d;$

5° $(a + b) : (c + d) = a : c \Leftrightarrow (a + b) : a = (c + d) : c$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c} \Leftrightarrow b : a = d : c \Leftrightarrow a : b = c : d.$$

201. 1° Следи из 5° и 6° из претходног задатка.

2° Из $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ следи $a = kb$ и $c = kd$; Множењем прве од тих релација са x, а друге са y и сабирањем добијамо $ax + cy = k(bx + dy)$, тј.

$$\frac{ax + cy}{bx + dy} = k = \frac{a}{b}.$$

202. а) $x = 6$; б) $x = \frac{7}{4}$; в) $x = \frac{5}{2}$;

203. а) Применом релације $(a + b) : (c + d) = a : c$ имамо $(x + y) : (2 + 3) = x : 2$. Како је $x + y = 10$, то је $10 : 5 = 2 \Rightarrow x = 4, y = 6$;
б) $x = 15, y = 9$; в) $x = \frac{2a(a+b)}{2a+b}, y = \frac{b(a+b)}{2a+b}$; г) $x = 21, y = 20$.

204. а) Дате релације се могу довести на облик

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{12}, \quad \frac{b}{c} = \frac{12}{10}, \quad \frac{c}{d} = \frac{10}{15},$$

па је $a : b : c : d = 9 : 12 : 10 : 15$. б) $12 : 18 : 21 : 77$; в) $18 : 24 : 20 : 21$; г) $32 : 132 : 210 : 119$.

205. а) Релација $(a - x) : (x - b) = a : b$ еквивалентна је са

$$x = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \text{ односно } \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

б) Ако је y геометријска средина аритметичке средине $A = \frac{a+b}{2}$ и хармонијске средине $H = \frac{2ab}{a+b}$ бројева a и b, онда је $y^2 = A \cdot H = ab$, тј. y је геометријска средина бројева a и b.

206. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4 = k$. Како је: $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$, $a_4 = kb_4$ сабирањем добијамо $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = k(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$ одакле је $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) : (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = k = a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4$.

207. а) Из $1 : 250000 = 2 : x$ добијемо да је $x = 500000cm = 5km$.
б) Из $2 : 80000 = x : 250000$ имамо да је $x = 6,25cm$.

208. У овом задатку величине - број боца и њихова запремина су обрнуто пропорционалне, па је смер стрелица у табели супротан:

100 boca ↑	0.75l ↓
x boca	0.8l

Добијамо пропорцију $x : 160 = 0,75 : 0,8$, одакле је $x = 150$ боца.

209. У овом задатку ради се о директно сразмерним величинама. Шему за решавање правимо у следећем облику:

10kg ↑	18m ↑
35kg	x

Редослед чланова пропорције одређен је смером стрелица: $x : 18 = 35 : 10$, тј. $x = \frac{18 \cdot 35}{10}$, па је $x = 63m$.

210. Посматрајмо таблицу:

↓ x	↑ 4 traktora	↑ 35 dana	↓ 3640 ha
↓ 14h	3 traktora	25 dana	↓ 1820 ha

$14h$	3 трактора	25 дана	$1820ha$

(Смерови стрелица се одређују увек у поређењу са траженом величином. Стрелицама у истом смеру означавају се директно, а у супротном смеру - обрнуто пропорционалне величине.) Резултат се добија из пропорције $x : 14 = (3 \cdot 25 \cdot 3640) : (4 \cdot 35 \cdot 1820)$, одакле је $x = 15h$.

211. Посматрајмо таблицу:

↓ x	↑ 16 radnika	↑ 15 dana	↓ 3600 t
↓ 7h	↑ 24 radnika	↑ 12 dana	↓ 3780 t

Одавде је $x : 7 = (24 \cdot 12 \cdot 3600) : (16 \cdot 15 \cdot 3780)$, па је $x = 8h$.

212. Из таблице:

↑ 6m	↓ 20cm	↓ 13cm	↑ 260dinara
↑ x	↓ 21cm	↓ 16cm	↑ 280dinara

добијамо $x : 6 = (20 \cdot 13 \cdot 280) : (260 \cdot 21 \cdot 16)$, одакле је $x = 5m$.

213. 15.600 кифли. **214.** Двадесет мишева. **215.** Четири.

216. Преосталих 24 радника ће за x дана завршити посао, који би 33 радника радила $80 - 16 = 64$ дана. Дакле, имамо таблицу

↑ 33−9	↓ x
↑ 33	↓ 80−16

Из $x : 64 = 33 : 24$ је $x = 88$ дана. Значи да ће посао бити завршен за $16 + 88 = 104$ дана.

217. Посматрајмо таблицу

↓ 4 traktora	↑ (36−12)h
↓ (4−1) traktora	↑ x

Биће $x : (36 - 12) = 4 : (4 - 1)$, тј. $3x = 4 \cdot 24$, па је $x = 32h$.

218. $17\frac{1}{2}h$. **219.** 30 дана. **220.** $x = 56kg$. **221.** $x = 9$ дана.

222. Једна плочица димензије $15cm \times 15cm$ има површину $225cm^2$, а плочица димензије $10cm \times 20cm$ има површину $200cm^2$. Према томе ово је обрнута пропорционалност, па је $x : 600 = 225 : 200$, одакле је $x = 675$ плочица.

223. $x = 10l$. **224.** $x = 3$ дана. **225.** 192 зидара.

226. 8 минута и 20 секунди. **227.** $50kg$.

228. 30 радника. **229.** Потребно је још 10 радника.

231. а) $x = \frac{60}{7+3} \cdot 7 = 42$, $y = \frac{60}{7+3} \cdot 3 = 18$; б) $x = 38, y = 57$; в) $x = \frac{35}{2+5} \cdot 5 = 25$, $y = \frac{35}{2+5} \cdot 2 = 10$.

232. *Први начин.*

$$x = \frac{3840}{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{7} = 2048, \qquad y = \frac{3840}{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{8} = 1792.$$

Други начин.

$$x = \frac{3840}{7+8} \cdot 8 = 2048, \qquad y = \frac{3840}{7+8} \cdot 7 = 1792.$$

233. а) $x = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 7 = 42$, $y = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 4 = 24$, $z = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 1 = 6$;
б) $x = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot \dfrac{5}{6} = 20$, $y = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot \dfrac{3}{4} = 18$, $z = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot 2 = 48$.

234. $x = 1887,50$ дин, $y = 1510$ дин, $z = 1132,50$ дин.

235. Детерџент= $\dfrac{900}{32+23+45} \cdot 32 = 288$ динара; шећер= 207 динара; брашно= 405 динара.

236. Први радник= $\dfrac{21452}{12000+11500+10500+9000} \cdot 12000 = 5986,60$ динара, други радник= $5737,16$ динара, трећи радник= $5238,28$ динара, четврти радник= $4489,95$ динара.

237. Ученици редом добијају 600, 800, 1000 и 1200 динара.

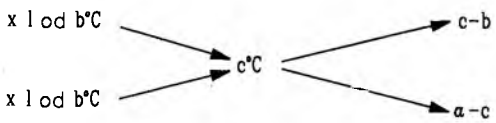
238. Добиће, редом, 6.400, 9.600, 12.000 и 14.000 динара.

239. A – 234 динара, B – 104 динара, C – 585 динара, D – 312 динара.

240. Погони су добили редом: 30600, 30000, 36000 и 39600 килограма воћа.

241. 1950, 1500, 2160, 2400 и 1500.

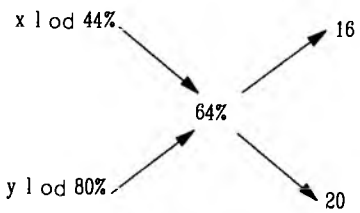
242. Посматрајмо општији задатак - треба помешати воду температуре $a°C$ и воду температуре $b°C$ да би се добила вода температуре $c°C$ $(b < c < a)$. Треба узети x литара прве и y литара друге воде - добићемо $x + y$ мешавине. Дакле, важи $ax + by = c(x + y)$. Одавде је $(a - c)x = (c - b)y$, тј. $x : y = (c - b) : (a - c)$. Ово се може приказати и помоћу шеме



$x : y = (c - b) : (a - c)$

При овоме, стрелице указују на величине које се одузимају. У конкретном примеру је $x : y = 5 : 10 = 1 : 2$. Значи, треба помешати један део воде температуре $40°C$ и два дела воде температуре $25°C$.

243. Користимо се шемом као упретходном задатку:



Дакле $x : y = 16 : 20 = 4 : 5$. Значи, треба узети 4 дела прве и 5 делова друге киселине. Нека је $x = 4t, y = 5t$. Из $x + y = 9t = 18l$ следи $t = 2l$, па је $x = 8l$ и $y = 10l$.

244. $3 : 2$.

245. $20l$ и $30l$.

246. $3l$ 40-проц. и $4,5l$ 65-проц. раствора.

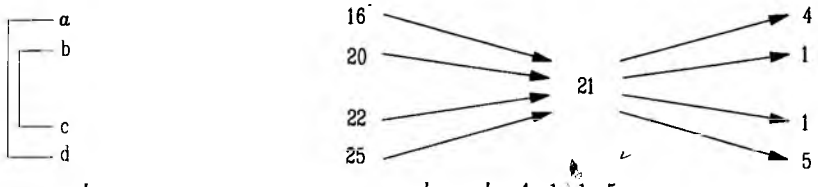
247. $6\frac{3}{5}l$ воде.

248. а) $1 : 2$; б) $20gr$ и $40gr$.

249. $1200kg$ и $400kg$.

250. $136l$ и $85l$.

251. Решење није јединствено - могу се мешати кафе од 16 и 25, а затим 20 и 22 динара или од 16 и 22, па затим од 20 и 25 динара. У првом случају добијамо:



Дакле, кафе се могу мешати у односу $a : b : c : d = 4 : 1 : 1 : 5$.

252. Једно решење је: $6kg, 2kg, 4kg$ и $6kg$. **253.** Једно решење је: $9,1g; 2,1g; 1,4g; 8,4g$.

254. $9 : 35$. **255.** $92l$ воде. **256.** $36l$.

257. $G = 12000, p = 7\%$, $P = \dfrac{12000 \cdot 7}{100} = 840$ динара.

258. $P = \dfrac{16850 \cdot 4,5}{100} = 758,25$ динара. **259.** $P = 160, p = 2,5\%$, $G = \dfrac{160 \cdot 100}{2,5} = 6400kg$.

260. $G = 7500000, P = 450000$, $p = \dfrac{450000 \cdot 100}{7500000} = 6\%$.

261. Алкохола има $83 - 67 = 16l$. У процентима то је $p = \dfrac{16 \cdot 100}{83} = 19.28\%$.

262. План промета је $G = \dfrac{425000 \cdot 100}{8,5} = 5000000$ динара, а како је месечни промет 5750000 динара, онда премашење износи 750000 динара што је у процентима $p = \dfrac{750000 \cdot 100}{5000000} = 15\%$.

263. Нека је првобитна цена прве књиге a, а друге b динара. После повећања цена прве књига је $a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$, а после снижења је $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}a$. Цена друге књиге после снижења је $b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$, а после повећања је $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b$. Из $\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b = 6$, тј. $\frac{3}{4}(a - b) = 6$ следи да је $a - b = 8$ динара.

264. Нова цена је за 1% нижа од старе. **265.** 61,44 динара.

266. За 100%. **267.** Површина се смањи за 1%.

268. Из $v_1t_1 = v_2t_2$ и $v_2 = \frac{5}{4}v_1$ налазимо да је $t_1 = \frac{5}{4}t_2$, тј. $t_2 = \frac{4}{5}t_1 = 80\%t_1$. Значи да се време путовања смањује за 20%.

269. За 25%.

270. Како свеже печурке садрже 10% суве материје, то се у $22kg$ налази $2,2kg$ суве материје, што представља 88% масе сувих печурки. Из пропорције $2,2 : x = 88 : 100$ налазимо да се из $22kg$ свежих печурки добија $x = 2,5kg$ сувих.

271. Означимо са a цену производа. Тада је $a + \frac{x}{100}a - \frac{y}{100}(a + \frac{x}{100}a) = a$. Одавде, после скраћивања са a налазимо $y = \dfrac{100x}{x + 100}$.

272. Број садница се налази из пропорције $x : 120 = 1000 : 75$ и износи $x = 1600$.

273. Провизија је рачуната од 60000 динара и износи 300 динара.

274. $350000kg$.

275. $K = 15000$, $t = 3$ год, $p = 5\%$, $I = \dfrac{15000 \cdot 3 \cdot 5}{100} = 2250$динара.

276. $K = 42800$ дин, $t = 8$ месеци, $p = 4\%$, $I = \dfrac{42800 \cdot 4 \cdot 8}{1200} = 1141,33$дин.

277. $I = 3505,50$ динара.

278. $K = 100260$, $t = 60$ дана, $p = 4\%$, $I = \dfrac{100260 \cdot 4 \cdot 60}{36500} = 659,24$динара.

279. $I = 10260$ дин, $t = 5$ година, $p = 6\%$, $K = \dfrac{100 \cdot 10260}{5 \cdot 6} = 34200$динара.

280. $K = \dfrac{1200 \cdot 340,65}{6 \cdot 4,5} = 15140$дин.

281. $K = \dfrac{36500 \cdot 17710}{5,5 \cdot 92} = 1277500$динара.

282. Имамо да је $k_5 = 200(1 + \dfrac{20}{100})^5 = 200 \cdot 2,48832 = 497,664$ динара. Слично се добија $k_{10} = 1238,34$ и $k_{15} = 3081,40$ динара.

283. а) $k_3 = 6000 \cdot (1 + \dfrac{5}{100})^3 = 6945,75$; б) 7986; в) 9125,25 динара.

284. 537 динара.

285. Имамо $k_4 = 1000(1 + \dfrac{3}{1200})^4 = 1010$, $k_6 = 1015$, $k_8 = 1020,17$ динара.

286. 48000 динара.

Глава IV – Увод у геометрију

287. а) Треба доказати да постоји раван α таква да су јој a и $\{A\}$ подскупови, а затим да је таква раван јединствена.
(1) На основу аксиоме 1, на правој a постоје две различите тачке B и C. Тачке A, B, C су три неколинеарне тачке и оне по аксиоми 3 одређују раван α. Пошто тачке B и C праве a припадају равни α, то по аксиоми 5 $a \subset \alpha$. Како је и $\{A\} \subset \alpha$, постојање равни чији су a и $\{A\}$ подскупови је доказано.
(2) Претпоставимо да раван α није јединствена. Тада би постојала раван β таква да $a \subset B$ и $\{A\} \subset B$, па би по аксиоми 3 морало бити $\alpha = \beta$.
б) Нека се праве a и b секу у тачки S. На правој a, постоји по аксиоми 1 и тачка $A \neq S$. Сада посматрамо праву b и тачку A и резонујемо као у делу задатка а).

288. Претпоставимо супротно да a и b имају две различите заједничке тачке A и B. Међутим, онда би, по аксиоми 1, било $a = b$, што је супротно услову задатка.

289. Претпоставимо супротно да је $a \cap b = \{S\}$. Тада би било $S \in a \subset \alpha$ и $S \in b \subset \beta$, па би било $S \in \alpha$ и $S \in \beta$, што би значило, по аксиоми 6, да различите равни α и β имају заједничку праву, односно да нису паралелне.

290. Претпоставимо да права p има са равни α две заједничке тачке A и B. Тада по аксиоми 5 права p припада равни α, па и $P \in \alpha$, што је супротно претпоставци задатка.

291. Упутство: Доказати да све ове праве припадају равни одређеној тачком A и правом p.

292. Упутство: Доказати да ако је $\alpha \cap \beta = p$, тада p и γ могу имати највише једну заједничку тачку.

293. Пошто се праве m и n секу, оне одређују једну раван. Сада још треба доказати, применом аксиоме 5, да праве a и b припадају тој равни.

294. Ако је $\alpha = \beta$, тада $a \subset \beta$, па је $a \| \beta$. Ако је $\alpha \cap \beta = \emptyset$, тада због $a \subset \alpha$, важи да је $a \cap \beta = \emptyset$, па је $a \| \beta$.

295. Упутство: Анализирати случајеве: а) $a = b$ и $a \neq b$; б) $\alpha = \beta$, $\alpha \cap \beta = \emptyset$ и $\alpha \cap \beta = p$; б) $\alpha = \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

296. Упутство: претпоставимо супротно да праве A_1B_1 и A_2B_2 припадају истој равни.

297. Упутство: на свакој од ових правих изабрати по једну тачку, тако да те три тачке не буду колинеарне, итд ...

298. а) $\frac{6\cdot 5}{2}=15$; б) $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}=10$. *Напомена.* У задатку се ради о комбинацијама без понављања: а) $C_6^2=\binom{6}{2}=15$; б) $C_5^3=\binom{5}{3}=10$. На сличан начин могу се решавати и задаци 299 – 303, као и 316 – 319.

299. Три неколинеарне тачке одређују три праве, а три колинеарне - само једну. Дакле, тачкама датог скупа одређено је укупно $\frac{7\cdot 6}{2}-6\cdot 2=9$ правих.

300. $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}-6\cdot 3=102$. **301.** $\frac{7\cdot 6}{2}=21$.

302. Из $\frac{n(n-1)}{2}=3n$ налазимо $n=7$.

303. Из $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}=12\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ добијамо $n=38$.

304. По дефиницији паралелности правих следи да праве a и b припадају некој равни α. Докажимо сада да је та раван јединствена. По аксиоми 1 из 4.1. на правој a постоје две различите тачке A и B и на правој b постоји тачка M. Тачке A, B и M су неколинеарне па (по аксиоми 3 из 4.1.) одређују једну раван β. Раван β садржи праву a (по аксиоми 5 из 4.1.) и праву b по аксиоми паралелности па је β одређена правим a и b. Међутим β садржи и тачке A, B и M, па је $\beta=\alpha$.

305. Претпоставимо супротно, да c не сече b. Пошто су то праве једне равни, значи да је $c\|b$. Нека је $c\cap a=\{M\}$. Сада постоје две праве a и c које садрже тачку M и обе су паралелне правој b. Ово је супротно аксиоми паралелности. Дакле, мора права c сећи и праву b.

306. Видети претходни задатак.

307. а) Ако би било $c\|a$ и $c\|b$, због транзитивности релације $\|$ морало би да буде и $a\|b$. б) Не. в) Не.

308. а) 7; б) 8. **309.** $\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

310. Пет равни је одређено једном од правих p, q и једном од тачака са друге равни. Две равни одређују ове праве са тачком F, а шест равни одређује тачка F са по једном тачком правих p и q. Дакле, укупно је одређено 13 равни.

311. Нека је $A\in a$, $A\in c$ и $c\|b$. Праве a и c одређују раван α. Због $c\|b$ биће и $b\|\alpha$.

312. Претпоставимо најпре да се праве a и b секу у некој тачки M. Тада $M\in a$, $a\subset\alpha$, па и $M\in\alpha$. Сада две различите тачке B и M праве b припадају равни α, па следи да и $b\subset\alpha$, што је немогуће. Немогуће је и да буде $b\|a$, јер кроз тачку B постоји само једна права паралелна правој a и та је у равни α. Дакле, морају праве a и b бити мимоилазне.

313. Упутство – претпоставити супротно да је $b\|\pi$.

315. Ако је $\alpha=\beta$, онда је и $a=b$, дакле $a\|b$. Ако је $\alpha\neq\beta$, онда је $a\cap b=\emptyset$, а како a и b припадају равни γ, то је $a\|b$.

316. Ако је $a\subset\alpha$, тада је $\pi=\alpha$. Ако је $a\cap\alpha=\emptyset$ тада можемо одредити праву b равни α и тачку A праве a, а затим праву p такву да је $p\|b$ и $A\in p$. Раван одређена правом a и правом p биће тражена раван π.

317. Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да се равни α и β секу по некој правој r. Пошто се праве p и q секу, на основу аксиоме паралелности бар једна од њих мора сећи праву r, што значи да бар једна од њих продире раван α, што противречи претпоставци да је $p\|\alpha$ и $q\|\alpha$. Дакле, равни α и β су паралелне.

318. Разматримо два случаја.
(1) Једна од датих равни сече друге две - на пример $\alpha\cap\beta=c$, $\alpha\cap\gamma=b$. Ако је $b\|c$, тада је права c паралелна са сваком од равни α,β,γ. Ако је $c\cap b=\{A\}$, тада је $\alpha\cap\beta\cap\gamma=\{A\}$.
(2) Свака од датих равни је паралелна са неком од преостале две. У овом случају су све три равни паралелне, па је свака права једне од њих паралелна свим трима равнима.

319. а) $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} + 1$; б) $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2} + 1$.

320. Тачке A, B и C припадају правој $p = \alpha \cap \beta$.

321. Само симетричност.

322. Нека су α и β равни одређене тачком A и правом p, односно q. Пошто $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, то се равни α и β секу по некој правој s. Нека је r права која садржи тачку A и не припада ни равни α ни равни β. Права r је мимоилазна са p, јер би, због $A \in r$ и $A \in \alpha$, ако би p и r биле у истој равни тада би било и $r \subset \alpha$. На исти начин се доказује да су праве r и q мимоилазне.

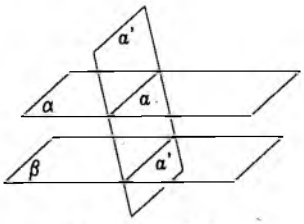
323. Нека је A тачка таква да $A \notin a$ и $A \notin b$ и ниједна од равни одређених тачком A и правом a, односно b није паралелна оној другој правој. Тада постоје праве a' и b' такве да $A \in a'$, $A \in b'$, $a' \| a$ и $b' \| b$. Праве a' и b' се секу, па одређују раван α. Тада је $a \| \alpha$ јер је $a \| a'$ и $a' \subset \alpha$. Исто тако и $b \| \alpha$.

324. У равнима α и β постоје праве a, односно b, такве да је $c \| a$ и $c \| b$. Због транзитивности релације паралелности правих биће и $a \| b$. Сада је $a \| \beta$, па мора бити $a \cap p = \emptyset$. Међутим, праве a и p припадају равни α и оне, дакле, морају бити паралелне. Пошто је $c \| a$ и $a \| p$, то је и $c \| p$.

325. Упутство: Нека је $A \in a$ и $A \in b_1$ тако да је $b_1 \| b$, $B \in b$, $B \in a_1$ и $a_1 \| a$. Нека је α раван одређена правим a и b_1, а β раван одређена правим b и a_1.

326. Праве a и b не могу бити паралелне, јер би тада и због $a \subset \pi$, било $b \| \pi$. Претпоставимо сада да се праве a и b секу у некој тачки M. Тада је $M \neq B$, а како $M \in a$, то и $M \in \pi$, па би (по аксиоми 5 из 4.1.) и права b припадала равни π, што је у супротности са претпоставком задатка. Дакле, праве a и b морају бити мимоилазне.

327. Ако је $a \subset \beta$, тада постоје две могућности:



Сл. уз зад. 327

(1) $\alpha \cap \beta = a$, (2) $\alpha = \beta$.

У првом од тих случајева $(\alpha \cap \beta) \| a$, а у другом је $\alpha \| \beta$. Ако је $a \cap \beta = \emptyset$, онда је или $\alpha \cap \beta = \emptyset$, па је $\alpha \| \beta$, или је $\alpha \cap \beta = a'$, (в. сл.). У овом другом случају све заједничке тачке равни α и β припадају правој a', па пошто је $a \cap \beta = \emptyset$, то се праве a и a' не секу. Обе праве a и a' припадају једној равни α, па је $a \| a'$.

328. Нека је α раван одређена правом a и тачком C, а β раван одређена правом b и тачком C. Тада се равни α и β секу - нека је $\alpha \cap \beta = p$. Ако је $p \| a$ или $p \| b$ тада не постоји ниједна оваква права, а ако p сече и a и b тада је то једина оваква права.

329. Нека је $\gamma \cap \alpha = a$ и $\gamma \cap \beta = \emptyset$. Тада постоје две равни α и γ обе паралелне равни β и такве да садрже праву a. Доказаћемо да је ово немогуће. Нека је $A \in a$, $b \in \beta$, и нека није $b \| a$. Пошто $A \notin b$ то b и A одређују раван π. Раван π сече равни α и γ редом по правим p и q. Обе те праве су паралелне правој b, а различите, што је немогуће по аксиоми паралелности.

330. Упутство. Посматрати неку раван π која садржи дату праву.

331. Нека је S_1 заједничка тачка дужи a_2 и a_3, S_2 заједничка тачка дужи a_3 и a_1 и S_3 заједничка тачка дужи a_1 и a_2. Тачке S_1, S_2, S_3 припадају једној правој. Ако су бар две од њих истоветне, то је заједничка тачка све три дужи. У противном, мора једна од ове

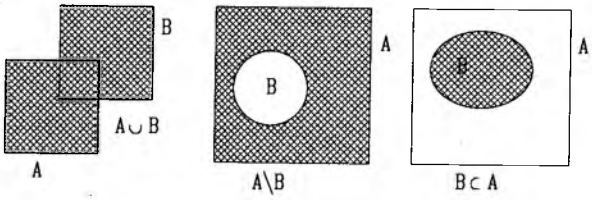
три тачке бити између остале две - на пример: $S_1 - S_2 - S_3$. Како $S_1 \in a_2$ и $S_3 \in a_2$, тада и $S_2 \in a_2$, па тачка S_2 припада свакој од дужи a_1, a_2, a_3.

332. а) 0; б) 1; в) 2.

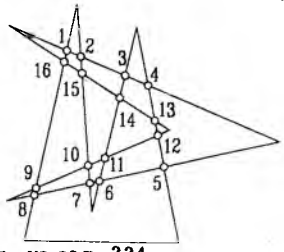
333. а) Нека тачке M и N припадају $A \cap B$. Тада $M, N \in A$ и $M, N \in B$, па како су скупови A и B конвексни и све тачке C такве да је $A - C - B$ припадају скуповима A и B, па и њиховом пресеку. Дакле, $A \cap B$ је конвексан скуп.

б), в), г) Скупови $A \cup B$ и $A \setminus B$, а ни подскуп конвексног скупа не морају бити конвексни, што се види из примера на слици.

д) Нека се скуп A састоји само из једне тачке. Тада је импликација $M, N \in A \Rightarrow (\forall C)(M - C - N \Rightarrow C \in A)$ тачна, јер је за $M \neq N$ исказ $M, N \in A$ нетачан. Дакле, A је конвексан скуп.



Сл. уз зад. 333

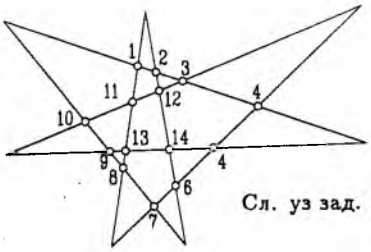


Сл. уз зад. 334

334. Ниједна права не може сећи странице многоугла у непарном броју тачака (у супротном - при кретању по правој у одређеном смеру, ушавши последњи пут унутар многоугла, не бисмо могли напустити његову унутрашњост). Због овога свака страница четвороугла може имати највише четири тачке пресека са контуром петоугла. Одавде следи да укупан број пресечних тачака не може бити већи од $4 \cdot 4 = 16$. Да може бити 16, види се на слици.

335. а) $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5 - 3) = 5$;

б) На сваком делу не може бити више од четири самопресека, јер дуж не може сећи себе и две суседне дужи. Максималан број самопресека је $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7 - 3) = 14$. Пример да се овај број може достићи је седмостранична "звезда", (в. сл.).



Сл. уз зад. 335

Глава V – Геометрија

336. а) Шест дужи: AB, BC, CD, AC, BD, AD. б) Сваку од три последње дужи можемо написати као збир, а сваку од првих пет дужи у облику разлике неке две дужи из овог скупа. в) $BC = AD - (AB + CD), BC = AD - AB - CD$.

337. $8cm$ и $24cm$. **338.** $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$. **339.** $9cm$.

340. Растојање средишта је у овом случају једнака $\frac{2}{3}$ дужине сваке од ових дужи, па је та дужина $30cm$.

342. а) не; б) да; в) да; г) не. У случају б) постоји бесконачно много таквих парова, а у случају в) само један пар.

343. Како је $\alpha+\beta=90°$, $\alpha+\gamma=180°$, $\beta+\delta=180°$, биће (из друге и треће једнакости) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$, па је $\gamma+\delta=270°$.

344. α је туп, а β оштар угао, па је $\alpha>\beta$.

345. 135° и 45°.

346. $\frac{3R}{2}, \frac{R}{2}$ и $\frac{3R}{2}$, где је R-прав угао.

347. Четири од преосталих углова су $\frac{7}{5}R$, а три $\frac{3}{5}R$.

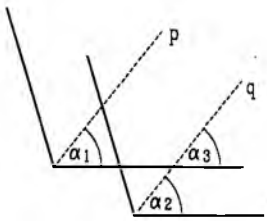
348. а) опружен угао; б) угао од 0°.

349. Како је $\alpha+\beta=180°$, то је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90°$.

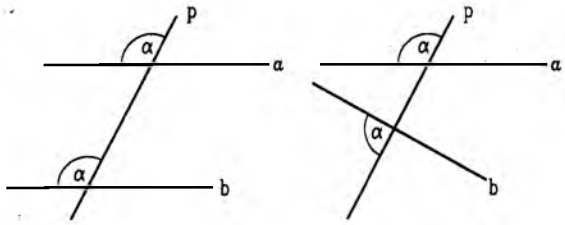
350. а) $\frac{6}{5}R$ и $\frac{4}{5}R$; б) $\frac{6}{13}R$ и $\frac{20}{13}R$; в) $\frac{6}{5}R$ и $\frac{4}{5}R$.

351. $R+\frac{2}{5}R+R-\frac{1}{3}R=\frac{31}{15}R$.

352. У свим случајевима праве су паралелне, ако и само ако су поменути углови одговарајући (напр. сагласни), односно нису паралелне у супртном случају (в. сл.).



Сл. уз зад. 352



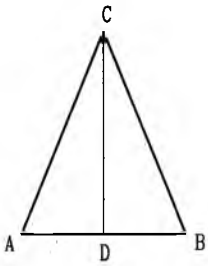
Сл. уз зад. 354

354. Углови α_1 и α_2 су једнаки као половине једнаких углова (в. сл.), углови α_2 и α_3 су једнаки (сагласни трансверзални углови), па су и углови α_1 и α_3 једнаки, одакле следи да су праве p и q - симетрале датих углова паралелне.

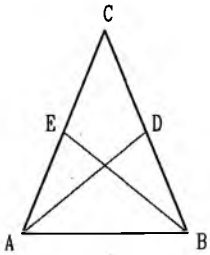
355. а) $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (в. сл.) па је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB$, а како су они суплементи, оба су права, па је $CD \perp AB$. Из $AD = DB$ следи да је CD - тежишна дуж.

б) Искористити подударност троуглова ACD и BCD, као код а).

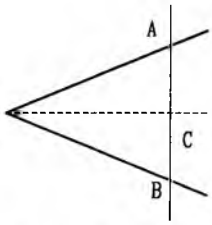
в) Нека су AD и BC симетрале углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ (в. сл.). Биће $\triangle ABD \cong \triangle ABE$ јер је AB заједничка страница, $\sphericalangle B = \sphericalangle A$ и $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EBA$. Дакле $AD = BE$.



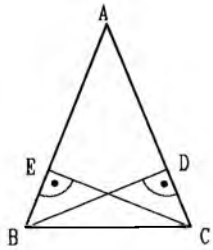
Сл. уз зад. 355а



Сл. уз зад. 355в



Сл. уз зад. 357



Сл. уз зад. 358в

356. Применити резултате претходног задатка.

357. Из подударности троуглова ACO и BCO (в. сл.) следи да је $AO = OB$.

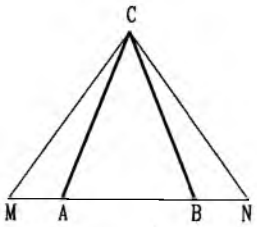
358. в) Подударни су троуглови ABD и ACE (в. сл.), па је $AB = AC$.

359. Троуглови MAC и NBC (в. сл.) су подударни, па је $MC = CN$.

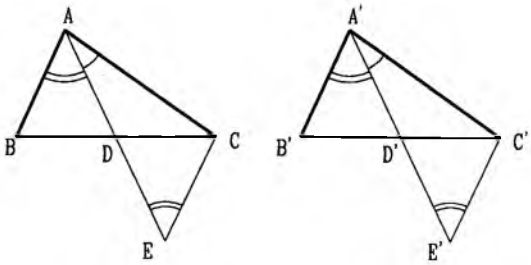
360. Нека је D тачка дужи AB таква да је $ED \| AC$. Тада је троугао BED једнакокраки, па је $ED = EB = AF$. Сада добијамо $\triangle AFM \cong \triangle MDE$, при чему је M пресечна тачка дужи AB и EF.

361. Троугао ABM је једнакокраки, па је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BAM$. С друге стране $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMN$ (трансверзални углови).

362. в) Троуглови BCC_2 и $B'C'C_2'$ су подударни, па је $\sphericalangle CBC_2 = \sphericalangle C'B'C_2'$ и према томе $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Исто тако, троуглови BB_2C и $B'B_2'C'$ су подударни, одакле је $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.
г) Ако су D и D' тачке симетричне тачкама A и A' у односу на A_1, односно A_1', биће $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$, па је $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1'A'C'$. Сада је $\triangle AA_1C \cong \triangle A'A_1'C'$, па је $A_1C = A_1'C'$ и, према томе, $BC = B'C'$.



Сл. уз зад. 359



Сл. уз зад. 363д

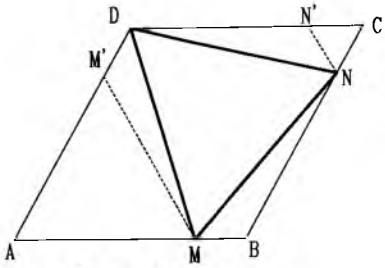
363. Троуглови у примерима а), б) и д) су подударни, а у примерима в) и г) не морају бити подударни. д) Нека је $AD = A'D'$ тежишна дуж и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C'A'D'$ код троуглова ABC и $A'B'C'$. Нека су, даље, E и E' тачке симетричне са A, односно са A, односно A', у односу на D, тј. D'. Биће $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ и $\triangle A'B'D' \cong \triangle E'C'D'$, па је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DEC$ и $\sphericalangle B'A'D' = \sphericalangle D'E'C'$. Одавде је $\triangle AEC \cong \triangle A'E'C'$, па је $AC = A'C'$ и $CE = C'E'$, а како је $CE = AB$ и $C'E' = A'B'$, биће и $AB = A'B'$.

364. Троуглови BCD и $B'C'D'$ су подударни, па је $DB = D'B'$, а одатле $AB - DB = A'B - D'B'$, тј. $AD = A'D'$.

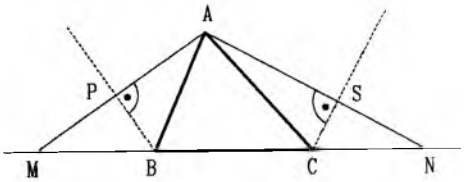
366. Нека су N' и M' тачке на CD и DA такве да су троуглови NCN' и AMM' једнакостранични. Како је (в. сл.) $MB + BN = BC = DA$, то је $MB = NN' = DM'$, одакле следи да су троуглови MDM', NMB и DNN' подударни, па је $DM = MN = ND$.

367. Троуглови ASC и NSC су подударни, па је $AC = CN$ (в. сл.). На исти начин $AB = BM$.

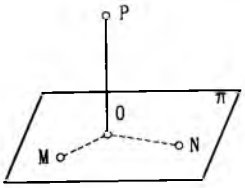
368. а) Не. б) Не. в) Раван.



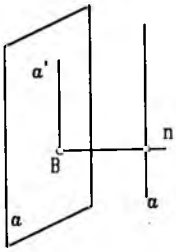
Сл. уз зад. 366



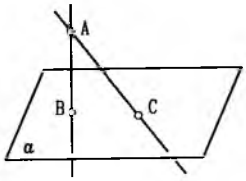
Сл. уз зад. 367



Сл. уз зад. 369



Сл. уз зад. 373

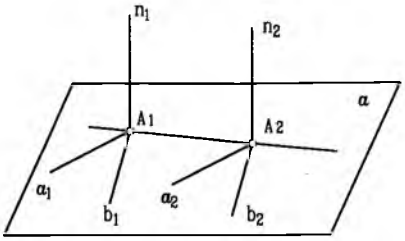


Сл. уз зад. 374

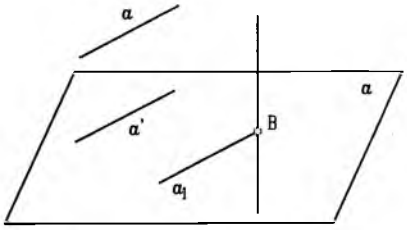
369. Нека је O пројекција тачке P у равни π и M и N две тачке поменутог скупа (в. сл.) Због $\triangle OMP \cong \triangle ONP$, биће $OM = ON$, па је тражени скуп - круг са средиштем у тачки O.

370. Нека су $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ три тачке такве да је $OA = OB = OC$ и $P \neq O$ тачка полуправе Op. Из подударности троуглова AOP, BOP и COP следи $PA = PB = PC$, па по претходном задатку тачке A, B, C припадају кругу са средиштем у подножју нормале из P на α. Међутим, круг има само једно средиште - O, па је $PO \perp \alpha$.

371. Нека су A_1 и A_2 продорне тачке правих n_1 и n_2 у α и a_1, b_1, a_2, $b_2 \subset \alpha$ тако да $A_1 \in a_1, b_1$ и $A_2 \in a_2, b_2$ и $a_1 || a_2, b_1 || b_2$ (в. сл.). Тада је $a_1 \perp n_1, b_1 \perp n_1$, па је и $\sphericalangle(a_2, n_2) = \sphericalangle(b_2, n_2) = \sphericalangle(a_1, n_1) = \sphericalangle(a_2, n_2)$, дакле $n_2 \perp a_2$ и $n_2 \perp b_2$, тј. $n_2 \perp \alpha$.



Сл. уз зад. 371



Сл. уз зад. 372

372. Нека је $b \cap \alpha = \{B\}$ (в. сл.), $a' || a$, $a' \subset \alpha$, $a_1 \subset a'$, $a_1 || a'$, $B \in a_1$. Из $a || a_1$, $b \perp a_1$ следи да је $b \perp a$.

373. Нека је $n \cap \alpha = \{A\}$ (в. сл.). Тачка A и права a одређују раван β, која сече α по правој $a'(A \in a')$. Праве a' и a су паралелне јер припадају истој равни β, а ако би се секле из те пресечне тачке би постајале две нормале на n што је немогуће. Из $a || a'$ следи $a || \alpha$.

374. Нека је $AB \perp \alpha$ и $C \in \alpha$, $C \neq B$ (в. сл.). Тада је у правоуглом $\triangle ABC$ хипотенуза AC дужа од катете AB.

375. Из датих услова следи да су троуглови ABS и CDS једнакокраки па је $SO \perp AB$ и $SO \perp CD$. Пошто је права SO нормална на две различите праве равни α, то је $SO \perp \alpha$.

376. Круг у равни, која садржи a, чији је пречник једнак одстојању тачке A од праве a.

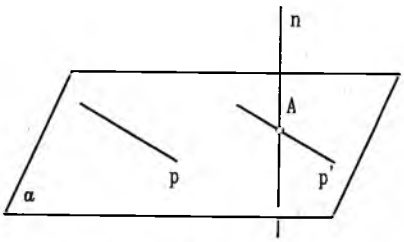
377. Нека је B' тачка симетрична тачки B у односу на α. C је тачка у којој права AB' продире раван α.

378. Из подударности троуглова PAQ и QBP следи да је $AQ = BP$; затим, подударни су троуглови ABP и BAQ, па је $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABQ$.

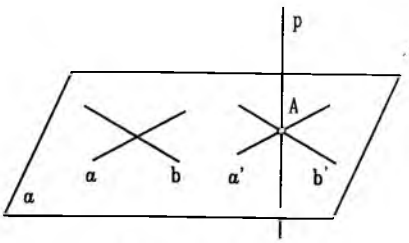
379. Нека је $p = \alpha \cap \beta$ и $C \in p$ тако да је $AC \perp p$. Ако AB не припада β, тада би из тачке A постојале две нормале - AB и AC на раван α.

380. Ако $n \subset \beta$, очигледно је да је $\beta \perp \alpha$. Претпоставимо да права n не припада равни β. Тада постоји права m, таква да је $m \| n$ и $m \subset \beta$. Пошто је $n \perp \alpha$ и $m \| n$, то је $m \perp \alpha$, па раван β садржи праву нормалну на раван α, те је и $\beta \perp \alpha$.

381. Нека је $n \cap \alpha = \{A\}$ (в. сл.) и p произвољна права равни α. Означимо са p' праву равни α која садржи тачку A и паралелна је правој p. Пошто је $n \perp \alpha$, то је $n \perp p'$, а због $p \| p'$, биће и $n \perp p$.



Сл. уз зад. 381



Сл. уз зад. 382

382. Како је $p \perp a$ и $p \perp b$ то постоје у равни α праве a' и b' такве да $A \in a'$, $A \in b'$ ($\{A\} = p \cap \alpha$) и $a' \| a$, $b' \| b$ (в. сл.). Пошто је $p \perp a$, то је $p \perp a'$, а такође из $p \perp b$ следи $p \perp b'$. Сада је права p управна на две праве равни које садрже њену продорну тачку, па је $p \perp \alpha$.

383. Из $CA \perp BA$ и $CA \perp BD$ следи да је права CA нормална на раван α одређена тачкама A, B и D, па и на праву DA те равни. Слично се доказује и да је $AB \perp DA$.

384. Како је $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$, то је и $AS = \beta \cap \gamma \perp \alpha$, па је и $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, тј. троуглови SAB и SAD су правоугли. Пошто је $SA \perp \alpha$ и $AB \perp BC$, то је (теорема о трима нормалама) и $SB \perp BC$. Такође из $SA \perp \alpha$ и $AD \perp DC$ следи $SD \perp DC$.

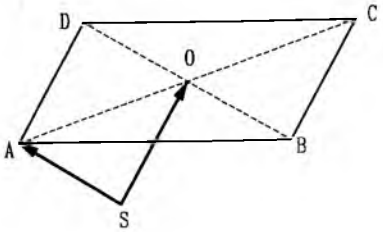
387. Кроз тачке A и B повући праве паралелне полуправим Ox и Oz, па се добија паралелограм $ACBD$. Компоненте су $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

388. Из троугла ACD следи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$, а из троугла ASO $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AO}$ (в. сл.). Како је $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$ то је $\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$.

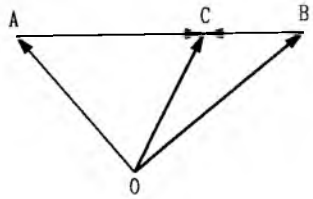
389. Нацртати слику. $\overrightarrow{ED} = \vec{p}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{q}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{p} - \vec{q}$.

390. Нацртати слику. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

391. Из троугла OCA је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, а из троугла OCB је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ (в. сл.). Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, јер је збир супротних вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ једнак нули.



Сл. уз зад. 388



Сл. уз зад. 391

392. Из наведене једнакости $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ следи једнакост $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, односно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, одакле закључујемо да су тачке A, B и C колинеарне и дужи AC и BC једнаке.

393. Нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и CA троугла ABC. Из троугла B_1A_1C је $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$, а из четвороугла ABA_1B_1 је $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, јер су збирови супротних вектора $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1A}$ једнаки нули.

394. (В. сл.) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \overrightarrow{OD})$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \overrightarrow{OC})$, па је $\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$, односно $\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{b}$, одакле је $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

395. Одредити средиште D одсечка CB и повући DM. Даље решавати као претходни задатак. Добија се $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

396. Конструисати правилни шестоугао $A_1A_2A_3A_3A_4A_5A_6$ и повући диагонале A_1A_3, A_2A_4, A_1A_4, A_1A_5, A_4A_6. Тада из паралелограма $A_1A_2A_4A_5$ следи $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_1A_4}$, а из паралелограма $A_1A_3A_4A_6$ да је $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{A_1A_4}$, па је заиста $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_6} = 3\overrightarrow{A_1A_4}$.

397. Како је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

398. $4\overrightarrow{OP} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

399. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_2M_3})$.

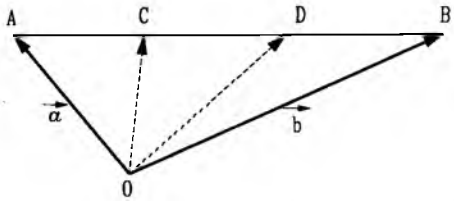
400. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{M_2M_3} + 2\overrightarrow{M_4M_5} + 2\overrightarrow{M_6M_7}$.

401. а) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$, па је $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$.

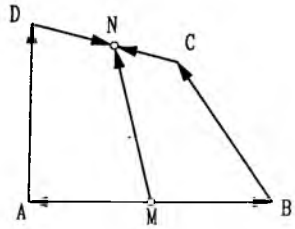
б) Пошто је $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$, то је (на основу а)): $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \vec{0}$.

в) Пошто је $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}$, то је $3\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}$, одакле се, на основу б), добија: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

402. Из четвороугла $AMND$ је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, а из четвороугла $MBCN$ је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (в. сл.). Сабирањем наведених једнакости добијамо да је $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, јер су збирови супротних вектора $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{CN}$, односно $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ једнаких нули.

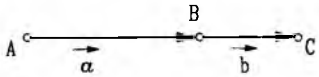


Сл. уз зад. 394



Сл. уз зад. 402

403. Према задатку 391 је $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$, јер су $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$ парови супротних вектора чији су збирови једнаки нули.



Сл. уз зад. 404а

Сл. уз зад. 404б

404. Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ су колинеарни ако су колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, или ако је један од њих нула вектор (в. сл.). На сл. а) приказани су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ исто усмерени а на сл. б) супротно усмерени ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$).

405. Пошто су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ колинеарни, то постоји реалан број k такав да је $\vec{x} = k\vec{y}$. То значи да је $2\vec{i} + \vec{j} = ak\vec{i} - k\vec{j}$, тј. $(2 - ak)\vec{i} + (1 + k)\vec{j} = \vec{0}$. Пошто су вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни, то је $2 - ak = 0$ и $1 + k = 0$. Решење овог система је $k = -1$, $a = -2$.
б) $a = -\frac{3}{2}$; в) $a = -15$.

406. а) Нека је $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c} = k_1(\vec{i} + \vec{j}) + k_2(\vec{i} - \vec{j}) = (k_1 + k_2)\vec{i} + (k_1 - k_2)\vec{j}$. Треба да буде $k_1 + k_2 = 1, k_1 - k_2 = -3$. Решавањем овог система једначина се налази да је $k_1 = -1, k_2 = 2$, па је $\vec{a} = -\vec{b} + 2\vec{c}$.
б) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$; в) $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

407. а) Треба да буде $\vec{x} = k\vec{y}$. Добија се $a = 1, b = 8$. б) $a = -\frac{1}{5}, b = 15$.

408. Одредимо реалне бројеве k_1 и k_2 тако да је $\vec{z} = k_1\vec{x} + k_2\vec{y}$. Релација $4\vec{k} - 2\vec{i} = k_1(3\vec{i} - 4\vec{j}) + k_2(2\vec{j} - 3\vec{i})$, може се написати у облику: $(-2 - 3k_1)\vec{i} + (4k_1 - 2k_2)\vec{j} + (4 + 3k_2)\vec{k} = \vec{0}$, одакле се налази $k_1 = -\frac{2}{3}$ и $k_2 = -\frac{4}{3}$, па је $\vec{z} = -\frac{2}{3}\vec{x} - \frac{4}{3}\vec{y}$ и вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ су компланарни.
б) $\vec{z} = 3\vec{x} + \vec{y}$.

409. Пошто је $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c} = \mu\vec{a}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), то је $\vec{b} = \lambda\vec{c} - \vec{a}$ и $\vec{b} = \mu\vec{a} - \vec{c}$, па је $\lambda\vec{c} - \vec{a} = \mu\vec{a} - \vec{c}$, одакле је $(\lambda + 1)\vec{c} = (\mu + 1)\vec{a}$, а како су $\vec{a}$ и $\vec{c}$ неколинеарни вектори мора бити $\lambda = \mu = -1$. Из прве једнакости је онда $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$, тј. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

410. $90° + \frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$, $90° + \frac{\gamma}{2}$.

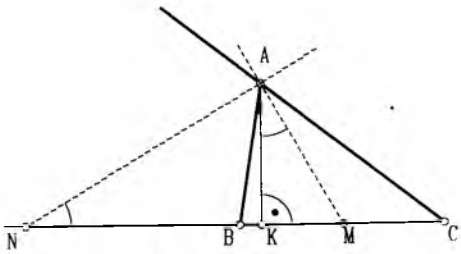
411. 60°.

412. а) 68°30′; б) 70°; в) 58°; д) 62°30′.

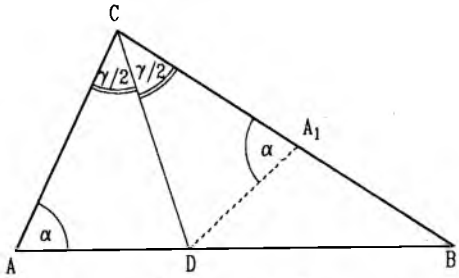
414. Нека је A_1 тачка симерична тачки A у односу на теме C правог угла троугла ABC и $\sphericalangle ABC = 30°$ Тада је $\sphericalangle ABA_1 = 60°$ и троугао ABA_1 је једнакостраничан, па је $AC = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}AB$.

416. а) $90° - \gamma$; б) $\frac{\gamma}{2}$.

417. а) $116°, 124°, 120°$.



Сл. уз зад. 419



Сл. уз зад. 420

418. Нека је α угао на основици $\triangle ABC$. Из $\triangle ADB$ добијамо да је $\alpha + \frac{\alpha}{2} + 75° = 180°$, па је $\alpha = 70°$. Следи да је $\sphericalangle ACB = 40°$.

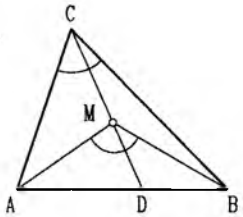
419. Нека су K, M, N редом подножје висине и пресеци симетрала унуташњег и спољашњег угла са правом BC (в. сл.). Претпоставимо да $K \in BM$ (шта ако $K \notin BM$?).

а) $\sphericalangle KAM = \sphericalangle BAM - \sphericalangle BAK = \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

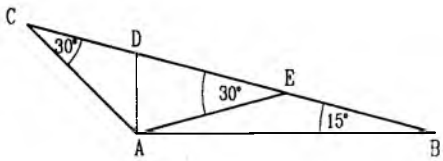
б) $\beta = \sphericalangle BNA + \sphericalangle BAN = \sphericalangle BNA + 90° - \frac{\alpha}{2}$.

420. Нека је CD симетрала угла код темена C $\triangle ABC$ у коме је $AC < BC$, тј. $\alpha > \beta$ (в. сл.) и A_1 тачка симетрична тачки A у односу на CD. Угао DA_1B троугла BDA_1 једнак је $180° - \alpha$ и већи је од угла β (у противном би било $\alpha + \beta > 180°$) па је $BD > DA_1 = AD$.

421. Продужимо CM до пресека D са страницом AB (в. сл.). Чињеница да је спољашњи угао троугла већи од несуседног унутрашњег даје нам $\sphericalangle AMD > \sphericalangle ACD$. Слично се доказује да је $\sphericalangle BMD > \sphericalangle BCD$.



Сл. уз зад. 421



Сл. уз зад. 424

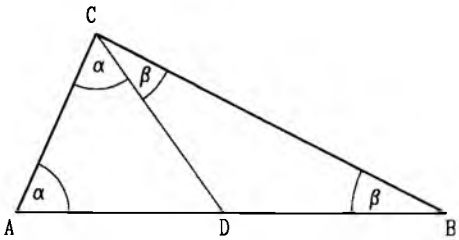
422. У троуглу ABM угао наспрам странице BM је $\frac{\alpha}{2}$, а угао наспрам странице AB је $180° - \beta - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \gamma > \frac{\alpha}{2}$.

423. Угао код темена P у $\triangle PBC$ је туп, па следи $PC < BC$. Слично, угао код Q у $\triangle QPC$ је туп, па је $PQ < PC$.

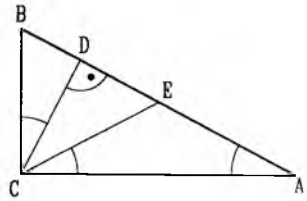
424. Нека је E средиште дужи BD (в. сл.). Тада је $AE = DE = EB$, $\sphericalangle AED = 30°$, $\triangle AEC$ једнакокраки и $AE = AC$.

425. а) Нека је у троуглу ABC $AD = DC = BD$ (в. сл.) Пошто су троуглови ADC и BCD једнакокраки, то је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = \alpha$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC = \beta$. Збир углова у троуглу ABC је $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$, па је $\alpha + \beta = 90°$ и троугао је правоугли.

б) Нека је у троуглу ABC $\sphericalangle C = 90°$ и $AD = DB$. Нека је E тачка таква да је $C - D - E$ и $DE = CD$. Тада је $\triangle ADE \cong \triangle BDC$ (по две једнаке странице и угао између њих). Одавде је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA$, па је $AE \| CB$, па како је $BC \perp AC$, то је и $EA \perp AC$. Правоугли троуглови ABC и ECA су, сада, подударни, па су њихове хипотенузе AB и CE једнаких дужина. Одатле следи да је $CD = \frac{1}{2}AB$.



Сл. уз зад. 425



Сл. уз зад. 426

426. Уз ознаке као на слици имамо да је $\triangle ACE$ једнакокраки (зашто?), па је $\sphericalangle ECA = \sphericalangle CAE = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Следи да углови ACB и ECD имају заједничку симетралу.

427. Имамо (в. сл.) да је $\triangle ABT$ једнакокраки и правоугли, па је $CD = 3TD = 3AD = \frac{3}{2}AB$.

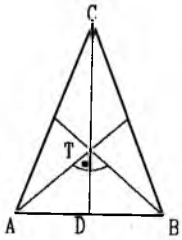
428. Троугао BNM је једнакокраки, па је $\sphericalangle MNB = \sphericalangle MBN = x$. Угао ANB је спољашњи угао троугла BNC, па је једнак збиру два несуседна унутрашња угла, па је $\sphericalangle ACB = x - \alpha$, где је $\alpha = \sphericalangle ABM = \sphericalangle CBN$. Како су углови на основици AB једнаки, то је $\sphericalangle BAC = 2\alpha + x$. Из $2(2\alpha + x) + x - \alpha = 180°$ налазимо $3\alpha + 3x = 180°$, па је $\sphericalangle ABN = \alpha + x = 60°$.

429. Како је $\sphericalangle MBC = 40°$, то је $\sphericalangle B = 80°$. Из троугла BMC налазимо $\sphericalangle C = 70°$. На крају $\sphericalangle A = 30°$. (У зависности од распореда тачака A, D, M, C може бити и обрнуто: $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 30°$.)

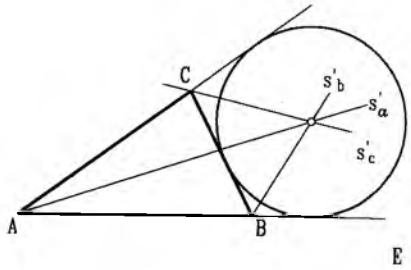
430. $\frac{1}{2}\sphericalangle A + 70° = 90°$ налзимо $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 40°$, тако да је $\sphericalangle C = 100°$.

431. 36°, 36° и 108°. **432.** 40° и 50°. **433.** 15°.

434. Имамо $MQ = \frac{AC}{2}$ (јер је троугао AMC правоугли) и $PR = \frac{AC}{2}$ (средња линија).



Сл. уз зад. 427



Сл. уз зад. 435

435. Означимо са s_a и s'_a симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A и аналогно за остале углове троугла. Свака тачка на s'_b је подједнако удаљена од правих AB и BC; такође, свака тачка на s_c је подједнако удаљена од правих BC и AC. Нека ја P пресечна тачка правих s'_b и s'_C. Следи да је P подједнако удаљена од правих AB и

AC, па зато припада једној од правих s_a или s'_a. Могућност $P \in s'_A$ отпада (зашто?), па имамо $P \in s_a$ (в. сл.).

436. Претпоставимо супротно да је $\alpha - \beta \geq 30°$ и $\beta - \gamma \geq 30°$. Тада је $\alpha - \gamma \geq 60°$, па је $180° = \alpha + \beta + \gamma \geq \beta + 2\gamma + 60°$, тј. $\beta + 2\gamma \leq 120°$. Одавде и из $\beta - \gamma \geq 30°$ следи $\gamma \leq 30°$, односно $\alpha + \beta \geq 150°$. Како је $\alpha - \beta \geq 30°$, добијамо $\alpha \geq 90°$, што противречи услову да је троугао оштроугли.

437. Нека је CO медијана у $\triangle ABC$ и D тачка таква да је $C - O - D$ и $CO = OD$. Из $\triangle BCD$ следи $2CO < CB + BD$, а како је $BD = AC$, то је $CO < \dfrac{AB + BC}{2}$. Из $\triangle AOC$ и $\triangle BOC$ следи: $CO + \dfrac{AB}{2} > AC$, $CO + \dfrac{AB}{2} > BC$. Сабирањем ових неједнакости добијамо $CO > \dfrac{AC + BC}{2} - \dfrac{AB}{2}$.

438. Нека је C' тачка на AB тако да је $CC' \perp AM$. Тада је $MC = MC'$ па је из троугла MBC' $MC' + MB > C'B = C'A + AB$, тј. $MC + MB > AC + AB$, јер је и $AC = AC'$.

439. Нека је S пресек правих CD и AE, а F тачка праве AE таква да је $FD \| BC$. $\sphericalangle AEC$ се лако може израчунати, једнак је 54°, па је $\triangle CSE$ једнакокраки и $CS = ES$. Једнакокраки је и $\triangle FSD$ ($SF = SD$), па је и $CD = FE$. DF је средња дуж $\triangle ABE$, па је и $AF = FE$.

440. $70°, 110°$.

441. а) Сви добијени троуглови су правоугли и имају једнаке катете.
б) Искористити а).

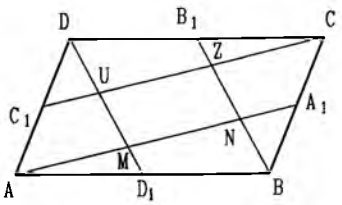
442. а) У сваком паралелограму $ABCD$ симетрале углова код темена A и C су паралелне (зашто?). Центар уписаног круга, ако постоји, мора припадати и једној и другој симетрали, па се оне морају поклапати. Отуда је $\triangle ABC$ једнакокраки, па је $AB = BC$.
б) Центар описаног круга мора бити пресек симетрала дијагонала (зашто?), а то је центар паралелограма. Следи да су дијагонале једнаке.

443. Због $AN \| CL$ и $AN = CL$ биће $ALCN$ паралелограм, па је и $AL \| CN$. На исти начин, $BK \| DM$, и $BK = DM$, $BMDK$ је паралелограм и $DK \| BM$.

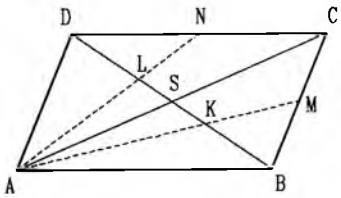
444. 75°.

445. Из чињенице да је $\sphericalangle BAE : \sphericalangle EAD = 3 : 1$ следи да је $\sphericalangle BAE = \dfrac{3}{4}R$ и $\sphericalangle EAD = \dfrac{1}{4}R$, где је R - прав угао. Даље је $\sphericalangle ADE = \dfrac{3}{4}R = \sphericalangle CAD$, па је $\sphericalangle CAE = \dfrac{3}{4}R - \sphericalangle EAD = \dfrac{1}{2}R$.

446. Нека су U и Z пресеци праве CC_1 са DD_1 и BB_1 (в. сл.). MD_1 је средња дуж троугла ABN, а NA_1 средња дуж $\triangle ZCB$, па је $AM = \dfrac{1}{2}AN$ и $NA_1 = \dfrac{1}{2}CZ$. Троуглови AMD_1 и CZB_1 су подударни, па је $NA_1 = \dfrac{1}{4}AN$, одакле следи $MN = \dfrac{2}{5}AA_1$.



Сл. уз зад. 446



Сл. уз зад. 447

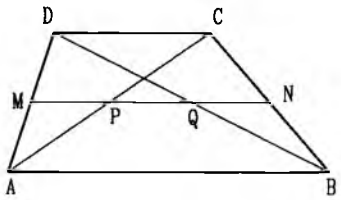
447. Тачке L и K су тежишта троуглова ACD и ABC, па је $DL = LK = KB$.

448. Нека је O пресек дијагонала паралелограма $ABCD$. Тада је $EO = AO - AE = CO - CK = OK$, а како је и $BO = OD$, дијагонале четвороугла $BEDK$ се полове, па је он паралелограм.

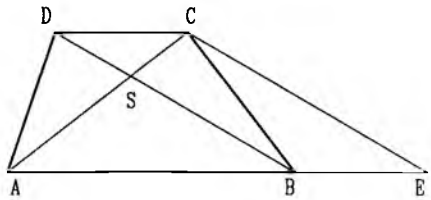
449. Из подударности троуглова NBK и LDM следи $ML = NK$, а из подударности троуглова KCL и NAM следи $KL = MN$.

450. Означимо $\sphericalangle BAC = \varphi$ и $\sphericalangle CAD = \varphi + 20°$. Како је $DE \perp BC$, то је и $AD \perp DH$, па из правоуглог троугла ADH из $\varphi + 20° + 50° + 90° = 180°$ налазимо $\varphi = 20°$. Следи да су углови паралелограма $60°$ и $120°$.

451. Уз ознаке као на слици имамо да су MP и MQ средње линије за ΔCDA и ΔABD, па је $PQ = MQ - MP = \dfrac{AB - CD}{2}$.

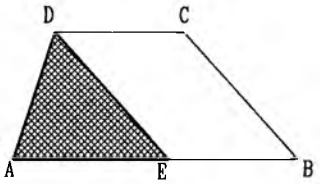


Сл. уз зад. 451

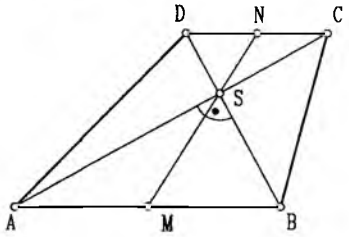


Сл. уз зад. 452

452. Означимо темена трапеза и пресек дијагонала као на слици. Нека је E тачка на продужетку странице AB таква да је $BE = CD$. Како је $BE \| CD$, следи да је $BECD$ паралелограм. Закључујемо да је ΔACE једнакокраки, а потом и да су ΔABS и ΔCDS једнакокраки. Сад из $SA = SB$ и $SC = SD$ следи $\Delta ASD \cong \Delta BSC$.



Сл. уз зад. 453



Сл. уз зад. 456

453. Ако су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ дати трапези, нека су E и E' тачке на AB и $A'B'$ такве да је $EB = CD$ и $E'B' = C'D'$. Доказати да је $\Delta AED \cong \Delta\ A'E'D'$, (в. сл.).

454. Ако је K средиште странице AB и K', A', B' пројекције ових тачака на p, тада је KK' средња линија трапеза $AA'B'B$.

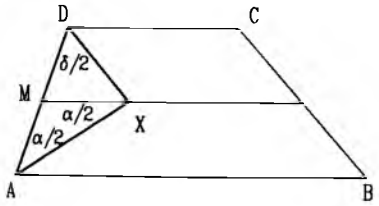
455. Из једнакости тангентних дужи повучених из темена трапеза на уписани круг извести да је крак једнак полузбиру основица.

456. Из правоуглих троуглова CSD и ABS (в. сл.) имамо $\sphericalangle NDS = \sphericalangle DSN$ и $\sphericalangle MBS = \sphericalangle MSB$, а како је $\sphericalangle NDS = \sphericalangle MBS$ то је и $\sphericalangle DSN = \sphericalangle MSB$, што значи да тачка S припада дужи MN, па је $MN = MS + SN = AM + CN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

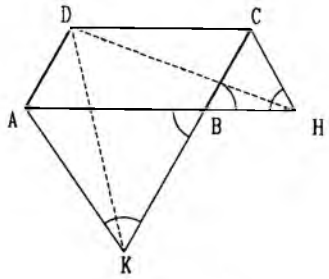
457. 5.

458. 18.5 и 17.5.

459. Да је $\sphericalangle X = 90°$ (в. сл.) следи непосредно из чињенице да су углови $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle D = \delta$ суплементни, па је $\sphericalangle X = 180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}) = 90°$. Нека је M средиште дужи AD. Тежишна дуж MX правоуглог троугла AXD једнака је половини хипотенузе, па је $MX = MA = MD$, дакле $\triangle AXM$ је једнакокраки и $\sphericalangle AXM = \sphericalangle XAM$, одакле следи да је $MX \| AB$, тј. тачка X припада средњој дужи трапеза.



Сл. уз зад. 459

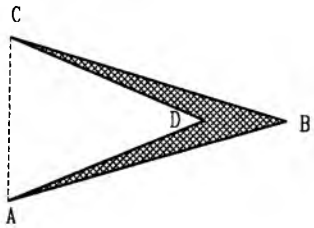


Сл. уз зад. 460

460. Како је $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CBH$, као унакрсни, то једнакокраки троуглови $\triangle ABK$ и $\triangle BCH$ имају све одговарајуће углове једнаке, па је и $\sphericalangle KAB = \sphericalangle BCH$ (в. сл.). Одавде следи да је $\triangle CDH \cong \triangle AKD$, па је и $KD = DH$.

461. Нека су D_1 и C_1 тачке на AB такве да је $DD_1 \| NM \| CC_1$. Троуглови ADD_1 и CC_1B су једнакокраки ($AD_1 = DD_1, CC_1 = BC_1$), па је $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle DD_1C_1$, $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle CC_1D_1$, а одавде $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$. За доказ у обрнутом смеру посматрати $\triangle ABE$, где је E пресек правих AD и BC. Тада је $\sphericalangle AEB = 90°$.

462. Доказати да је четвороугао образован средиштима страница делтоида правоугаоник.



Сл. уз зад. 463

463. Нека је $\alpha < 1°$. Нека су B и D тачке са исте стране праве AC такве да су троуглови ACB и ACD једнакокраки, при чему је угао на основици AC једнак $90° - \frac{\alpha}{2}$ у првом, а $90° - \frac{3\alpha}{2}$ у другом троуглу, (в. сл.). Онда четвороугао $ABCD$ има три угла једнака α.

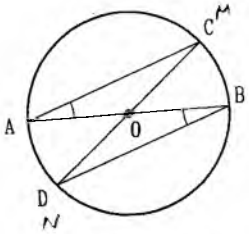
464. Из $(n-2)180° : 360° = 15 : 4$ добијамо $n = 19/2$-апсурд.

465. n се добија из једнакости $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + 8$; $(n = 10)$.

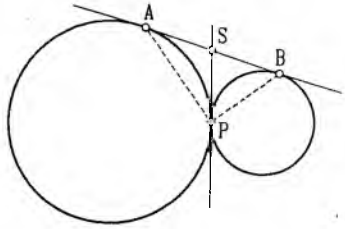
466. Елиминисати α из једнакости $\alpha = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$ и $k = \dfrac{2\alpha}{180^\circ - \alpha}$. Добијамо $k = n - 2$.

467. Збир спољашњих углова конвексног многоугла је 360°, па такав многоугао може имати највише 3 тупа спољашња угла и према томе највише 3 оштра унутрашња угла. Оштроугли троуглови су, на пример, конвексни многоуглови са три оштра унутрашња угла.

468. Имамо $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBN$ (наизменични), па следи да су једнакокраки троуглови OAM и OBN подударни (в. сл.).



Сл. уз зад. 468

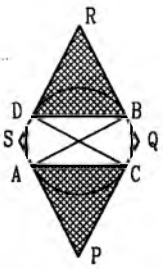


Сл. уз зад. 469

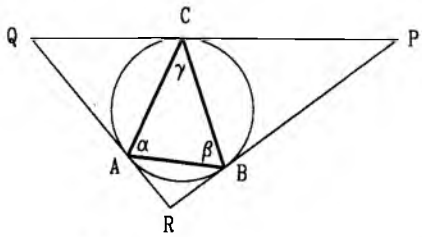
469. Нека је S пресечна тачка тангенте AB и заједничке тангенте у тачки P (в. сл.). Из једнакости тангентних дужи $SA = SP$ и $SP = SB$ следи да тачка P припада кругу над AB као пречником.

470. Нека је O центар кругова, $A, B \in k'$ и нека су AP и BQ тангентне дужи ($P, Q \in k$). Правоугли троуглови OAP и OBQ су подударни јер имају једнаке хипотенузе и по једну катету.

471. Наспрамне странице добијеног четвороугла $PQRS$ су паралелне јер су нормалне на исти пречник (в. сл.). Отуда је и $\sphericalangle APC = \sphericalangle BRD$. Из $\triangle OAC \cong \triangle OBD$ следи $AC = BD$. Сад можемо закључити да су једнакокраки троуглови ACP и BDQ подударни, па је $AP = PC = BR = RD$. На исти начин добијамо и $CQ = QB = DS = SA$.



Сл. уз зад. 471



Сл. уз зад. 472

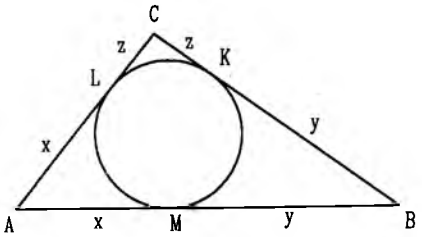
472. Означимо добијени троугао са PQR (в. сл.). Како је $\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = \gamma$ (теорема о тангентном углу), имамо $\sphericalangle QRP = 180^\circ - 2\gamma$. Аналогно, $\sphericalangle RPQ = 180^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle PQR = 180^\circ - 2\beta$.

473. $\alpha = 54^\circ$. **474.** $\alpha = 15^\circ$. **475.** $\alpha = 75^\circ, \beta = 105$.

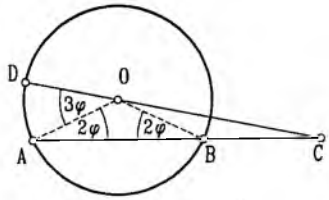
476. $\beta = 41^\circ$. **477.** 28° и 46°.

478. Из једнакости тангентних дужи, $AM = AL = x$, $BM = BK = y$, $CK = CL = z$, (в. сл.). Решење добијамо из система једначина $x + y = c, y + z = a, z + x = b$.

479. $11cm$ или $19cm$.



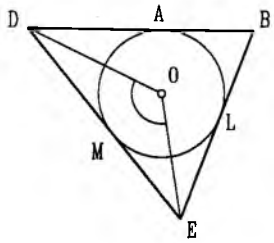
Сл. уз зад. 478



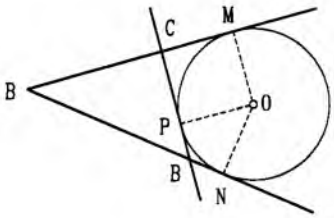
Сл. уз зад. 480

480. Означимо $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BCO = \varphi$ (види слику). Тада је спољашњи угао $\sphericalangle ABO$ једнакокраког троугла BCO једнак 2φ, па је и $\sphericalangle OAB = 2\varphi$, а у $\triangle OAC$ спољашњи угао $\sphericalangle DOA = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OCA = 3\varphi$.

481. Како је дати круг уписан у $\triangle BDE$, биће (в. сл.) $\sphericalangle DOE = 180^\circ - \dfrac{\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED}{2} = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - \sphericalangle DBE}{2} = 90^\circ + \dfrac{\sphericalangle DBE}{2}$, чиме је тврђење доказано.



Сл. уз зад. 481



Сл. уз зад. 485

482. $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ABC$ - углови са нормалним крацима; $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ABC$, па је троугао ADO једнакокраки.

483. Конструисати заједничку тангенту кругова у тачки M.

484. Искористити теорему о углу између тетиве и тангенте круга.

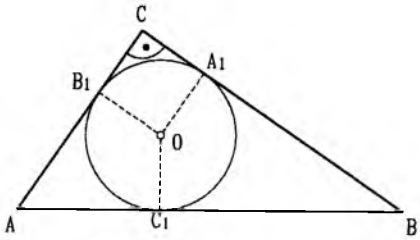
485. $BP = BN, CP = CM$ (в. сл.). $AC + CB + BC = AC + CM + BN + AB = 2AM$.

486. Искористити једнакост тангентних дужи $CB_1 = CA_1$, $BA_1 = BC_1$, $AB_1 = AC_1$ (в. сл.), чињеница да је OA_1CB_1 квадрат и чињеницу да је код правоуглог троугла пречник описаног круга једнак хипотенузи.

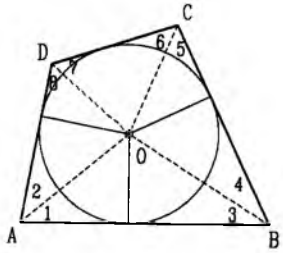
487. а) По претходном задатку је $c + 2r = a + b$, а како је $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, биће $c + 2r \geq 2\sqrt{ab}$. Једнакост важи ако и само ако је троугао једнакокракоправоугли.
б) Очигледно важи $2r < a, 2r < b, 2r < h_c \leq \dfrac{c}{2}$.

488. Ако из тачке O конструишемо нормале на странице четвороугла (в. сл.), добићемо четири пара подударних троуглова, при чему је $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 8$. Како је $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 + \sphericalangle 7 + \sphericalangle 8 = 360^\circ$, а $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 360^\circ - (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 + \sphericalangle 7) = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 8$, биће $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \dfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

489. Периферијски углови над истим луком су једнаки, па је $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = \sphericalangle KBA + \sphericalangle KAC + \sphericalangle KCB$. Збир свих шест ових углова је 180°, као збир углова $\triangle ABC$, па је $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = 90^\circ$, што је довољан услов да би збир лукова KA, KB и KC био једнак полукругу.

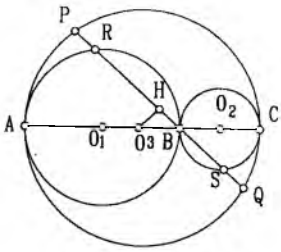


Сл. уз зад. 486

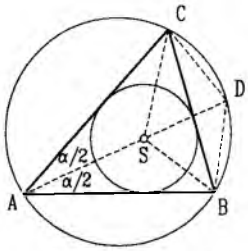


Сл. уз зад. 488

490. Означимо полупречнике кругова са r_1, r_2 и r_3. Како је $O_1R = O_3O_2 = r_1, O_1O_3 = O_2S = r_2$ и $\sphericalangle O_3O_1R = \sphericalangle O_3O_2S$ (јер је $O_1R \| O_2S$), биће $\Delta O_1RO_3 \cong \Delta O_2SO_3$ (в. сл.). Одавде следи да је $O_3R = O_3S$. Ако је H подножје нормале из O_3 на тетиву PQ, биће $RH = SH$ и $PH = QH$, дакле $PR = PH - RH = QH - SH = QS$.



Сл. уз зад. 490



Сл. уз зад. 492

492. Једнаким кружним луковима одговарју једнаки периферијски углови, па је (в. сл.):

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}(\widehat{DB}), \qquad \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}(\widehat{CD}),$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = \beta(\widehat{CA}), \qquad \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA = \gamma(\widehat{AB}).$$

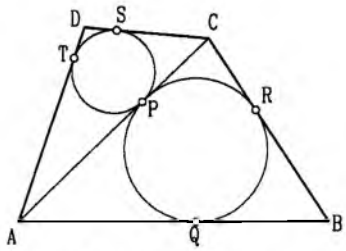
Даље имамо $\sphericalangle CSD = 180^\circ - \left(\beta + \frac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\beta + \frac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma+\alpha}{2} = \sphericalangle DCS$, па је $CD = SD$. Такође је једнакокраки троугао CDB, па је $CD = BD$.

493. а) Поделимо дати многоугао на троуглове тако —што спојимо сва његова темена са центром круга у који је многоугао уписан. Сви добијени троуглови су подударни и једнакокраки, Ако је α угао на основицама ових троуглова, следи да је сваки угао датог многоугла једнак 2α.

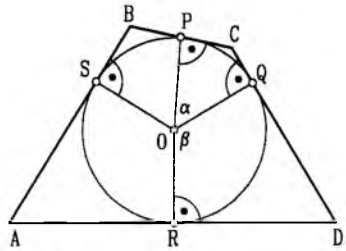
б) Поделимо опет многоугао тако што спојимо сва темена са центром круга уписаног у многоугао. Свака од уведених дужи је симетрала једног угла многоугла. Следи дс су сви добијени троуглови једнакокраки. Како сви они имају једнаке висине над основицом (полупречници круга), следи да су сви подударни и стога су све њихове основице (тј. странице многоугла) једнаке.

494. Означимо додирне тачке са P, Q, R, S (в. сл.). Из једнакости тангентних дужи $AQ = AP = AT, BQ = BR, CR = CP = CS, DS = DT$ следи $AB + CD = AC + BD$.

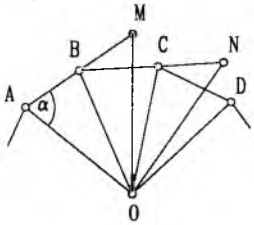
495. Нека су P, Q, R, S тачке на произвољном кругу са центром O такве да важи $\sphericalangle POQ = \alpha$, $\sphericalangle QOR = \beta$, $\sphericalangle ROS = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle SOP = 180^\circ - \beta$. Тада тангенте у тачкама P, Q, R, S образују четвороугао са траженим особинама. Заиста, ако темена добијеног четвороугла означимо са A, B, C, D као на слици, тада су у сваком од четвороуглова $AROS, BSOP, CPOQ, DQOR$ два угла права, па следи да су углови у четвороуглу $ABCD$ редом једнаки α, β, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$.



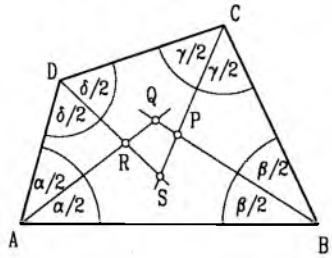
Сл. уз зад. 494



Сл. уз зад. 495



Сл. уз зад. 496

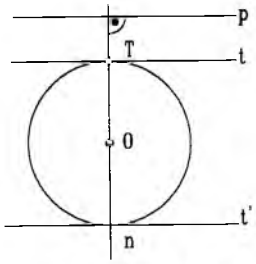


Сл. уз зад. 497

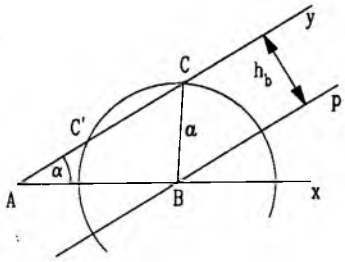
496. Једнокраки троуглови $OAB, OBC, OCD, \ldots$ су сви подударни; означимо са α њихов угао на основици, (в. сл.). Из подударности $\triangle OBM \cong \triangle OCN$ добијамо $\sphericalangle BOM = \sphericalangle CON$ и отуда $\sphericalangle MON = \sphericalangle BOC = 180° - 2\alpha$. Како је $\triangle MON$ једнакокраки, следи $\sphericalangle OMN = \alpha$. Користећи још чињеницу да је α спољашњи угао код темена B у $\triangle OBM$, добијамо коначно $\sphericalangle BON + \sphericalangle BMN = \sphericalangle BOM + \sphericalangle MON + \sphericalangle BMO + \sphericalangle OMN = \alpha + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180°$.

497. Означимо са α, β, γ, δ углове конвексног четвороугла $ABCD$ (в. сл.). Тада је $\sphericalangle AQB = 180° - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\sphericalangle DSC = 180° - \dfrac{\delta+\gamma}{2}$, па је $\sphericalangle AQB + \sphericalangle DSC = 360° - \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180°$.

502. Нека су k и p дати круг и права. Нека је t тражена тангента и T њена додирна тачка, (в. сл.). Права n одређена центром O круга и тачком T је нормална на t. Праву n можемо конструисати (нормала из O на p), а онда T, па t. Постоје увек два решења, јер n сече круг у двема тачкама.



Сл. уз зад. 502



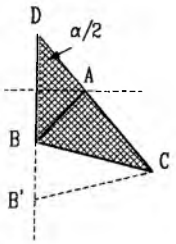
Сл. уз зад. 503

503. *Анализа.* Претпоставимо да је тражени троугао ABC конструисан и означимо са D подножје висине троугла из темена B. Тада је правоугли троугао ABD може конструисати, па се задатак своди на одређивање тачке C која припада правој AD и налази се на одстојању a од тачке B. *Конструкција.* Конструишемо прво угао xAy једнак датом углу α. Конструишемо затим праву p паралелну са краком Ay тако да је

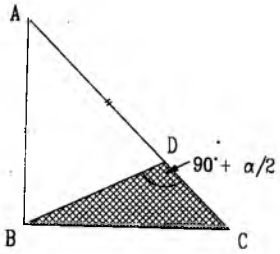
растојање између p и Ay једнако h_b и да p сече крак Ax. У пресеку p и h_b добијамо тачку B. Конструишимо сад круг k полупречника a са центром B и тачку C добијамо у пресеку овог круга са краком Ay, (в. сл.).

Доказ. Према конструкцији, $\sphericalangle BAC = \alpha$. Висина BD је одсечак заједничке нормале паралилних правих Ay и p, па је њена дужина једнака h_b. Коначно $BC = a$, јер $B \in k$.

Дискусија. Број решења зависи од тога колико круг k и полуправа Ay имају заједничких тачака. Дакле, број решења је 0, 1 или 2. За детаљнију дискусију размотримо прво случај кад је α оштар угао. Ако је $a < h_b$, тада нема решења. Ако је $a = h_b$, има једно решење. Ако је $h_b < a < AB$, има два решења. Ако је $a \geq AB$, опет има једно решење. У случају кад је α туп угао имамо једно или ниједно решење, зависно од тога да ли је $a > AB$ или је $a \leq AB$.



Сл. уз зад. 504а



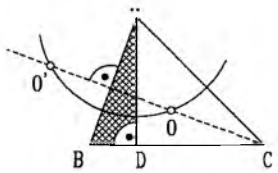
Сл. уз зад. 504б

504. а) Нека је D тачка на продужетку странице CA таква да је $AD = c$, (в. сл.). Троугао BCD можемо конструисати јер знамо две странице (BC и CD) и угао код темена $D(= \alpha/2)$. Троугао ABD је једнакокраки а теме A добијамо у пресеку симетрале дужи BD са страницом CD. Задатак има 0, 1 или 2 решења (како конструишемо ΔBCD?).

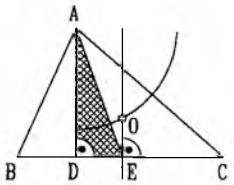
б) Нека је d тачка на страници AC таква да важи $AD = AB$, (в. сл.). Тада је ΔABD једнакокраки. Прво конструичемо ΔBCD јер знамо две његове странице и угао код темена D који је једнак $90° + \frac{\alpha}{2}$, па теме A нађемо у пресеку праве CD и симетрале дужи BD. Опет има 0, 1 или 2 решења.

505. а) Нека је AD висина, (в. сл.). Конструишемо прво ΔABD јер знамо страницу $AD = h_b$ и све његове углове. Центар O описаног круга мора припадати симетрали странице AB и мора бити $AO = R$, што је довољно да га конструишемо. Има 0, 1 или 2 решења, зависно од тога да ли је R мање, једнако или веће од $\frac{AB}{2}$.

б) Нека су AD и AE висина и тежишна дуж, (в. сл.). Прво конструишемо ΔADE. Имамо $OE \perp DE$ и $OA = R$, што је довољно да се конструише O и онда описани круг. Темена B и C су пресечне тачке описаног круга са правом DE. Број решења је 0 или 1; у сваком од три описана корака конструкција се или не може извести или се изводи једнозначно.



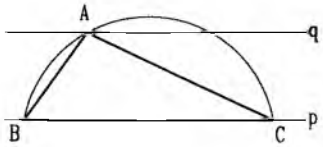
Сл. уз зад. 505а



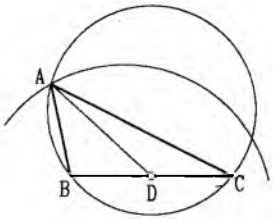
Сл. уз зад. 505б

506. а) На некој правој p конструишемо дуж BC, а затим у једној од полуравни одређеној правом p конструишемо праву q на растојању h_a од p и лук l који је геометријско место тачака из којих се дуж AB види под углом α, (в. сл.). Теме A добијамо у пресеку q и l, па задатак има 0,1 или 2 пешења.

б) Конструишемо геометријско место тачака из којих се тетива BC дужине a види под углом α. Затим конструишемо круг l полупречника t_a са центром у средишту D дужи BC, (в. сл.). Теме A је пресечена тачка два конструисана круга, па задатак има 0, 1 или 2 решења.



Сл. уз зад. 506а



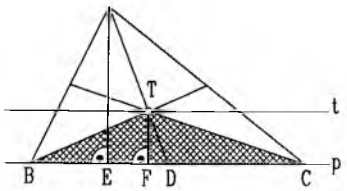
Сл. уз зад. 506б

507. а) *Анализа.* Уочимо $\triangle BTC$, где је T тежиште троугла ABC, (в. сл.). Познате су нам његове странице TB и TC - свака од њих једнака је $\frac{2}{3}$ тежишне дужи којој припада. Позната нам је и висина из темена T - она је трећина висине h_a.

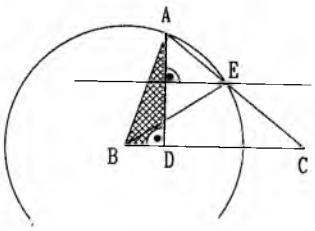
Конструкција. Конструишемо паралелне праве p и t на растојању $\frac{1}{3}h_a$. Са центром у произвољној тачки $T \in t$ конструишемо кругове k_1 и k_2, први са полупречником $\frac{2}{3}t_b$, а други са полупречником t_c. Тачке B и C добијамо у пресеку ових кругова са p. Конструишемо сад средиште D дужи BC и на полуправој DT конструишемо треће теме A тако да је $TA = 2TD$.

Доказ. Дуж AD је по конструкцији тежишна линија у $\triangle ABC$. Како је $AT : TD = 2 : 1$, следи да је T тежиште $\triangle ABC$. Тачка T дели онда и преостале две тежишне дужи у односу 2:1, па како је $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $CT = \frac{2}{3}t_c$, следи да су тежишне дужи једнаке t_b и t_c. Нека су сад E и F подножја нормала из A и T на p. Из Талесове теореме (или на неки други начин) добијамо $AE = 3TF = 3 \cdot \frac{1}{3}h_a = h_a$.

Дискусија. Број решења зависи од броја пресечних тачака кругова k_1 и k_2 са p. Ако је $2t_b > h_a$ и $2t_c > h_a$ добијамо четири троугла, тачније два пара подударних троуглова. Ако је $2t_b > h_a$ и $2t_c = h_a$ или ако је $2t_b = h_a$ и $2t_c > h_a$, тад добијамо два подударна троугла. Коначно, ако је $2t_b < h_a$ или $2t_c < h_a$ или $2t_b = h_a = 2t_c$, тад нема решења.



Сл. уз зад. 507а

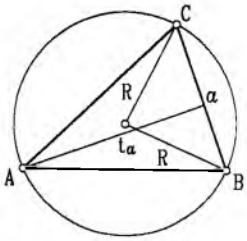


Сл. уз зад. 508а

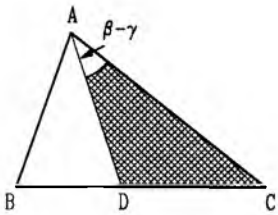
508. а) Нека је AD висина и BE тежишна дуж у траженом $\triangle ABC$, (в. сл.). Можемо конструисати правоугли $\triangle ABD$ јер му знамо две странице. Затим E добијамо у пресеку симетрале дужи AD и круга са центром B и полупречником t_b. Задатак има два решења ако је $c > h_a$ и $2t_b > h_a$. Једно решење постоји ако је тачна једна од ових неједнакости, а у преосталој важи једнакост. У осталим случајевима нема решења.

509. *Анализа.* Претпоставимо да је тражени $\triangle ABC$ конструисан. Његова темена B и C су крајеви дате дужи $BC = a$. Дакле, задатак се своди на одређивање темена A. При томе A треба да задовољи два услова: 1° мора припадати кругу полупречника R описаном око $\triangle ABC$ и 2° налази се на одстојању t од средишта дужи BC. *Опис конструкције.* Конструишимо дуж $BC = a$ и једнакокраки $\triangle BOC$ ($BO = OC = R, BC = a$), а затим круг $k(O, R)$. Затим конструишемо круг $k_1(D, t_a)$, где је D средиште дужи BC (в. сл.) Пресек круга k и k_1 даје тражено теме A.
Доказ. По конструкцији је $BC = a$. Теме A припада и кругу k и кругу k_1, па задовољава оба поменута услова из анализе: $OA = R$ и $AD = t_a$.
Дискусија. Конструкција се састоји из два дела - конструкције $\triangle BOC$ и пресека кругова k и k_1. Да би се $\triangle BOC$ могао конструисати неопходно је да је $R > \frac{1}{2}a$. Ако је $R < \frac{1}{2}a$ задатак нема решења. Ако је $R = \frac{1}{2}a = t_a$ задатак има бесконачно много решења, а ако је $R = \frac{1}{2}a \neq t_a$ нема решења. Ако је $R > \frac{1}{2}a$ задатак има два симетрична, једно или ниједно решење у зависности од броја пресечних тачака кругова k и k_1. Специјално, ако је $t_a = \frac{1}{2}a$ троугао ABC се деформише у дуж BC.

510. Нека је D тачка на правој BC таква да важи $AD = AB$, (в. сл.). Конструисати прво помоћни троугао ADC. Постоји увек једно решење.



Сл. уз зад. 509

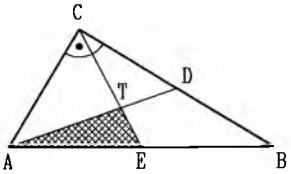


Сл. уз зад. 510

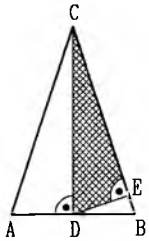
511. а) Нека су AD и CE тежишне дужи, (в. сл.). У $\triangle TAE$ познате су нам све странице.
б) Нека је S центар уписаног круга. Имамо $AB = 2R$ и $\sphericalangle ASB = 135°$ (зашто?), па можемо да конструишемо $\triangle ASB$.
в) Продужити катету AB за дужину хипотенузе;
г) конструисати троугао ако је дата једна страница и два угла на њој од којих је један 135°;
д) конструисати троугао $\triangle BAD$, где је $AD = CA + CD = AC + BC$ и $\sphericalangle BDC = 45°$.

512. а) Нека је CD висина и E подножје нормале из D на BC, (в. сл.). Имамо $CD = h_c$ и $DE = \frac{1}{2}h_a$, па се правоугли $\triangle CDE$ може конструисати. б) Треће теме A је у пресеку нормале из P на BC и круга са центром C и полупречником BC.

513. а) нека је D тачка праве AB тако да је $B - A - D$ и $AD = AC = b$. Биће $\sphericalangle ADC = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2}$. б) Нека су D и E тачке праве BC такве да је $D - B - C - E$ и $BD = BA$, $CE = EA$. Троуглови ABD и ACE су једнакокраки, па је и $\sphericalangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle AEC = \frac{\gamma}{2}$.



Сл. уз зад. 511а



Сл. уз зад. 512а

в) Може се конструисати правоугли $\triangle BDA$, где је D подножје висине из B. г) Најпре конструисати троугао ADC, где је D подножје висине из A и затим на одстојању h_b праве паралелне првој AC. д) Констуисати прво правоугли $\triangle ACD$ (D је подножје висине из C) а затим одредити на AD тачку E тако да је $A-D-E$ и $AE=c+a$.

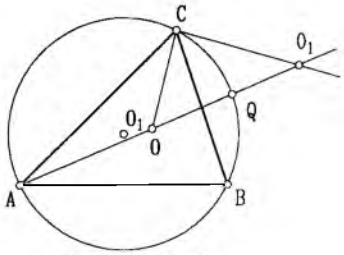
514. а) Нека је D средиште странице BC и E тачка праве AD, таква да је $D-A-E$ и $DE=b+h_a$. Симетрала дужи BE сече DE у тачки A.
б) Нека је D седиште странице BC и E тачка праве BC таква да је $E-B-D$ и $DE=s$. Троугао ADE се може конструисати.
г) Нека је D тачка праве AC таква да је BD симетрала $\sphericalangle B$. Троугао ABD се може конструисати.
д) Конструисати правоугли $\triangle BDT$, где је D средиште BC, а T тежиште троугла.
ђ) Конструисати правоугли $\triangle CDF$, где је D седиште дужи BC и F тачка праве AD таква да је $A-D-F$ и $DF=b-h_a$.

515. а) Нека је E додирна тачка уписаног круга и странице BC и G тачка на правој BC таква да је $EG=b-c$. Тада је средиште дужи EG у исто време и средиште странице BC.
б) У углу $\sphericalangle A=\alpha$ конструише се круг полупречника r тако да додирује краке угла у тачкама D и F; затим на крацима угла одредити тачке P и Q такве да је $A-D-P$ и $A-F-Q$ и $DP=FQ=a$. Тада је права BC заједничка тангента круга полупречника r и круга, који додирује краке угла у тачкама P и Q.
в) Најпре се конструише правоугли троугао ABD, где је D подножје висине из A, а затим правоугли $\triangle ABE$, где је E подножје висине из B.
г) Доказати најпре да ако су M и N тачке у којима споља описани круг додирују продужетке страница AB и AC, тада је $AM=AN=s$.
д) Ако су H и D тачке праве BC такве да је AH висина и AD симетрала $\sphericalangle A$, може се конструисати троугао AHD. Затим се одреди средиште O уписаног круга и конструише круг $k(O,r)$.
ђ) Конструисати најпре троугао ACD ($AD=s_\alpha$, $AC=b$, $\sphericalangle CAD=\frac{\alpha}{2}$).

516. Нека су O и O_1 средишта уписаног и споља уписаног круга. Доказати, најпре, да тачке B и C припадају кругу k над пречником OO_1 и да средиште Q тог круга припада кругу описаном око $\triangle ABC$. Пресек круга k и круга са средиштом у O_2 и полупречника O_2Q (O_2-средиште описаног круга $\triangle ABC$) даје тачке B и C. Ако је тачка O_2 ван круга полупречника $\frac{1}{4}OO_1$ са центром у Q тада постоји јединствено решење. У противном, нема решења.

517. а) Нека је $ABCD$ тражени правоугаоник и E тачка праве AB таква да је $A-E-B$ и $AE=a-b$. Тада се може конструисати $\triangle AEC$ јер је $\sphericalangle AEC=135°$.
г) Нека су у правоугаонику $ABCD$ дати страница $AB=a$ и разлика $AC-BC=d-b$. Уочити тачку E на правој CB такву да је $C-B-E$ и $BE=d-b$. Троугао ABE се може конструисати. Тачка C припада симетрали дужи AE.

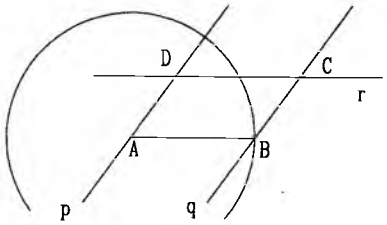
518. Нека је $ABCD$ тражени квадрат и E тачка праве AC таква да је $A-E-C$ и $AE=d-a$. Троугао ABE се може конструисати на следећи начин. На симетрали



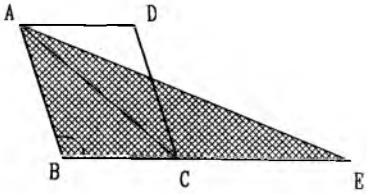
Сл. уз зад. 516

правог угла $\sphericalangle BAD$ одреди се тачка E таква да је $AE = d - a$. Затим се из произвољне тачке P те симетрале конструише полуправа PQ под углом од 45° према симетрали AP и на крацима угла APQ одреде тачке M и N такве да је $PM = PN$. Најзад, кроз тачку E се конструише права паралелна дужи MN. Она сече крак AB угла $\sphericalangle BAD$ у темену B траженог квадрата.

519. а) Нека су h_1 и h_2 дата растојања међу страницама AB и CD, односно BC и AD. Конструишимо прво паралелне праве p и q на растојању h_2, (в. сл.). Онда конструишимо круг са центром у произвољној тачки $A \in p$ и полупречником AB; његов пресек са q даје нам тачку B. Преостала два темена добијамо у пресеку правих p и q са правом r која је паралелна са AB и на растојању h_1 од AB. Нема решења ако је $AB < h_2$; у супротном, постоји (до на подударност) јединствено решење.
б) Нека је E тачка на продужетку странице BC таква да важи $CE = AC$, (в. сл.). У ΔABE знамо странице AB и BE у угао ABE. Конструишемо овај троугао, а онда добијамо C у пресеку BE са симетралном дужи AE (ΔACE је једнакокраки). Овај пресек постоји кад је $AB < BE$ (у супротном, симетрала дужи AE сече страницу AB, а не BE).



Сл. уз зад. 519а

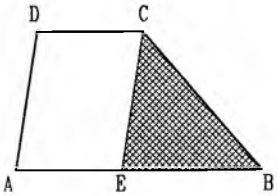


Сл. уз зад. 519б

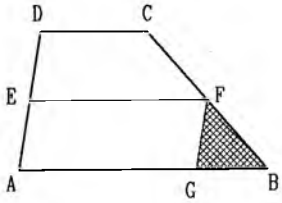
520. а) Нека су дате основице a, b ($a > b$) и краци c, d. Нека је E тачка на већој основици AB таква да је $AE = b$, (в. сл.). Прво конструишемо ΔEBC (све странице познате), а потом и преостала два темена. Постоји (јединствено) решење ако је свака од дужи $a - b, c, d$ мања од збира остале две.
б) Нека је дата основица $AB = a$ и средња линија $EF = m$. Нека је G тачка на AB таква да важи $AG = m$, (в. сл.). Можемо конструисати ΔGBF јер знамо страницу $GB = a - m$ и налегле углове (суплементни датим угловима на мањој основици трапеза). Постоји јединствено решење ако је $a > m$ и ако је збир датих углова мањи од 180°.

521. Нека су дати подаци d и r. Дијагонале деле ромб на четири подударна правоугла троугла, (в. сл.). Њих можемо конструисати јер знамо једну катету ($d/2$) и висину из темена правог угла (r). Постоји јединствено решење када је $d > 2r$.

522. Нека је S средиште KL, а T тачка на правој KL тако да је $TL = LS$. Кроз T конструишемо праву паралелну симетрали странице KL. Ова права сече симетралу

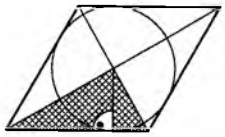


Сл. уз зад. 520а

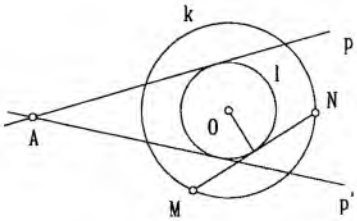


Сл. уз зад. 520б

странице ML у једном од темена траженог четвороугла. Остала темена се налазе на основу услова да су тачке K, L, M средишта страница четвороугла $ABCD$.



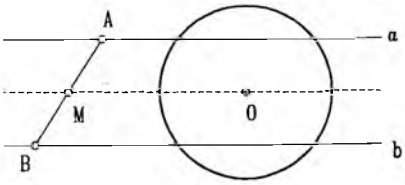
Сл. уз зад. 521



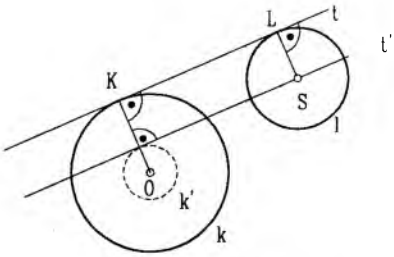
Сл. уз зад. 523

523. Све тетиве дате дужине d подједнако су удаљене од центра круга, па зато постоји круг l концентричан са k који све ове тангенте додирују. Круг l можемо конструисати (полупречник једнак одсечку нормале из центра O на произвољну тетиву MN дужине d, види слику). Права p је тангента из A на l. Постоји 0, 1 или 2 решења, зависно од тога да ли је d веће, једнако или мање од пречника круга k.

524. Тражене праве a и b ($A \in a, B \in b$) су подједнако удаљене од центра O круга (в. сл.). Ако је M средиште дужи AB, следи да је $a \| MO \| b$ (зашто?). Постоји једно или ниједно решење.

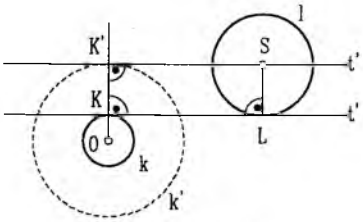


Сл. уз зад. 524

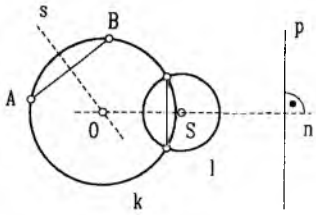


Сл. уз зад. 525а

525. Нека су k и l дати кругови, O и S њихови центри, а R и r ($R \geq r$) њихови полупречници, (в. сл.). Нека су k и l додирне тачке заједничке тангенте t. Нека је t' права паралелна са t која саджи S и нека је K' њена пресечна тачка са правом OK. Због $\sphericalangle OK'S = 90°$ имамо да је t' тангента из S на круг k' са центром O и полупречником OK'. Овај полупречник OK' једнак је $R + r$ ако је t заједничка спољашња тангента, а једнак је $R - r$ ако је t унутрашња тангента. У оба случаја можемо конструисати круг k', а потом t' и t. Број решења је између 0 и 4, зависно од положаја кругова.



Сл. уз зад. 525б

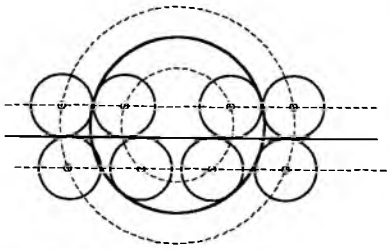


Сл. уз зад. 526

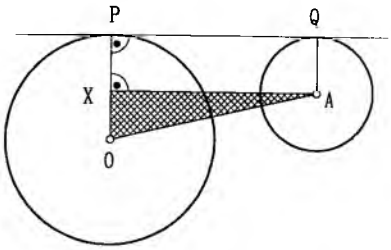
526. Нека је s симетрала дужи AB, а n нормала из центра S круга l на праву p, (в. сл.). Пресечна тачка O правих s и n је центар траженог круга. Ако је $s = n$, има бесконачно много решења. Ако је $s \| n$ и $s \neq n$, нема решења. Коначно када се s и n секу, постоји једино решење уколико је збир полупречника круга l и OA мањи од OS, а опет нема решења ако је овај збир једнак или већи од OS.

527. Нека су R и r полупречници траженог и датог круга. Центар O траженог круга је на растојању R од дате праве p, а геометријско место тачака које су на растојању R од p су две праве паралелне са p. Са друге стране, растојање међу центрима O и S траженог и датог круга једнако је $R + r$ или $|R - r|$ (зашто?), па O мора припадати једном од кругова са центром S и полупречником $R + r$ или $|R - r|$. Задатак може имати од 0 до 8 решења. Слика приказује случај са макцималним бројем решења.

528. Ако је O центар круга k, центар траженог круга добијамо у пресеку праве OM и симетрале дужи AM.



Сл. уз зад. 527



Сл. уз зад. 529

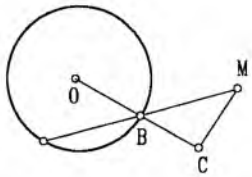
529. *Анализа.* Нека у R и r полупречници кругова k и l, (в. сл.). Нека су OP и AQ полупречници нормални на заједничку тангенту. Претпоставимо да је $R > r$ и нека је X подножје нормале из A на OP. Имамо $AX = m$ и $\sphericalangle AOX = 90°$. Ситуације је слична у преосталом случају $R \leq r$.

Конструкција. Конструишемо полукруг k' над пречником OA, а затим кругове k_1 и k_2 са центрима A и O, оба с полупречником m. Нека су X и Y пресечне тачке кругова k_1 и k_2 са k'. Кругови l_1 и l_2 са центром A и полупречницима $R - OX$ и $R + AY$ су решења задатка, (в. сл.)

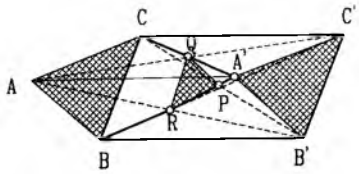
Доказ. Нека је OP полупречник круга k који садржи тачку X и нека је t тангента на k у тачки P. Нека је Q подножје нормале из A на t. Лако се доказује да је $XAQP$ правоугаоник, па следи да је $AQ = XP$. Како је XP једнако полупречнику круга l_1, следи да $Q \in l_1$ и да је t тангента на l_1. Тангента дуж PQ једнака је $AX = m$. Сасвим слично се доказује и да је l_2 решење.

Дискусија. Нема решења ако је $m > OA$ (не добијају се тачке X и Y). Ако је $m \leq OA$, имамо две могућности, зависно од тога да ли је $R \geq OX$ или је $R < OX$. У првом случају постоји једно решење (круг l_2), а у другом случају имамо два решења.

530. Одредимо тачку C (в. сл.) тако да је $OC = 2R$ и $CM = R$. Тачка B, која је у пресеку OC и датог круга припада траженој сечици. Задатак има два решења ако је $MO < 3R$, једно решење ако је $MO = 3R$ и нема решења, ако је $MO > 3R$.



Сл. уз зад. 530



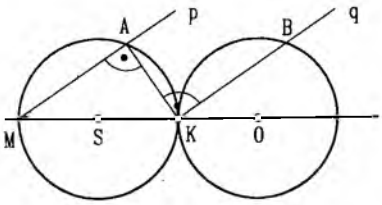
Сл. уз зад. 534

532. а) Нека је k_1' круг добијен транслацијом круга k_1 за вектор $\vec{r}$. Тада је $k_1' \cap k_2 = B$. Број решења: бесконачно (ако је $k_1' = k_2$), два, једно или ниједно.
б) Нека је k' круг добијен транслацијом круга k за вектор $\vec{r}$ и $N = k' \cap k$. Број решења једнак је броју пресечних тачака кругова k и k'.

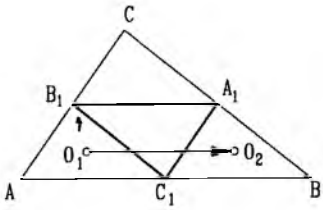
533. У паралелограму је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, па тачку C добијамо у пресеку круга k и круга добијеног транслацијом k за вектор $\overrightarrow{AB}$.

534. Због $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, четвороугао $AA'C'C$ је паралелограм. Тачка Q је његов пресек дијагонала, па следи да је Q средиште дужи $A'C$, (в. сл.). Аналогно је R средиште за $A'B$. Следи да је QR средња линија у $\triangle A'BC$, па је $QR = \frac{BC}{2}$. Аналогно је $PQ = \frac{AB}{2}$ и $RP = \frac{CA}{2}$.

535. Нека су k и l дати кругови, а S и O њихови центри, (в. сл.). Ако је $M \in k$ тачка дијаметрално супротна са K, а p и q праве одређене са M, A и K, B имамо $p \| q$, јер су обе праве нормалне на AK. Транслација за вектор $\overrightarrow{SO}$ пресликава M у K, па следи да она пресликава праву p у праву q. Иста транслација пресликава k у l, па како је $\{A\} = k \cap p$ и $\{B\} = l \cap q$, следи да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SO}$.



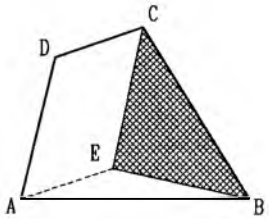
Сл. уз зад. 535



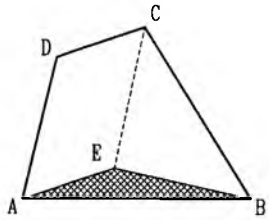
Сл. уз зад. 536

536. Троугао C_1A_1B добија се од $\triangle AB_1C_1$ транслацијом за вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, (в. сл.), па како се транслацијом (као и сваком другом изометријом) центар описаног (уписаног)круга пресликава у центар описаног (уписаног) круга, следи да је $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{S_1S_2} (= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$. На исти начин добијамо и $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{S_2S_3}$, $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{S_1S_3}$. Дакле, $\triangle O_1O_2O_3$ и $\triangle S_1S_2S_3$ имају све странице једнаке.

537. Нека су дате странице AB, BC, CD и углови γ и δ код темена C и D. Нека је тачка E добијена транслацијом тачке A за вектор $\overrightarrow{DC}$, (в. сл.). У $\triangle CEB$ знамо странице CE и CB, а $\sphericalangle ECB$ једнак је $\gamma + \delta - 180°$.



Сл. уз зад. 537

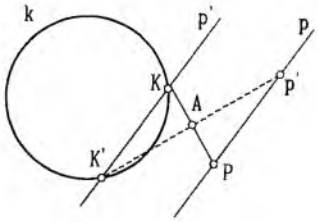


Сл. уз зад. 538

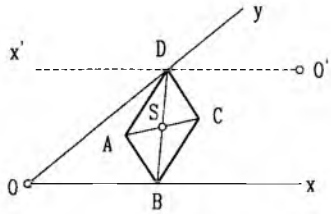
538. Нека су дати углови код темена A, B, C и странице BC и AD. Ако је тачка E добијена транслацијом тачке A за вектор $\overrightarrow{DC}$, (в. сл.), у троуглу BCE знамо две странице (BC и BE) и захваћени угао.

540. а) Нека је $k_1' = S_A(k_1)$ и $k_1' \cap k_2 = \{A, B\}$. Тражена права је права AB.
б) Нека је $p' = S_A(p)$, $p' \cap q = \{Q\}$. Тражена права је права QA.

541. Конструишимо $p' = S_A(p)$, (в. сл.). Тачку K добијамо у пресеку p' и k. Има 0, 1 или 2 решења.



Сл. уз зад. 541

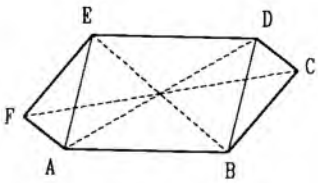


Сл. уз зад. 543

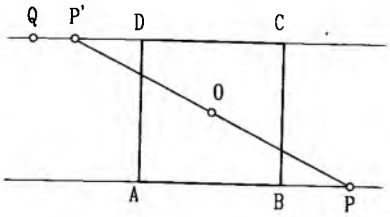
542. Нека је O центар паралелограма. Имамо $C = S_0(A)$ и $D = S_0(B)$, па следи $CD = S_0(AB)$ и зато $N = S_0(M)$.

543. Средиште S дужи AC је центар паралелограма; дакле, $S_s(B) = D$, па D добијамо у пресеку полуправих Oy и $S_s(Ox)$, (в. сл.).

544. Фигура је централно симетрична ако кругови имају једнаке полупречнике или ако су концентрични.



Сл. уз зад. 545



Сл. уз зад. 546

545. Нека је $ABCDEF$ дати шестоугао. Дужи AD и BE су дијагонале паралелограма $ABCDE$, а дужи AD и CF су дијагонале паралелограма $ACDF$. Следи да дужи AD, BE и CF имају заједничко средиште, које је онда центар симетрије шестоугла. Шестоугао не мора бити правилан, (види слику).

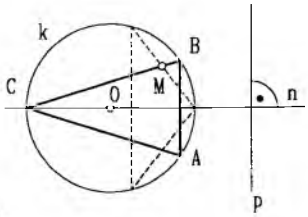
546. Тачка $P' = S_0(P)$ припада правој CD, (в. сл.). Ако је $P' \neq Q$, права $P'Q$ (коју можемо конструисати) је права CD. Растојање те праве до тачке O једнака је половини странице квадрата, па се конструкција једноставно завршава. Ако је $P' = Q$, задатак има бесконачно много решења, а ако у случају $P' \neq Q$ тачка O припада правој $P'Q$, тада нема решења.

547. а) Две; б) бесконачно много; в) две; г) три; д) четири; ђ) бесконачно много; е) једну или бесконачно много; ж) једну или две; з) једну, две или бесконачно много.

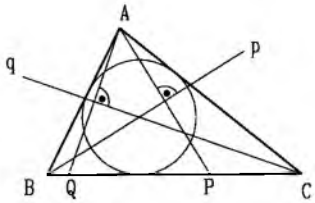
548. Нека је $\triangle ABC$ тражени и $AB \| p$. Оса симетрије троугла мора садржати центар O описаног круга и мора бити нормална на AB. Та се права може конструисати - нормала n из O на p, (в. сл.). Теме C се добија у пресеку n и k; темена на основици се потом лако конструишу. Ако је $OM \perp p$, тада задатак нема решења; у супротном, постоје два решења.

549. Темена на круговима су симетрична у односу на p; њих прво конструишемо. Тиме је добијена једна дијагонала ромба, а њен пресек са p је центар ромба. Преостала два темена су тачке на p на растојању $d/2$ од конструисаног центра.

550. Нека је $B' = S_p(B)$. Тражена тачка је пресек правих p и AB'. Нема решења ако p садржи средиште дужи AB, а није нормална на AB; ако је $p \perp AB$ и p садржи средиште дужи AB има бесконачно много решења. У осталим случајевима задатак има једно решење.



Сл. уз зад. 548



Сл. уз зад. 551

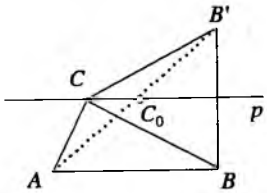
551. Тачке $P = S_p(A)$ и $Q = S_q(A)$ припадају правој BC, (в. сл.). Конструишемо прво њих, а онда темена B и C у пресеку правих p и q са правом PQ. Задатак нема решења кад је $p \| q$ (тада $A \in BC$) и кад је дуж која спаја A са пресечном тачком правих p и q нормална на p или q (тад је $PQ \| p$ или $PQ \| q$). У преосталим случајевима постоји једно решење.

552. Нека је p права паралелна са AB на растојању h_c и нека је $B' = S_p(B)$. Нека је C_0 пресек дужи AB са p, (в. сл.). Тада је $\triangle ABC_0$ једнакокраки и за сваку тачку $C \in p$ $(C \neq C_0)$ имамо $AC + CB = AC + CB' > AC_0 + C_0B' = AC_0 + C_0B$, па је обим $\triangle ABC$ већи од обима $\triangle ABC_0$.

553. Оса симетрије троугла мора садржати једно теме троугла и тад су странице којима је то теме заједничко једнаке. Следи да ако троугао има две осе симетрије, тада све три његове странице морају бити једнаке. Но, тада он има и трећу осу симетрије.

555. а) Како је $R_{S,60^\circ}(A) = B$, то $B \in R_{S,60^\circ}(a) = a_1$, па је $a_1 \cap b = \{B\}$ и $A = R_{S,-60^\circ}(B)$.
б) Нека је $R_{A,90^\circ}(p) = p'$. Тада је $p' \cap q = \{D\}$.
в) 1° $R_{A,60^\circ}(q) = q'$, $q' \cap r = \{C\}$; 2° слично као под 1°.

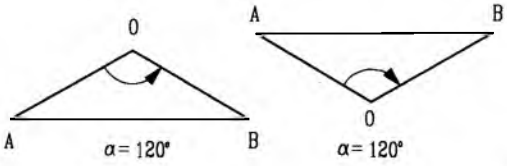
556. Ако је $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, троугао OAB је једнакокраки са основицом AB и углом α код темена C и уз то је позитивно оријентисан, па је тачка A једнозначно одређена. Ако је



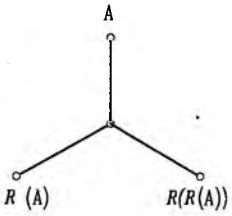
Сл. уз зад. 552

$-180° < \alpha < 0$, троугао OAB је једнакокраки са основицом AB и углом $|\alpha|$ код темена C и уз то је негативно оријентисан, па је опет једнозначно одређен. Коначно, ако је $\alpha = 180°$, тад је O средиште дужи AB. Слика илустује случајеве $\alpha = \pm 120°$.

557. Дужи које спајају O са трима наведеним тачкама су једнаке и граде три угла од 120°, (в. сл.).

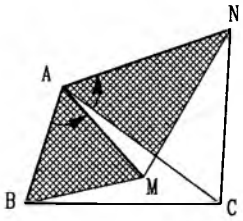


Сл. уз зад. 556

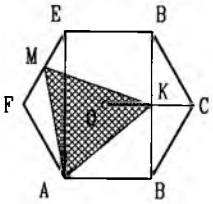


Сл. уз зад. 557

558. Ротација за 60° око тачке A преводи B у M, а C у N. Дуж BC се тако пресликава у MN, па те дужи морају бити једнаке, (види слику).



Сл. уз зад. 558



Сл. уз зад. 560

559. Ротирати дати квадрат за 60°.

560. Нека је O центар шестоугла, (в. сл.). Ротација за 60° око тачке A пресликава O у F, а C у E. Како је K средиште дужи OC (зашто?), следи да наша ротација пресликава K у M. То већ значи да је ΔAMK једнакостранични.

562. $1cm, 1cm, 0,8cm$.

563. Како је $A_1C = BC_1 = B_1A$, $CB_1 = A_1B = AC_1$, $\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle A_1CB_1 = 120°$, то су троуглови A_1CB_1 и B_1AC_1 подударни, одакле следи да је $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$.

564. Троуглови EPM и HQM су подударни, одакле следи да је $EP = HQ$. (Са P и Q су означена подножја нормале из M на q и p, из подударности троугла FPM и GQM следи $FP = GQ$, па је $GH = EF$.

565. Углови AKE и AKH су једнаки јер су оба једнака половини $\sphericalangle A$. Одавде следи да су троуглови AKH и AKE подударни и једнакокраки.

566. Нека O теме датих углова. Доказати да су троуглови AOB и AOC једнакокраки.

567. Ако је L подножје висине из темена C, биће троуглови ACL и DAF подударни, па је $AL = DF$. Слично подударни су троуглови CBL и BHM, па је $MH = BL$.

568. $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA$, као трансверзални. $\sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle CAB$, због симетричности тачака B и B_1, па је $\sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle DCA$ и $\triangle AEC$ је једнакокраки ($AE = EC$). Како је $DA = CB = CB_1$, а $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CEB_1$, као унакрсни, биће правоугли троуглови ADE и CB_1E подударни.

571. Доказати да је сваки од углова, које симетрала гради са наспрамном страницом већи од половине угла, који та симетрала полови.

572. $36°, 36°, 108°$.

573. Нека је K тачка на AB тако да је $AK = AE$. Троуглови ADE и ADK су подударни. Означимо $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADK = \phi$. Сада је спољашњи угао $\triangle ADK$ $\sphericalangle DKB = \frac{\alpha}{2} + \phi$. Такође је: $\sphericalangle DEC = \frac{\alpha}{2} + \phi$. Из $\triangle ECD$ следи $\gamma = 180° - \frac{3\alpha}{2} - \phi$, где је $\gamma = \sphericalangle C$, а из $\triangle ABC$: $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - \alpha - (180° - \frac{3\alpha}{2} - \phi) = \frac{\alpha}{2} + \phi$, где је $\beta = \sphericalangle B$. Дакле, $\sphericalangle DKB = \sphericalangle KBD$, па је $\triangle BDK$ једнакокрак: $DB = DK$. Због $DK = DE$, биће и $BD = DE$.

574. Како је MN средња дуж троугла BCD, то је $MN \| BC$, тј. $MN \perp CA$. У троуглу ACM $CD \perp AM$, $MN \perp CA$, па је тачка N ортоцентар, значи AN је трећа висина троугла, тј. $AN \perp MC$.

575. Нека је M средиште дужи BE. Тада је $FM \| DB$, па је $FM \perp CD$, а како је и $DE \perp MC$, то је F ортоцентар троугла DMC, дакле $CF \perp DM$. Како је $AE \| DM$, то је и $CF \perp AE$.

576. *Први начин:*
Означимо $\alpha_1 = \sphericalangle BOA_1, \alpha_2 = \sphericalangle COA_1, \alpha_3 = \sphericalangle OBA_1, \alpha_4 = OCA_1$, где је A_1 подножје висине из A, затим $\sphericalangle ABC = \beta, \sphericalangle BCA = \gamma$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. Из правоуглих троуглова се добија $\alpha_1 + \alpha_3 = 90°, \alpha_2 + \alpha_4 = 90°, \beta - \alpha_3 = 90° - \alpha, \gamma - \alpha_4 = 90° - \alpha$. Из прве две релације је $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - (\alpha_3 + \alpha_4)$, а из друге две $\beta + \gamma - (\alpha_3 + \alpha_4) = 180° - 2\alpha$, тј. $\alpha = \alpha_3 + \alpha_4$, па је $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - \alpha$.
Други начин:
$\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle BAC$ су углови са нормалним крацима у супротном смеру, па су суплементни.

577. Ако су t_a, t_b, t_c дужине тежиних дужи, а T - тежиште троугла ABC, биће из троугла ATB: $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b > c$, тј. $t_a + t_b > \frac{3}{2}c$. На исти начин је $t_a + t_c > \frac{3}{2}b$ и $t_b + t_c > \frac{3}{2}a$. Сабирањем ових једнакости добијамо $t_a + t_b + t_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$.

578. Ако је $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, тада је и $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Дакле, наспрамне странице AD и BC четвороугла $ABCD$ су паралелне и једнаке, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

579. $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$; $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = \frac{1}{3}(8\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})$.

580. Упутство. Ако су T_1 и T_2 тежишта троуглова $M_1M_3M_5$ и $M_2M_4M_6$ тада (по задатку 401б) важи $\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_5})$ и $\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{OM_6})$, где је O произвољна тачка. Коришћењем овога и чињенице да је $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \ldots, \overrightarrow{OM_6} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA})$, доказати да је $\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OT_2}$, одакле следи да је $T_1 = T_2$.

581. Из петоугла $MNPCD$ је $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$. Из четвороугла $NPBA$ је $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, јер

је $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, а вектори $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NA}$, односно $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{BP}$ су супротни вектори.

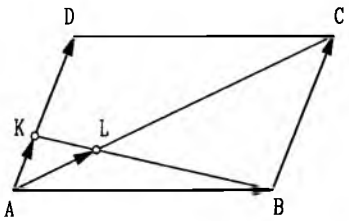
582. Одредимо тачку D на правој OB тако да је $OD = OB$ и $B - O - D$ и нека је $OD \cap AC = \{S\}$. Како је $BO : OC = 2 : 1$, то је $OS = OD$, а како је $SA = SC$, то је четвороугао $AOCD$ паралелограм, па је $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$. Сада је $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, тј. $-\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, одакле је $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = -(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

583. Из многоугла $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ је $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1} = \overrightarrow{0}$. Како је $\overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_2C_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C_2A_1} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, то је и $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

584. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BC_1})$. Збир у првој загради је $\overrightarrow{0}$, а сваки вектор у другој загради добија се ротацијом одговарајућег вектора из прве заграде за $60°$, па је и збир у другој загради једнак $\overrightarrow{0}$.

585. Како је $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER}$ и $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CR}$, то је $2\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC}$. На сличан начин се доказује да је $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EB}$, па је $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$, а то је неопходан и довољан услов да четвороугао $PQRS$ буде паралелограм.

586. Како је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то је $5\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, односно $5\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$. Како је $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$, то су тачке K, L и B колинеарне и $KL : LB = 1 : 4$.



Сл. уз зад. 586

587. Нека је S пресечна тачка кругова описаних око троуглова ARQ и BPR. Тврђење ће бити доказано ако докажемо да је и $\sphericalangle QSP = 180° - \gamma$. Претпоставимо са је S у унутрашњости троугла ABC (остали случајеви се слично доказују). Тада је $\sphericalangle QSR = 180° - \alpha$, $\sphericalangle PSR = 180° - \beta$ и $\sphericalangle QSR = 360° - (\sphericalangle QSR + \sphericalangle PSR) = 180° - \gamma$.

588. Из $\triangle ABC$ имамо $\sphericalangle BAD = 180° - 80° - 50° = 50°$, па је $AD = BD$. Ако конструишемо круг са средиштем D и полупречником DA пошто су углови ADB и ACB са исте стране тетиве AB и пошто је $\sphericalangle ADB = 80° = 2\sphericalangle ACB$, то и тачка C припада поменутом кругу (однос централног и периферијског угла). Стога је $BD = CD$, троугао DBC једнакокраки и $\sphericalangle BDC + 2\sphericalangle DBC = 180°$. Како је $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC + 30°$, добија се да је $\sphericalangle DBC = 70°$.

589. $\sphericalangle PBA = \sphericalangle BDA$, као угао између тетиве и тангенте и периферијски угао над том тетивом; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDA$ јер је $\triangle ABD$ једнакокраки, па је $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABP$.

590. Нека је T средиште тетиве MN. Како је $OT \perp NM$, то се дуж OM види из тачке T под правим углом, па је тражено геометријско место круг конструисан над дужи OM као пречником.

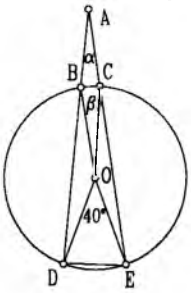
591. Искористити чињеницу да се све овакве тачке K налазе на кругу конструисаном над дужи BM као пречником, где је M средиште дужи, која спаја B и центар описаног круга $\triangle ABC$.

592. а) $d = b - a$; б) $a \leq b < 2a$.

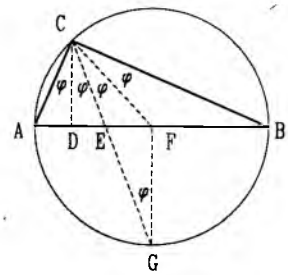
593. $MN \| PQ$, па је $MNQP$ трапез. NQ је тежишна дуж правоуглог троугла AQC, па је $NQ = \frac{AC}{2}$. Такође је и $MP = \frac{1}{2}AC$, па је $NQ = MP$.

594. Нека је ABC_1 троугао симетричан датом у односу на праву AB и $K_1 = S_{AB}(K)$. Тада је $\sphericalangle AOK = \sphericalangle POB$ (јер је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$) и $\sphericalangle K_1OA = \sphericalangle AOK$, па је и $\sphericalangle POB = \sphericalangle K_1OA$, односно тачке K_1, O и P су колинеарне. Пошто је $AM \perp BC$ и $K_1P \perp BC$, биће $AM \| K_1P$. Осим тога ови одсечци се налазе између паралелних правих C_1A и BC, па је $AM = K_1P = KO + OP$.

595. Нека је β централни угао, који одговара мањем луку $\overset{\frown}{BC}$ (в. сл.). Тада је $\beta : 40 = 3 : 10$, одакле је $\beta = 12°$, а $\sphericalangle BEA = \frac{\beta}{2} = 6°$, као периферијски угао над BC. На исти начин $\sphericalangle DBE = 20°$. Због тога је $\sphericalangle ABE = 160°$, па је $\alpha = 180° - (160° + 6°) = 14°$.



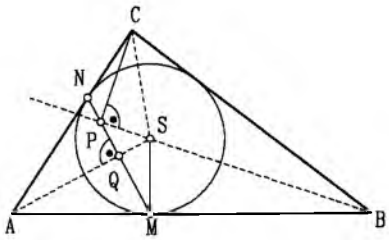
Сл. уз зад. 595



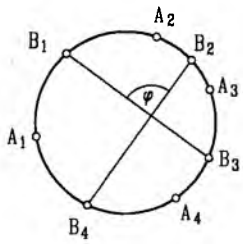
Сл. уз зад. 596

596. Нека симетрала угла C сече описани круг у тачки G (види слику). Како је $\sphericalangle ACG = \sphericalangle GCB = 2\phi$, то је $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{GB}$, па је FG симетрала странице AB. Пошто је и $CD \| FG$, то је $\sphericalangle DCE = \sphericalangle EGF = \phi$, па је троугао CGF једнакокраки и симетрала основице CG пролази кроз теме F. Према томе, F је пресек симетрале две тетиве CG и AB, тј. F је средиште описаног круга. Следи да је AB пречник, па је $\sphericalangle ACB = 90°$. Одавде налазимо да је $\phi = 22°30'$, а $\sphericalangle CAD = 90° - \phi = 67°30'$ и $\sphericalangle ABC = 90° - 3\phi = 22°30'$.

597. Имамо да је (в. сл.) $\sphericalangle PNC = 180° - \sphericalangle ANQ = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$ (*), $\sphericalangle PSC = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (**), па је $\sphericalangle PNC + \sphericalangle PSC = 180°$ (из (*) и (**)) и четвороугао $PNCS$ је тетиван. Одавде следи да су и периферијски углови над тетивом SC једнаки: $\sphericalangle SPC = \sphericalangle SNC = 90°$, па је и $\sphericalangle BPC = 90°$. Доказ је сличан ако се тачка P налази ван троугла ABC.



Сл. уз зад. 597



Сл. уз зад. 599

598. Нека $AB = 6, AC = 7$ и $BC = 9$ и R_a, R_b, R_c дужине полупречника кругова са средиштима у A, B, C. Тада је $R_a + R_b = 6, R_c - R_a = 7$ и $R_c - R_b = 9$, одакле се лако налази $R_a = 4, R_b = 2, R_c = 11$.

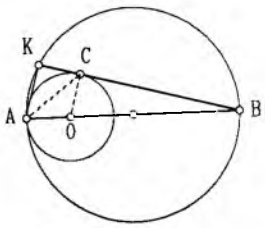
599. Нека је α_i централни угао, који одговара луку A_iB_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ и ϕ угао између дужи B_1B_3 и B_2B_4 (в. сл.). Тада је

$$\varphi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2},$$

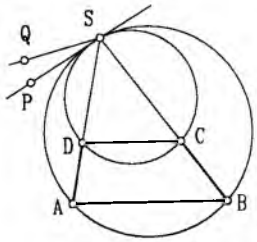
а како је $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 360°$, то је $\varphi = 90°$.

600. Четвороугао $AQMP$ је тетиван, јер је $\sphericalangle APM + \sphericalangle AQM = 180°$. Како су периферијски углови над тетивом PM, $\sphericalangle PAM$ и $\sphericalangle PQM$ једнаки, а $\sphericalangle PQM = \sphericalangle KAQ$, као углови са нормалним крацима, биће и $\sphericalangle PAM = \sphericalangle KAQ$.

601. Нека је O средиште мањег круга (в. сл.). Због $AK \| OC$ и $OA = OC$, биће $\sphericalangle KAC = \sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO$.



Сл. уз зад. 601



Сл. уз зад. 602

602. Нека је PS тангента мањег, а QS већег круга. Тада је $\sphericalangle PSD = \sphericalangle SCD$ и $\sphericalangle QSD = \sphericalangle SBD$ (в. сл.), па је $\sphericalangle PSD = \sphericalangle QSD$, $PS = QS$ и кругови се међусобно додирују.

603. Нека су Q и R тачке у којима уписани круг додирује странице BC и AC. Како је $S_{s_a}(CR) = MP$ и $S_{s_b}(CQ) = NP$ и $CR \cong CQ$, то је и $MN \cong PN$.

605. Транслирати крак Ox у смеру осе q за дужину d.

606. Исто као у претходном задатку.

Глава VI – Рационални алгебарски изрази

607. а) $6x^3 - 4x^2 + 8x + 5$; б) $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 3$.

608. а) $2x^2 + a$; б) $2x^2 + 3x - 2a^2$; в) $7x^2y + 7xy^2 - 2xy + y^2$; г) $-\frac{1}{2}x^3y$; д) $2x^a$; ђ) a^x.

609. а) $x^3 + 3x^2 - 7x$; б) $4x^4 - 12x^3 + 33x^2 + 7x - 2$; в) $4x^5 - 5x^4 - x^3 + 24x^2 + 30x + 9$; г) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

610. а) $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$; б) $ax + by$; в) $x^5 - y^5$; г) $a^{2x}b^{3y} - 2a^{x+y}b^{2y} - 3a^xb^{x+2y}$.

611. а) $P(x) + Q(x) = 2x^2 - 2x$, $Q(x) - P(x) = 2x - 2$;
б) $P(x) + Q(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + 2$, $P(x) - Q(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 2x - 2$;
в) $P(x) + Q(x) = 4x^5 - 3x^4 - 7x^2 - x + 3$, $Q(x) - P(x) = -4x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 7x + 7$;
г) $P(x) + Q(x) = (a + b)x^3 + (b - 2a)x^2 - 2ax + 3b + 8a$,
$P(x) - Q(x) = (a - b)x^3 + (b + 2a)x^2 - 2ax + 3b - 8a$;
д) $P(x, y) + P(x, y) = 2x^3 + 6xy^2$, $P(x, y) - Q(x, y) = 2y^3 + 6x^2y$;
ђ) $P(x, y) + Q(x, y) = -\frac{1}{3}xy - 2x$, $P(x, y) - Q(x, y) = \frac{5}{3}xy - x + 2y$.

612. а) $x^3 - 1$; б) $x^3 + 27$; в) $6x^3 - 31x^2 + 47x - 42$; г) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x + 8$; д) $4x^4 - 4x^3y - 4x^2y^3 - 18x^2y^2 + 12xy^4 + 12xy^3 - 6y^5$; ђ) $xy^2 - x^2y - xz^2 + x^2z + yz^2 - y^2z$.

613. а) $2x^2y^2$; б) $-2x^{10}y^3$; в) $4x^6y^{10}$; г) x^2y^{2n+1}; д) xy; ђ) x^2y^7; е) xy^2; ж) $16a^{6n}b^{9m}$; з) x^4; и) $x^{14}y^2$; ј) x^my^{4m}; к) y^{2n}.

614. а) $5(a+x)$; б) $2(a-1)$; в) $7(a-2)$; г) $3(a^2+3)$; д) $3(a+2b+3)$; ђ) $x(6+a+b)$; е) $3(3a^2-2a+4)$.

615. а) $a^2(1-a)$; б) $3a(a-2)$; в) $x^3(a^2-1)$; г) $a(3a^2+2a+1)$; д) $x(4x-2+y)$; ђ) $x^3y(y^2-1+xy^2)$.

616. а) $x^2y^3(x-y^5)$; б) $2xy^2(3x-2y)$; в) $5x^2(x-3y^3)$; г) $3x^2y(2x-3y+xy)$; д) $x^3(1-x^4-2x^2)$.

617. а) $ab^2(a^2+2a^3-4b^3)$; б) $3a^2b^3(a-3b+4a^3b)$; в) $5x^3y(3-2x-xy^2)$; г) $7x^3y^2(2x-5xy+3y^2)$; д) $3a^5b^7(7a^2b^3-4a^3+5b^5-6)$; ђ) $7x^4a^3(2a^5-3a^2x^4-2x^3-12)$.

618. а) $(m+n)(a+b)$; б) $(a-b)(m+n)$; в) $(m-n)(x-y)$; г) $(a-b)(x-5)$; д) $(p-q)(7q-2p)$; ђ) $(x-3)(2m+5n)$; е) $(a-b)(2k+1)$; ж) $(x+y)(3+x+y)$; з) $(a-b)(a-3b)$; и) $(x+y-z)(2a-3b-5z)$.

619. а) $a^n(a^n+1)$; б) $a^{2x}(a^x-b^x)$; в) $2x^n(x^m+3)$; г) $a^x(a^{2x}+3a^x+5$; д) $3a^{2x}(2-3a^x+b^x)$.

620. а) $(a+b)(m-n)$; б) $(a-b)(m-n)$; в) $(a-x)(b+y)$; г) $(a-m)(n-b)$; д) $(x+y)(5a-1)$; ђ) $(x-y)(2x-1)$; е) $(m-n)(4y-1)$; ж) $(x-y)(x-2)$; з) $(3b-2a)(2y-5x)$; и) $(a-b)(x^2+x-1)$; ј) $(x-2)(5ax-b-1)$; к) $(xy-1)(3x^3y^4+xy+z)$; л) $(mx-n)(mx^3+2x-1)$.

621. а) $(x+7)(x-7)$; б) $(a-6)(a+6)$; в) $(4x-3)(4x+3)$; г) $(3x-7)(3x+7)$; д) $(x-\frac{1}{7})(x+\frac{1}{7})$; ђ) $(\frac{x}{2}-\frac{2}{3})(\frac{x}{2}+\frac{2}{3})$; е) $(\frac{3x}{2}-\frac{2y}{3})(\frac{3x}{2}+\frac{2y}{3})$; ж) $(\frac{7x}{5}-3y)(\frac{7x}{5}+3y)$; з) $(x-0,6)(x+0,6)$; и) $(x-0,03)(x+0,03)$; ј) $(0,2x-0,5)(0,2x+0,5)$; к) $(0,1x-0,2y)(0,1x+0,2y)$; л) $(x^2y-0,1)(x^2y+0,1)$; љ) $(0,5xy-0,01)(0,5xy+0,01)$.

622. а) $(x-5)(x-1)$; б) $(a+2)(a+8)$; в) $x(2y-x)$; г) $-y(2x+y)$; д) $(2-x)(3x+2)$; ђ) $(2x+1)(4x-1)$.

623. а) $-(3x+5y)(5x+3y)$; б) $8(x-4y)(y-x)$; в) $-(3x+7y)(7x+3y)$; г) $(x-17)(11x-7)$; д) $4x(y-z)$; ђ) $(y-5)(2x+y-1)$.

624. а) $98\cdot 102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=10000-4=9996$;

625. а) x^2-4x+4, $\quad x^3-6x^2+12x-8$;
б) $x^2+6xy+9y^2$, $\quad x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$;
в) $x^2+2x^3+x^4$, $\quad x^3+3x^4+3x^5+x^6$;
г) $a^6-4a^4+4a^2$, $\quad a^9-6a^7+12a^5-8a^3$;
д) $x^4y^2-2x^3y^4+x^2y^6$, $x^6y^3-5x^5y^5+3x^4y^7-x^3y^9$;
ђ) $((x+y)+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, $((x+y)+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz$;
е) $((x-y)+z)^3=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$, $((x-y)+z)^3=x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z-3yz^2-6xyz$.

626. а) $11^2=(10+1)^2=100+20+1=121$
б) $99^3=(100-1)^3=100^3-3\cdot 100^2\cdot 1+3\cdot 100\cdot 1^2-1^3=1000000-30000+300-1=970299$.

627. а) $(a-2)(a^2+2a+4)$; б) $(4a+1)(16a^2-4a+1)$; в) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$; г) $(x-4ay)(x^2+4axy+16a^2y^2)$; д) $(2ax+y^2)(4a^2x^2-2axy^2+y^4)$; ђ) $a(a^2+3ab+3b^2)$; е) $-y(3x^2-3xy+y^2)$; ж) $-(2x+3)(13x^2-15x+9)$; з) $-2b(3a^2+b^2)$; и) $(0,4-x)(0,16+0,4x+x^2)$; ј) $(0,2+0,1x)(0,04-0,02x+0,01x^2)$; к) $(1,3x-1)(0,79x^2-1,7x+1)$; л) $-(0,5x+1)(1,75x^2+2,5x+1)$; љ) $(\frac{1}{2}-\frac{x}{3})(\frac{1}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{9})$; м) $(\frac{4}{3}+y)(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}y+y^2)$; н) $2(2b-a)(13a^2-16ab+7b^2)$; њ) $(2a-3)(a^2-3a+3)$; о) $(5y-x)(19x^2+5xy+7y^2)$; п) $(x-5y)(19x^2+5xy+7y^2)$; р) $5(x-y)(7x^2-11xy+7y^2)$.

628. а) $(a-3)^2$; б) $(3a+1)^2$; в) $(5x+4y)^2$; г) $4(x^2+y)^2$; д) $a^3(a^2-b)^2$; ђ) $x(3x^2+y)^2$; е) $(\frac{1}{2}a+1)^2$; ж) $(x-\frac{1}{4})^2$; з) $(x+y+2)^2$; и) $(3x-y+z)^2$; ј) $(a+2b)^3$; к) $(5a-b)^3$; л) $(2x+3y)^3$; љ) $(3a-5b)^3$.

629. а) *Први начин:* $x^2-(3-2)x+3(-2)=x^2-3x+2x+3(-2)=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2)$;
Други начин:

$$x^2-x+(\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{24}{4}=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}=(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2})=(x-3)(x+2);$$

б) $(x+2)(x+4)$; в) $(x+7)(x+5)$; г) $(x-4)(x+1)$; д) $(x-10)(x+3)$; ђ) $(b-9)(b+7)$; е) $(b-5)(b+10)$; ж) $(a-4b)(a+7b)$; з) $(2x-y)(x+3y)$; и) $(y-a)(y-a-1)$; ј) $a^2(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)$; к) $n(n+1)(n+2)$; л) $(x-1)(3x+8)$; љ) $(x-2)(5x+22)$; м) $x(2x-1)(x+3)$; н) $x(6x-1)(2x+1)$.

630. а) $(x+y-z)(x+y+z)$; б) $(x-y-z)(x-y+z)$; в) $(x-y-3)(x-y+3)$; г) $2(x+y-1)(x+y+1)$; д) $a(a-2b-1)(a-2b+1)$; ђ) $b^2(2a-b-2)(2a-b+2)$.

631. а) $ab(a-b)$; б) $2(x-y)(x+y)$; в) $a(a-1)(a+1)$; г) $a^2(a+1)(a-1)$; д) $5x(x-2y)(x+2y)$; ђ) $yz^2(x-1)(x+1)$; е) $(x-y)(x+y+1)$; ж) $(x+y)(x-y-1)$; з) $(x-y)(x+y-1)$; и) $x(x^2+1)(x-1)(x+1)$; ј) $ab(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$; к) $(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$; л) $(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y)$; љ) $(x+y)(x^2-xy+y^2-x+y)$.

632. а) $a^2b^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$; б) $x^4y^3(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$; в) $(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$; г) $(a^2+3)(a^4-3a^2+9)$; д) $(x^2+a^4)(x^4-a^4x^2+a^8)$; ђ) $(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$; е) $(x^5-2y^3)(x^{10}+2x^5y^3+4y^6)$; ж) $7x^7(x+2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)$; з) $(a-b)(a^2+ab+b^2-27)$; и) $a(a-b)(a+b)^2(a^2-ab+b^2)$; ј) $(2x+5)(x-1)(x^2+x+1)$; к) $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$; л) $(x-1)(x+1)(p-q)(p^2+pq+q^2)$; љ) $(x-1)(x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$; м) $(x-1)(y-1)(x^2+x+1)(y^2+y+1)$; н) $(a+2)(b-1)(b+1)(a^2-2a+4)$.

633. а) $2y(2y+3a)^3$; б) $3x(3x+2y)^3$; в) $3x(2x-3a)^3$; д) $2y(3y-2a)^3$.

634. а) $x^3-4x^2+13x-9$; б) $-x^4+2x^2+1$; в) $-4a^3-13a^2-6a+7$; г) a^2+b^2-2bc.

635. а) $x+y$; б) $c-5$; в) $(a-b)^2$; г) $2a-1$; д) $9-6a+4a^2$.

636. а) $P(2)=8$; б) $P(1-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2}$.

637. а)

$$
\begin{array}{l}
-\left\{\begin{array}{l}(2x^5-5x^4-2x^3+12x^2-9x+2):(x^2-3x+2)=2x^3+x^2-3x+1\\ 2x^5-6x^4+4x^3\end{array}\right.\\
\qquad -\left\{\begin{array}{l}x^4-6x^3+12x^2-9x+2\\ x^4-3x^3+2x^2\end{array}\right.\\
\qquad\qquad -\left\{\begin{array}{l}-3x^3+10x^2-9x+2\\ -3x^3+9x^2-6x\end{array}\right.\\
\qquad\qquad\qquad -\left\{\begin{array}{l}x^2-3x+2\\ x^2-3x+2\end{array}\right.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

б)

$$
\begin{array}{l}
-\left\{\begin{array}{l}(x^3-5x^2+3x-2):(x^2-x+1)=x-4\\ x^3-x^2+x\end{array}\right.\\
\qquad -\left\{\begin{array}{l}-4x^2+2x-2\\ -4x^2+4x-4\end{array}\right.\\
\qquad\qquad -2x+2
\end{array}
$$

в) x^2+1 и остатак $2x+1$; г) x^2-x и остатак 1; д) x^2-3x+5 и остатак $x-1$.

638. Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x-1$ је по Безуовој теореми једнак $p(1)$. Резултати: а) 1; б) 0; в) 2.

639.

а) $Q(x)=x-1,\quad R(x)=1$; б) $Q(x)=3x-2,\quad R(x)=-6$;

в) $Q(x)=x+1,\quad R(x)=-2x-1$; г) $Q(x)=x^2+x-1,\quad R(x)=1$;

д) $Q(x)=x^2+3x+5,\quad R(x)=0$; ђ) $Q(x)=1,\quad R(x)=4x-14$;

е) $Q(x) = 0, \quad R(x) = x + 3;$ ж) $Q(x) = x - \frac{1}{3}, \quad R(x) = \frac{1}{6};$

з) $Q(x) = 4x^2 + x - 1, \quad R(x) = 5x + 3.$

640. а) Полиноми су идентички једнаки ако су им једнаки коефицијенти уз одговарајуће степене. Дакле, треба да буде $3 = b$, $-a = -4$, $2 = b - 1$ и $5 = 5$, тј. $a = 4$, $b = 3$. б) $a = 0$, $b = -4$; в) $a = 5$, $b = 4$.

641. а) Да би било $x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, мора бити $a = 1$, $a + b = -2$, $c = 3$ и $(b + c) = 0$, одакле се добија $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$.
б) $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$; в) $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$; г) $a = 6$, $b = -17$, $c = 12$;
д) из $x+5 = (a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c)x + (6a+3b+2c)$, мора бити $a+b+c = 0$, $5a+4b+3c = -1$ и $6a + 3b + 2c = 5$, одакле се добија $a = 3$, $b = -7$ и $c = 4$. ђ) $a = 3$, $b = 12$, $c = 11$.

642. а) Како је $p(2)$ једнако $16 - 16m$, то је полином дељив са $x - 2$ ако је $m = 1$.
б) Пошто је $p(1) = 2 - 5m$, то је остатак једнак 7 ако је $m = -1$.

643. а) Приметимо да је $p(-1) = 0$. Одавде закључујемо да је полином p дељив са $x + 1$. Када извршимо то дељење добијамо количник $x^2 + 8x + 15$ тј. добијамо да је $p(x) = (x+1)(x^2 + 8x + 15) = (x+1)(x+3)(x+5)$.
б) $p(2) = 0; p(x) = (x-2)(x^3 - 3x - 2) = (x-2)^2(x+1)^2$. в) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. г) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$. д) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. ђ) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

644. а) С обзиром да је $p(1) = 0$ закључујемо да је полином $p(x)$ дељив са $x - 1$ (Безуова теорема). Када извршимо то дељење, добијамо количник $x^2 - 5x + 6$, тј. добијамо да је $p(x) = (x-1)(x^2 - 5x - 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
б) Због $p(1) = 0$ делимо $p(x)$ са $x-1$ и добијамо количник $q(x) = x^3 + 2x + 3$. Због $q(-1) = 0$, делимо $q(x)$ са $x+1$ и добијамо $q(x) = (x+1)(x^2 - x + 3)$, тј. $p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 3)$.

645. По Безуовом ставу је $p(-2) = 0$, односно $-8a + 12a - 6 = 0$, тј. $a = \frac{3}{2}$.

646. Уочимо да је $p(2) = 0$ и применимо последицу Безуове теореме.

647. Из $p(3) = p(1) + 6$ и $p(-1) = 2p(1)$ налазимо $k = 1$, $l = 2$.

648. Из $p(-1) = p(1) = p(4)$ налазимо $k = -2$, $l = 1$.

649. а) $p(2) + p(-2) = 6$, $m = 1$; б) $p(1) - p(-1) = 8$, $p(1) + p(-1) = 2$, па је $p(1) = 5$, $p(-1) = -3$, одакле налазимо $k = 3$, $l = 2$.

650. $a = 1$, $b = -5$. **651.** $m = -3$, $n = -1$.

652. Ако у $p(x) = (x^2 - 5x - 14)q(x) + 2x + 4$ заменимо $x = 7$ и $x = -2$ добијамо $p(7) = 18$, $p(-2) = 0$.

653. а) $A(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$, $B(x) = (x+1)(x+3)$, НЗД$(A(x), B(x)) = x + 1$;
б) $A(x) = (x-1)(x+1)$, $B(x) = (x-1)(x-2)$, $C(x) = (x-1)(x+2)$, НЗД$(A(x), B(x), C(x)) = x - 1$;
в) НЗД$(A(x), B(x)) = (x-2)^2(x^2 + x + 1)$;
г) Дати полиноми могу се написати као $(a-b)(a+b)$, $(a-b)^2$, $(a-b)(a-2b)$. Њихов НЗД је $a - b$;
д) $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$; ђ) $x - 1$; е) $x(x-2)$; ж) x.

654. а) $10a^3$; б) $18ab^2$; в) $180a^3$; г) $42a^2b^5$; д) $12abc$; ђ) $30a^2b^2c^2$.

655. а) $x^2 - y^2$; б) $a^2 - b^2$; в) $x(x^2 - 1)$; г) $3(a-b)(a+2)$; д) $2(a^2 - b^2)$; ђ) $6(a^2 - b^2)$; е) $-(a^2 - b^2)$; ж) $6a(a^2 - 9)$.

656. а) $(x^2 - y^2)^2$; б) $(x+y)(x^2 - y^2)$; в) $(a^2 - b^2)^2$; г) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2$; д) $a^3 - b^3$; ђ) $a^3 + b^3$; е) $a^3 + 27$; ж) $a^3 - 125$.

657. а) $xy^2(x^2 - y^2)$; б) $x^2(x-1)(x+1)^2$; в) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = x^6 - y^6$; г) $12x^2(x^2 - 1)^2$; д) $x^2(3x - 2y)^2(3x + 2y)$; ђ) $(4x^2 + 3)(x - 2)(3x + 1)$.

658. а) $x \neq 7$; б) $x \neq y$; в) $p \neq -q$; г) $x \neq -\frac{1}{2}$; д) $x \neq y$ и $x \neq 3y$; ђ) $x \neq -1$; е) $x \neq 2y$ и $x \neq 3y$; ж) $a \neq \pm 1$.

659. а) c за $bc \neq 0$; б) d за $bcd \neq 0$; в) $\frac{a}{2c}$ за $ac \neq 0$; г) -1 за $x \neq y$; д) $-\frac{1}{x+y}$ за $x \neq \pm y$; ђ) $\frac{a-b}{a+b}$ за $a \neq -b$; е) $\frac{a}{a-2}$ за $a \neq 2$; ж) $\frac{a+3}{b}$ за $b \neq 0$ и $a \neq -3$; з) $\frac{a-4}{ab}$ за $ab \neq 0$ и $a \neq \pm 2$; и) $\frac{y(x-5)}{x}$ за $xy \neq 0$ и $x \neq -5$; ј) $\frac{x+y}{x(x-y)}$ за $xy \neq 0$ и $x \neq y$.

660. а) $\frac{a}{a-b}$, за $a, b \neq 0$ и $a \neq \pm b$; б) $\frac{a+1}{a-2}$, за $a \neq 0$ и $a \neq 2$; в) $\frac{ab}{a+2}$, за $a, b \neq 0$ и $a \neq -2$; г) $\frac{a}{b}$, за $a, b \neq 0$ и $|a| \neq 2$; д) 1, за $a, b \neq 0$ и $a \neq \pm b$; ђ) 2, за $a, b \neq 0$ и $a \neq \frac{3}{2}b$; е) -2, за $a \neq 0, b \neq 0$ и $a \neq 2b$; ж) $\frac{b-a}{1-b}$, за $a, b \neq 0$ и $b \neq 1$; з) $\frac{a+1}{a+b}$, за $a \neq -b$; и) $\frac{a-2}{a+3}$, за $a \neq 1$ и $a \neq -3$; ј) $\frac{x-2y+1}{x+4y}$, за $x, y \neq 0$ и $x \neq -4y$; к) $\frac{a-c}{2a+c}$, за $b \neq -c$, $c \neq -2a$; л) $\frac{4a(ax-3y)}{5(ax+3y)}$, за $ax+3y \neq 0$, $a \neq 0$; љ) $\frac{ax+b}{ax-b}$, за $ax \neq b$.

661. а) $\frac{a-b}{b}$, за $b \neq 0$ и $a \neq -3$; б) $\frac{a}{a+2b}$, за $a \neq -b$ и $a \neq -2b$; в) $\frac{1}{a-b}$, за $a \neq 0, a \neq b$ и $|a| \neq 1$; г) $\frac{1}{3}$, за $a \neq 0$ и $a \neq -1$; д) $\frac{a-3}{a+2}$, за $a \neq 0$ и $a \neq -2$; ђ) 1, за $a, b \neq 0$ и $a \neq 2$; е) $2a^2$, за $a \neq 1$, $b \neq 0$; ж) $4ab^3$, за $a \neq 0$ и $|a| \neq 1$; з) $5xy^2$, за $x \neq 1$; и) $\frac{x-y}{2}$, за $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

662. а) $\frac{a+1}{a-1}$, за $a \neq x$ и $a \neq 1$; б) $\frac{1}{1-x^2}$, за $a \neq \pm 1$ и $x \neq \pm 1$; в) $\frac{a+b}{b-a}$, за $d \neq c, b \neq a$; г) $\frac{a+b+c}{a+b-c}$, за $a+b-c \neq 0$ и $a-b+c \neq -0$; д) $\frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$, за $x^2+x-1 \neq 0$; ђ) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$, за $x \neq -a$; е) $\frac{x^2+2x+2}{a-1}$, за $a \neq 1$; ж) $\frac{a+b}{ab-1}$, за $ab \neq \pm 1$; з) $\frac{a^2+1}{a^4-a^2+1}$, за $a \neq \pm 1$; и) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$, за $x^2-y^2 \neq 0$; ј) $\frac{c+2}{c-2}$, за $c \neq 2$; к) $x^4+x^3+x^2+x+1$, за $x \neq 1$; л) 1, за $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$; љ) 1, за $a \neq \pm b$.

663. а) $\frac{a}{2}$, за $a \neq 0$; б) $\frac{b+1}{b}$, за $b \neq 0$; в) $\frac{a^2+a-1}{a+1}$, за $a \neq 0, a \neq -1$; г) $\frac{b^n+4b+1}{1-2b}$, за $b \neq 0$ и $b \neq \frac{1}{2}$; д) $\frac{a^4+2}{b^5-3}$, за $a \neq 0, b^5 \neq 3$; ђ) $\frac{a^n+3}{ab^n-2}$, за $a, b \neq 0$, $ab^n \neq 2$; е) $\frac{a}{a^x-1}$, за $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; ж) $\frac{a^x-a^y}{a^x}$, за $a \neq 0$, $a^x+a^y \neq 0$; з) $\frac{a^{3x}}{a^x-b^x}$, за $a^x \neq b^x$.

664. а) $\frac{22a+b}{6ab}$ за $a, b \neq 0$; б) $-\frac{7x+6y}{6xy}$ за $x, y \neq 0$; в) $\frac{39a-37}{12a}$ за $a \neq 0$; г) $\frac{11b+18}{30b}$ за $b \neq 0$;

665. а) $\frac{x+5y}{x^2-y^2}$, за $x \neq \pm y$; б) $\frac{a^2-5ab-2b^2}{a(a^2-b^2)}$, за $a \neq 0, a \neq \pm b$; в) $\frac{a-b-3}{b(a+b)}$, за $b \neq 0, a \neq -b$; г) $\frac{6ab}{a^2-b^2}$, за $a \neq \pm b$; д) $\frac{5xy+y^2}{x(y^2-x^2)}$, за $x \neq 0, x \neq \pm y$; ђ) $\frac{x^3-2x^2y-y^3}{xy(x-y)}$, за $x, y \neq 0, x \neq y$.

666. а) $\frac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$, за $a \neq \pm b$; б) 0, за $n \neq \pm 1$; в) $\frac{4a}{a+x}$, за $a \neq \pm x$; г) $\frac{2y}{x(x-y)}$, за $x \neq y \neq 0$; д) $\frac{3y}{x^2-9y^2}$, за $x \neq \pm 3y$; ђ) $\frac{1}{x+2}$, за $|x| \neq 2$; е) 0, за $|x| \neq 2$; ж) $\frac{-23}{15(x-2)}$, за $x \neq 2$.

667. а) $\frac{2a+3}{(a+3)^2}$, за $a \neq -3$; б) $\frac{3y-2x}{(x-y)^2}$, за $x \neq y$; в) $\frac{3(2x^2-7x+6)}{(x-3)^2}$, за $x \neq 3$; г) $\frac{a+b-2ab-b^2}{(a+b)^3}$, за $a \neq -b$; д) $\frac{x^2-2xy-y^2}{(x+y)(x-y)^2}$, за $x \neq \pm y$; ђ) $\frac{2a^2+25a-3}{(a-3)^2(a+3)}$, за $a \neq \pm 3$.

668. а) 1, за $x, y \neq 0$ и $2x - 5y \neq 0$; б) $\frac{15-5a}{3a(4a^2-9)}$, за $a \neq 0$ и $|a| \neq \frac{3}{2}$; в) $\frac{8-4a}{(a+4)(a-4)^2}$, за $|a| \neq 4$; г) $\frac{2(3y-2x)}{2x+3y}$, за $x \neq \pm\frac{3}{2}y$; д) $\frac{13x+7y}{2}$, $x \neq 0$, $2x+y \neq 0$; ђ) $\frac{9x^2-16xy+3x-8y}{2x}$, $x \neq 0$, $x - 2y \neq 0$.

669. а) $\frac{4}{(a-2)(x-3)}$, за $|a| \neq 2$ и $x \neq 3$; б) $\frac{5x}{(2x-1)(3x+1)}$, за $x \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2$; в) $\frac{a+y}{(a+b)(x+y)}$, за $a \neq -b, x \neq -y$; г) $\frac{7}{6}$, за $a \neq b, a \neq x$; д) 1, за $m \neq \pm\frac{1}{3}$; ђ) 1, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$; е) $\frac{m+3}{(m-3)^2}$, за $m \neq \pm 3$; ж) 1, за $a \neq 4$, $a \neq \pm 3$.

670. а) $\frac{6x^3+13x^2+9x+1}{(x^2-1)(1+x+x^2)}$, за $|x| \neq 1$; б) $\frac{(2a+1)^2}{8a^3-1}$, за $a \neq \frac{1}{2}$; в) $\frac{4a^2}{a^2-b^2}$, за $a \neq \pm b$; г) $\frac{-2}{b(a+b)}$, за $b \neq 0, a \neq -b$; д) 0, за $x \neq \pm 2$; ђ) 1, за $a \neq 2$.

671. а) $\frac{1}{b^9}$ за $a, b \neq 0$; б) $\frac{1}{(ab)^8}$ за $a, b \neq 0$; в) $\frac{ab^2d^2}{c^5}$ за $a, b, c, d \neq 0$; г) $\frac{a^4b}{c^5d}$ за $a, b, c, d \neq 0$; д) $\frac{x^9y^2}{9a^3c^3d^7}$ за $a, b, c, d, x, y \neq 0$; ђ) $\frac{3a^9b^{25}}{c^6}$ за $a, b, c \neq 0$.

672. а) a^{n+3} за $a \neq 0$; б) a^{3n+1} за $b \neq 0$; в) b^{n+2} за $a, b \neq 0$; г) $\frac{b^{n+4}}{c^6}$ за $a, c \neq 0$; д) $\frac{5b^{3n-6}}{a^{2n-8}}$ за $a, b \neq 0$.

673. а) -1 за $a \neq b \neq 0 \neq a$; б) $z(4x^2+6y^2-3xz)$ за $x, y \neq 0$; в) $\frac{y-x}{y^2}$ за $y \neq 0$ и $x \neq -y$; г) $\frac{1}{(a+b)^2}$ за $a \neq -b$ и $a^2+b^2 \neq 0$; д) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ за $a \neq \pm b$; ђ) $\frac{6}{2x+1}$ за $x \neq 0$ и $|x| \neq \frac{1}{2}$.

674. а) $\frac{3x(x+5)}{10}$ за $x \neq 0$ и $x \neq 5$; б) $\frac{2y}{x+2}$ за $y \neq 0$ и $|x| \neq 2$; в) $-\frac{2(x+y)}{y}$ за $y \neq 0, x \neq y$ и $x \neq 2y$; г) $\frac{-2x}{ax+1}$ за $ax \neq 2$ и $|ax| \neq 1$; д) $\frac{a}{x}$, за $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq -y$; ђ) $\frac{a(x+y)^2}{b(x-y)^2}$, за $b \neq 0$, $x \neq \pm y$; е) $\frac{b}{a}$, за $b \neq 0$, $a \neq 0$, $x \neq \pm y$; ж) $\frac{(b-c)^2}{a^2-c^2}$, за $a \neq \pm b$, $a \neq \pm c$, $b \neq c$.

675. а) $\frac{5x}{y}$, за $x, y \neq 0$; б) $\frac{a^3-ab^2+a^2b-b^3-2b}{(a+b)^2}$, $a \neq \pm b$; в) $\frac{1}{2a^3}$, за $a \neq 0$ и $a^2 \neq \frac{1}{2}$; г) 2, за $x \neq 3$; д) $b-a$, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq 2a$; ђ) $\frac{3(x^2+y^2)}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$; е) $\frac{x^2-9y^2}{9y^3}$, за $y \neq 0$, $x \neq 3y$; ж) 16 за $m \pm n \neq 0$, $r \pm s \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

676. а) $\frac{2a}{3(a-4)}$, $a \neq 4$ и $|a| \neq 2$; б) $\frac{a+2}{a^{n+1}}$, $a \neq 0$, $a \neq 3$ и $|a| \neq 1$; в) $\frac{a+b+1}{ab(a+b)^2}$, за $a, b \neq 0$ и $a \neq -b$; г) $\frac{x-y}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$; д) $\frac{5}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$, $2x \neq \pm 3y$; ђ) 2, за $3a \neq \pm 4b$; е) 6, за $x \neq 3y$, $x \neq \frac{1}{3}y$, $x \neq \pm y$; ж) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$.

677. а) $\frac{a+b}{3}$, $ab \neq 0$; б) $\frac{x-2y}{2}$, $x, y \neq 0$ и $x \neq \pm 2y$. в) $\frac{20}{3}$, $y \neq \pm 1$; г) $x+2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$; д) $\frac{ab}{3}$, $ab \neq 0$, $a \neq \pm b$; ђ) $\frac{27}{ab}$, $ab \neq 0$, $a \neq \pm\frac{2}{3}b$.

678. а) 1 за $a, b \neq 0, a \neq -b$; б) $\frac{x+y}{x-y}$ за $x, y \neq 0$ и $x \neq \pm y$.

679. а) $\frac{3xy}{(y-x)^3}$, $x \neq \pm y$; б) 9, $x \neq 0, |x| \neq 2$.

680. а) $\frac{a}{x-a}$, $a \neq 0$, $x \neq \pm a$; б) $\frac{2bc}{(b+c-a)^2}$, $abc \neq 0$ и $x \neq \pm a$; в) $\frac{a-x}{8x^2}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$ и $x \neq \pm a$; г) $-\frac{b+2}{2b}$, $b \neq 0, a \neq b, a \neq -2, a \neq \frac{1}{2}$.

681. а) $\frac{2}{2a+1}$, $|a| \neq 1, a \neq \pm\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{a+1}$, $|a| \neq 1$; в) $\frac{a(b+c-a)}{2}$, $abc \neq 0, b \neq -c, b+c \neq \pm a$.

682. а) $\frac{(a+1)^2}{a}$, за $a \neq 0, a \neq 1$ и $|x| \neq 1$; б) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $x \neq \pm y$; в) $-\frac{3}{2}$, $x \neq 3$; г) $\frac{a(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$, $a \neq \pm b$; д) $\frac{a(a-3)}{(a+4)(a-2)}$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq -4$ и $a \neq -3$; ђ) $\frac{x+y}{y}$, $y \neq 0$.

683. а) $\frac{a+b-2}{a-b+2}$, за $|a \pm b| \neq 2$; б) $\frac{9}{a-b}$, за $a \neq \pm b, 2a+b \neq 0$; в) ab за $a, b \neq 0$, $a+b \neq \pm 2c$; г) $\frac{x-y}{x+y}$, за $x \neq \pm y \neq 0 \neq x$.

684. а) $\frac{3x}{2(y-x)}$, $x \neq y \neq 0 \neq x$; б) $\frac{a-3}{a+1}$, $a \neq 0$, $a \neq -1$ и $a \neq -3$; в) $x-y$, $x, y \neq 0$ и $x \neq -y$; г) $\frac{3}{2}$, $a \neq \pm b$; д) $x-y$, $x \neq -y$; ђ) $\frac{1}{x^2-9}$, $|x| \neq 3$; е) 1, $|a| \neq 2$; ж) 2, $x \neq 0$ и $x \neq -3$.

685. а) $\frac{1}{xy}$, за $x, y \neq 0$ и $x \neq y$; б) $\frac{1}{x-1}$, за $x \neq 0$ и $|x| \neq 1$; в) $\frac{1}{x-y}$, $x \neq \pm y, x \neq 0, x \neq -\frac{y}{2}$; г) $9, x \neq \pm 2, x \neq -1, x \neq 0$; д) $0, x \neq \pm\frac{1}{2}$; ђ) $-1, a \neq 0, a \neq \pm 1$; е) 2, $x \neq 1$; ж) $\frac{a^2+x^2}{x^3-a^3}$, $x \neq a$.

686. а) $\frac{a-b-c}{a+b+c}$, за $a+b-c \neq 0$ и $a-b+c \neq 0$; б) $\frac{a+3}{a-3}$, за $a \neq 3$; в) $\frac{a^2+ax+a^2}{a-x}$, за $a \neq 0$ и $a \neq \pm x$; г) $\frac{a}{x}$, за $a, x \neq 0$; д) $\frac{x+y+z}{b+c-a}$, за $b+c-a \neq 0$ и $x+y-z \neq 0$; ђ) $a-b, a \neq -b$.

687. а) $\frac{a-b}{a+2b}$, $b \neq 0, a+2b \neq 0$; б) $\frac{a-1}{a-2b}$, $b \neq 0, a \neq 2b$; в) $\frac{b^2-1}{ab+1}$, $b \neq 0, ab+1 \neq 0$; г) $\frac{3ab-1}{3a+b}$, $ab \neq 0, 3a+b \neq 0$.

688. а) $\frac{1}{2(x+y)}$, $x \neq 3, x \neq \pm y$; б) $\frac{4}{3(a+5)}$, $a \neq -5$; в) $\frac{(a^2-4)^2}{8a}$, $|a| \neq 2$.

689. а) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $x \neq \pm y$; б) $\frac{a+b}{a-b}$, $a, b \neq 0, a \neq b, a \neq 3b$; в) $\frac{1}{x}$, $|x| \neq 1$ и $x \neq 0$.

690. а) $x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - \left(\sqrt{2}xy\right)^2 = (x^2-\sqrt{2}xy+y^2)\cdot(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)$;
б) $x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;
в) $(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)$;
г) $(x^3)^2-(y^3)^2+(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\cdot(x^2-y^2+1)$;
д) $2(x^2+xy+y^2)^2$;
ђ) $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

691. а) $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2-2x^2+2)\cdot(x^2-2x+2)$;
б) $(x^4+1)^2-(x^2)^2 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$;
в) $x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1) = (x+1)(x^4+x^2+1) = (x+1)((x^2+1)^2-x^2) = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
г) Пођимо од $x^{15}-1$ имамо да је $x^{15}-1 = (x^5)^3-1 = (x^5-1)(x^{10}+x^5+1) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)$, а са друге стране $x^{15}-1 = (x^3)^5-1 = (x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$, па је $x^{10}+x^5+1 = \frac{(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{x^4+x^3+x^2+x+1} = (x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

692. а) $2(x^2+1)^2+x^3+x = (x^2+1)(2x^2+x+2)$;
б) Узети смену: $x^2+5x = t$. Резултат: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; в) Уведимо смену $x^2+x = t$. Тада важи $(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10 = t^2+3t-10 = (t+5)(t-2) = (x^2+x+5)(x^2+x-2) =$

$(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$. г) $(x^2+x+4)(x+3)(x-2)$; д) $(x^2+x+7)(x+3)(x-2)$; ђ) $(x^2+x+3)(x-1)(x+2)$.

693. а) $ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc = ab^2+ba^2+ac^2+bc^2+c(a+b)^2 = ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a+b)^2 = (a+b)(c^2+ca+cb+ab) = (a+b)(b+c)(c+a)$;
б) $a^2b-ab^2-a^2c-ac^2+2abc+bc^2-b^2c = ab(a-b)-c^2(a-b)-c(a-b)^2 = (a-b)(ab-c^2-ca+cb) = (a-b)(b(a+c)-c(a+c)) = (a-b)(a+c)(b-c)$;
в) $d(b-c)(a-c)(a-b)$;
г) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$;
д) $3(a+b)(b+c)(c+a)$;
ђ) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc = (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)\cdot c+c^2-3ab\right] = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

694. а) $z^3(x-y)-z(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2) = (x-y)\left[z^3-z(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)\right] = (y-x)(z-y)(x-z)(x+y+z)$;

б) $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)$; в) $(a+b)((b+c)(c+a)$;

г) $(x-y)(z+x)(z-y)$; д) $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$;

ђ) $(x+y)(y+z)(z-x)(xz-yz-xy)$; е) $(x-y)(x+z)(y-z)$;

ж) $(b+c)(a+b)(a+c)$; з) $(y-z)(z-x)(y-z)(x+y+z)$;

и) $(a-x)(x-y)(a-y)(a+x+y)$.

695. а) $a(a+7b)(a-4b)$; б) $a(a-3b)(a+11b)$; в) $n(7n+x)(2n+7x)$; г) $m(2n-x)(3n+4x)$; д) $ab(3ax-2b)(2ax+5b)$; ђ) $bx(5ax-3by)(2ax+3by)$; е) $xy(2x+3y)(3x+2y)$; ж) $xy(x-5y)(5x-y)$.

696. а) $a^2-b^2-c^2+d^2-2ad-2bc = (a^2-2ad+d^2)-(b^2+2bc+c^2) = (a-d)^2-(b+c)^2 = (a-b-c-d)(a+b+c-d)$;
б) $a^3+8a^2+19a+12 = a^3+4a^2+4a^2+16a+3a+12 = a^2(a+4)+4a(a+4)+3(a+4) = (a+4)(a^2+4a+3) = (a+4)(a^2+a+3a+3) = (a+4)(a(a+3)+a+3) = (a+4)(a+3)(a+1)$;
в) $a^2+ac-bc-b^2 = a^2+ac+ab-ab-bc-b^2 = a(a+c+b)-b(a+c+b) = (a+b+c)(a-b)$;
е) $a^3-6a^2+12a-8-12a+8+30-a = (a-2)^3-(a-2)-12(a-3) = (a-2)(a-3)(a-1)-12(a-3) = (a-3)(a-5)(a+2)$.

697. а) $a^2c+ac^2-b^2c-bc^2+ab(a-b) = c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b) = (a-b)(c(a+c)+b(a+c)) = (a+c)(a-b)(b+c)$.

698. а) Из $\dfrac{A(x+1)+B(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \dfrac{16-2x}{x^2-4x-5}$ добијамо $(A+B)x+A-5B = -2x+16$, тј. $A+B=-2$, $A-5B=16$. Одавде је $A=1$, $B=-3$; б) $A=3$, $B=4$; в) $A=1$, $B=3$; г) $A=5$, $B=-2$.

699. а) $\dfrac{(2n-1)(n+1)}{(2n-1)(n-1)}-\dfrac{(3n+1)(n-1)}{(3n+1)(n+1)}-\dfrac{4n}{(n-1)(n+1)} = 0$, $n\neq\pm1$, $n\neq\dfrac{1}{2}$, $n\neq-\dfrac{1}{3}$;
б) $\dfrac{4x}{(1-x)(1+x)}+\dfrac{(3x-1)(x+1)}{(3x-1)(x-1)}-\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(2x+1)(x+1)} = 0$, $x\neq\pm1$, $x\neq\dfrac{1}{3}$, $x\neq-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{1-4a^2}$, $a\neq\pm\dfrac{1}{2}$, $a\neq\dfrac{1}{3}$, $a\neq-\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{1}{1-4y^2}$, $y\neq\pm\dfrac{1}{2}$, $y\neq\pm\dfrac{1}{4}$; д) $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$, за $x\neq0$, $x^2\neq x+1$; ђ) $-\dfrac{x+2}{8}$, за $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$; е) $\dfrac{(a-b-c)a}{2}$, $abc\neq0$, $b+c\neq0$, $a-b-c\neq0$; ж) $\dfrac{2x^4}{x^8-16y^8}$, $xy\neq0$; з) 0, $x\neq0$, $x\neq\pm y$; и) 1, $x\neq\pm\dfrac{3}{2}$; ј) x^3-1, $x\neq-1$; к) $\dfrac{1}{x+2}$, $x\neq\pm2$. л) $\dfrac{a}{a^2+1}$, $|a|\neq1$; љ) $\dfrac{-2ab}{a+b}$, $a\neq\pm b, a\neq0, b\neq0$; м) $x-y$, $x\neq\pm y$; н) $1, x\neq\pm1, x\neq0, y+x\neq0$; њ) $-\dfrac{a+b}{a^2b^2}, a,b\neq0, a\neq b^2, a^2\neq b^2$; о) $\dfrac{1}{xy}, x,y\neq0, x+y\neq0$. п) Дељењем полинома се добија да је дати израз једнак за $x\neq0, x^2-x-4\neq0$ изразу $3x^2:[(x^2-x+4)+(x^2+x+1)+(x^2+x+2)-x-7] = 3x^2:3x^2 = 1$; р) Резултат дељења $(x^6+2x^5+x^3-2x^2-2)$ и (x^3+2x^2+2) је x^3-1, па је дати израз за $x\neq1, x\neq0, x\neq-\dfrac{1}{2}$ и $x^3+2x^2+2\neq0$ једнак

изразу $-\dfrac{1}{x^2+x+1}$; с) Израз у средњој загради је једнак изразу $(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1)^2$. Резултат (за $x \neq 0$): $\dfrac{x^4}{(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)}$; т) $\dfrac{1}{x^4}, x \neq 0, x^4-7x^2+1 \neq 0$.

700. а) $\dfrac{6x-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ за $x \neq 1, 2, 3$;

б) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} - \dfrac{1}{b(c-b)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)} = \dfrac{bc(c-b)-ac(c-a)+ab(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{1}{abc}$ за $a \neq b \neq c \neq a, a, b, c \neq 0$.

701. а) За $x > 3$ имамо $\dfrac{x(x-3)+x^2-9}{x(2x^2-3x-9)} = \dfrac{1}{x}$, а за $x < 3, x \neq 0, x \neq -\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{x(x-3)+x^2-9}{x(2x+3)(x-3)} = \dfrac{3(x-3)}{x(2x+3)(x-3)} = \dfrac{3}{x(2x+3)}$; б) $\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$, за $x \neq \pm 1$; в) $\dfrac{1}{x+1}$, за $x < 2, x \neq -1, x \neq -3$, $\dfrac{1}{x+3}$, за $x > 2$; г) $\dfrac{1}{2-3x}$ за $x < 0$, $\dfrac{x+2}{(3x-2)(x-2)}$ за $0 \leq x < 2$ и $x \neq \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{x-2}$ за $x > 2$; д) $x-2$ за $x < 1$, $\dfrac{x^2+4}{x-2}$ за $1 < x < 2$, $x+2$ за $x > 2$.

702. Означимо $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y) = t$. Решавањем система једначина $y+z = \dfrac{t}{a}$, $z+x = \dfrac{t}{b}$, $x+y = \dfrac{t}{c}$ добијамо $x = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)$, $y = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$, $z = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)$ одакле је $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)} = \dfrac{t}{abc}$.

703. Из датог услова добијамо $b^2 = (a+b-c)^2 - a^2 = (2a+b-c)(b-c)$, $a^2 = (a+b-c)^2 - b^2 = (a+2b-c)(a-c)$, одакле је $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \dfrac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(2a+b-c)(b-c)+(b-c)^2} = \dfrac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)} = \dfrac{a-c}{b-c}$.

704. а) Из дате једнакости добијамо $bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc = 0$, а одатле $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$, тј: $a+b = 0$ или $b+c = 0$ или $c+a = 0$.
б) Следи непосредно из а).

705. Из $x+y+z = 0$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$ следи $1 = x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = -2(xy+yz+zx)$, тј. $xy+yz+zx = -\dfrac{1}{2}$. Квадрирањем добијамо $\dfrac{1}{4} = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$. Најзад $x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 1^2 - 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

706. Слично као у предходном задатку, из $x+y+z = 1$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$ следи $xy+yz+zx = 0$.

707. $b^2x^4-a^2y^4+(a^2-b^2)z^4 = b^2(x^4-z^4)+a^2(z^4-y^4) = b^2(x^2-x^2)(x^2+z^2)+a^2(z^2-y^2)(z^2+y^2) = b^2(a^2-2z^2)a^2+a^2(2z^2-b^2)b^2 = a^2b^2(a^2-b^2)$.

708. а) $M_1(x) = x^6-1, M_2(x) = 8(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1), D_2(x) = x-1$, па уз услове $x \neq 0, x \neq \pm 1, x^2y \neq \pm\dfrac{1}{4}$ важи $E(x) = (x-1)^2$. б) $x+1, x \neq \pm 1$; $M(x) = x^3+x^2-x-1$. в) $x(y-x), x \neq y$; $M(x,y) = x(x-y)^2$.

709. а) Ако је $P(\alpha) = 0$, онда је $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0 = 0$, па је $a_0 = -\alpha(a^n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+a_1)$, то је број a_0 дељив са α.

б) Из $P(\dfrac{p}{q}) = 0$ добијамо $a_n\dfrac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{p}{q}+a_0 = 0$. Одатле, најпре, следи $a_0q^n = -p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})$. Десна страна ове једнакости је дељива са p, па је таква и лева; како су p и q узајамно прости, добијамо $p|a_0$. Слично се доказује да $q|a_n$.

710. а) $(x+2)(x+3)(x-5)$; б) $(x+1)(x+2)(x-3)$; в) $(x-1)(x+3)(x+7)$; г) $(x-1)(x+3)^2$; д) $(3x-1)(3x-2)^2$;
ђ) Ако је $P(x)=x^3-3xy^2+2y^3$, онда је $P(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$, па је полином $P(x)$ дељив са $x-y$. Извршивши ово дељење, добијамо $P(x)=(x-y)(x^2+xy-2y^2)=(x-y)^2(x+2y)$.

711. а) Имамо да је

$$p(x)=q(x)(x-1)(x+1)+ax+b \quad (*)$$

По Безуовој теореми је $p(1)=3$, $p(-1)=1$. Ако вредности $x=1$ и $x=-1$ заменимо у $(*)$, добијамо

$$\begin{aligned} 3 &= p(1)=a+b, \\ 1 &= p(-1)=-a+b. \end{aligned}$$

Из последњих релација се налази $b=2$, $a=1$. Дакле, остатак при дељењу полинома $p(x)$ са x^2-1 је $x+2$. б) $x+2$.

712. а) Најпре уочимо да важи $p(1)=p(2)=0$ и $2x^4-11x^3+16x^2-x-6=(x-1)(x-2)(2x^2-5x-3)=(x-1)(x-2)(x-3)(2x+1)$; б) $(x-1)(x+3)(x+7)(3x-1)$; в) $(x+2)(x-3)(x-5)(2x+1)$; г) $(x+1)(x+3)(x+5)(3x-1)$; д) $(x-1)(x-2)(2x-1)(3x+1)$; ђ) $(x-1)(x-2)(x-3)(x^2+x+2)$; е) $(x-1)(x+3)(x+7)(x^2-x+1)$.

713. Да, јер је $P(0)=(-1)^{2n}+1-2=0$ и $P(1)=1+1-2=0$.

714. Да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)=(x-1)(x-2)$, неопходно је и довољно да буде дељив са $x-1$ и $x-2$. Из $P(1)=2+p+q=0$, $P(2)=28+2p+q=0$ следи $p=-26, q=24$.

715. Из прве од датих једнакости добијамо $xbc+yac+zab=abc$ (1), а из друге $ayz+bxz+cxy=0$ (2). Ако квадрирамо леве и десне стране релације (1), добијамо: $a^2b^2c^2=(xbc+yac+zab)^2=x^2b^2c^2+y^2a^2c^2+z^2a^2b^2+2abc(ayz+bxz+cxy)=x^2b^2c^2+y^2a^2c^2+z^2a^2b^2$, имајући у виду (2). Дељењем са $a^2b^2c^2$ добијамо: $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

716. а) Упутство: посматрати производ $(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$. б) Упутство: најпре доказати да важи $ab+bc+ca=0$.

717. а) $E(x,y)=(x+y+1)^2+(x-2)^2-3$ има најмању вредност -3, ако је $x+y+1=0$ и $x-2=0$, тј. $x=2, y=-3$.
б) $E(x,y)=(x-y+1)^2+(y-1)^2-1$ има најмању вредност -1, ако је $x=0, y=1$.

718. а) $x_1=1$; б) $x_1=1$; в) $x_1=-1$; г) $x_1=0$.

719. а) $x_1=2$; б) $x_1=-6$; в) $x_1=0$; г) $x_1=0$; д) нема решења; ђ) $x=5$.

720. а) Решење је сваки реалан број; б) нема решења; в) $x_1=\frac{6}{5}$; г) свако $x\in R$; д) $x=-\frac{1}{3}$; ђ) $x=-2$; е) $x=2$.

721. а) $x=1\vee x=-2$; б) $x=-1\vee x=\frac{2}{3}$; в) $x=-\frac{1}{3}\vee x=2$; г) $x=-2\vee x=1\vee x=3$; д) $x=-2\vee x=3$; ђ) $x=-3\vee x=4$; е) $x=-\frac{3}{2}\vee x=2$; ж) $x=1\vee x=\frac{1}{2}$.

722. Решења једначине облика $\frac{A}{B}=0$ траже се применом формуле

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow (A=0\wedge B\neq 0).$$

а) $x_1=2$; б) $x_1=-\frac{1}{3}$; в),г),д),ђ) - нема решења.

723. а) Једначина је дефинисана за $x\neq-\frac{2}{5}$ и $x\neq-\frac{24}{5}$. Решење је $x_1=0$; б) $x_1=-\frac{1}{4}$; в) $x_1=3$; г) $x_1=-1$; д) $x_1=-1$.

724. а) Уз претпоставку да је $x \neq \pm 1$ могу се леве и десне стране дате једначине помножити са $5(x^2-1)$. Добија се еквивалентна једначина $2x+19-85+15(x+1)=0$, чије је решење $x_1=3$. Број 3 је решење и полазне једначине.

б) Уочити да је $(3x-2)(3-2x)=-(6x^2-13x+6)$. Решење је $x_1=2$; в) $x_1=\frac{7}{8}$; г) $x_1=0$; д) нема решења.

725. а) Једначина је еквивалентна једначини

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(1+x)^2}-\frac{5}{2x(1+x)}=0,$$

тј. $\frac{2x+8-5(1+x)}{2x(1+x)^2}=0$, односно $\frac{3-3x}{2x(1+x)^2}=0$, па је решење $x_1=1$;

б) $y_1=0,9$; в) $z_1=1,5$; г) $u_1=3$; д) $v_1=2$; ђ) нема решења. е) нема решења; ж) $x_1=4$; з) $x_1=3$; и) нема решења.

726. а) За $x \neq 1$ једначина је еквивалентна једначини $3x+2-(2x+3)=0$, чије је решење $x_1=1$. Међутим, како једначина није дефинисана за $x=1$, дата једначина нема решења.

727. а) да; б) да; в) не; г) не; д) не; ђ) не; е) да; ж) да; з) не.

728. а) $x=10-4a$, $y=\frac{2+2a}{3}$; б) $a=2$ $x=y=2$.

729. а) Дата једначина еквивалентна је са једначином и $(m-3)x=-5(3m+1)$, одакле се закључује да за $m=3$ нема решења, а за $m \neq 3$ решење је $x_1=\frac{-5(3m+1)}{m-3}$;

б) За $m=4$ - нема решења, за $m \neq 4$ решење је $x_1=\frac{m+2}{4-m}$;

в) За $m=-6$ - нема решења, за $m \neq -6$ решење је $x_1=\frac{5}{m+6}$;

г) За $m=0$ - решење је сваки реалан број x, за $m \neq 0$ - $x_1=1-m$;

д) За $m=-5$ - решење је сваки реалан број x, за $m \neq -5$ - $x_1=m-5$;

ђ) За $m=3$ - решење је сваки реалан број x, за $m=-3$ нема решења, за $m \neq \pm 3$ - решење је $x_1=\frac{1}{m+3}$;

е) За $m=-5$ - решење је сваки реалан број x, за $m=3$ нема решења, за $m \notin \{-5,3\}$ решење је $x_1=\frac{1}{m-3}$;

ж) Једначина се може представити у облику $(m-1)(m-2)x=m-1$. За $m=1$ решење је сваки реалан број x, за $m=2$ - нема решења, за $m \notin \{1,2\}$ решење је $x_1=\frac{1}{m-2}$;

з) За $m=0$ нема решења; за $m=1$ решење је сваки реалан број x, за $m \notin \{0,1\}$ решење је $x_1=\frac{1}{m}$;

и) Једначина се може написати у облику $(8+m^3)x=m^2-4$, за $m=-2$ решење је сваки реалан број x, за $m \neq -2$ решење је $x_1=\frac{m-2}{m^2-2m+4}$;

ј) За $m=2$ решење је сваки реалан број x, за $m \neq 2$ - $x_1=\frac{m+2}{m^2+2m+4}$;

к) За $m=4$ нема решења, за $m \neq 4$ решење је $x_1=\frac{7-3m}{m-4}$;

л) За $m \in \{-3,1,2\}$ решење је сваки реалан број, за $m=3$ нема решења, а за $m \notin \{-3,1,2,3\}$ решење је $x_1=\frac{1}{m-3}$.

730. а) Једначина је еквивалентна једначини $(a-1)(a-3)x=(a-3)(a+2)$. За $a \neq 1$, $a \neq 3$ решење је $x_1=\frac{a+2}{a-1}$, за $a=3$ решење је сваки реалан број, а за $a=1$ - нема решења;

б) За $b \neq 1$, $b \neq -2$ - $x_1=\frac{b-3}{b+2}$, за $b=-2$ - нема решења, а за $b=1$ решење је свако $x \in \mathbf{R}$;

в) За $a \neq 1$, $a \neq -3$ решење је $x_1 = \dfrac{a-4}{a+3}$. За $a = 1$ решења су сви реални бројеви, а за $a = -3$ - нема решења.

731. а) Једначина је еквивалентна једначини $2x(a-b) = b^2 - a^2$. За $a \neq b$ решење је $x_1 = -\dfrac{a+b}{2}$, а за $a = b$ решење је сваки реални број x;

б) За $a \neq 3b$ решење је $x_1 = \dfrac{a(7b-3a)}{a-3b}$. Ако је $a = b = 0$ - решење је $x \in \mathbf{R}$, а ако је $a = 3b$, $b \neq 0$ - нема решења;

в) За $|a| \neq |b|$ решење је $x_1 = \dfrac{a-b}{a+b}$. Ако је $a = b$ - решење је $x \in \mathbf{R}$, а ако је $a = -b \neq 0$ - нема решења;

г) Уз услове $b \neq 0$, $c \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $ac^2x(3+2b) = b^2c^3(3+2b)$. Ако је $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b \neq -\dfrac{3}{2}$ решење је $x_1 = \dfrac{b^2c}{a}$. За $b = 0$ или $c = 0$ - нема решења. За $b = -\dfrac{3}{2}$, $c \neq 0$ - решење је $x \in \mathbf{R}$. Ако је $a = 0, b \neq -\dfrac{3}{2}, c \neq 0$ - нема решења.

д) За $b \neq \pm 3a$ једначина је еквивалентна једначини $(12a+b)x = 25ab + 2b^2 + 12a^2$. Тако за $b \neq \pm 3a$ и $12a + b \neq 0$ једначина има решење $x_1 = \dfrac{25ab + 2b^2 + 12a^2}{12a+b} = \dfrac{(12a+b)(a+2b)}{12a+b} = a + 2b$. Ако је $a = \pm\dfrac{b}{3}$ - нема решења. Ако је $12a + b = 0, a \neq 0$ и $a \neq \pm\dfrac{b}{3}$ решење је сваки реалан број x.

ђ) За $a \neq 0$, $a \neq \pm 2$ $x_1 = \dfrac{3}{a}$, за $a = 0$, $a = 2$ или $a = -2$ – нема решења.

е) За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$ $x_1 = -2a$, за $a \neq 0$, $b = 0$ $x \in \mathbf{R}$, а за $a = 0$ или $a = b$ или $a = -b$ – нема решења.

732. а) Једначина је за $a \neq 0$, $b \neq 0$ еквивалентна једначини $(b-a)x = (b-a)(a^2b^2 - a - b)$, па је за $a \neq b$ (и $a, b \neq 0$) решење $x_1 = a^2b^2 - a - b$. За $a = b \neq 0$ решење је сваки реалан број, а за $a = 0$ или $b = 0$ нема решења;

б) За $a = \pm b$ нема решења. Ако је $a \neq \pm b$ решење је $x_1 = \dfrac{2a^2 + ab + 3b^2}{a+b}$;

в) За $a = 0$ или $b = 0$ нема решења. Ако је $a \neq 0$ и $b \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $(a^2 - ab + b^2)x = a^3 + b^3$, па је тада њено решење $x_1 = a + b$;

г) За $a \neq 2$, $b \neq 1$ решење је $x_1 = \dfrac{2a-b}{(a-2)(b-1)}$; за $a = 2$ и $b = 4$ или $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = 1$ решења су сви реални бројеви; за $a = 2$, $b \neq 4$, односно $a \neq \dfrac{1}{2}$ и $b = 1$ нема решења.

733. а) За $x \neq a$, $x \neq -a$ једначина је еквивалентна једначини $4a^2 - 4a + 2 + x - a - ax - a^2 = 0$, тј. једначини $x(a-1) = (3a-2)(a-1)$. За $a \neq 1$ имамо $x = 3a - 2$ уз услове $3a - 2 \neq a$, тј. $a \neq 1$ и $3a - 2 \neq -a$, тј. $a \neq \dfrac{1}{2}$. За $a = 1$ решење је свако x различито од ± 1. Према томе: за $a = 1$ - $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$; за $a = \dfrac{1}{2}$ - нема решења, а за $a \neq 1$, $a \neq \dfrac{1}{2}$ - $x_1 = 3a - 2$;

б) За $b = 1$ - $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$; за $b = 3$ - нема решења, а за $b \neq 1$, $b \neq 3$ - $x_1 = 2b - 3$;

в) $x_1 = \dfrac{b}{2}$ за $b \neq \pm 2a$ - иначе нема решења;

г) За $a \neq 0$ $x_1 = 3a$, за $a = 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

д) За $a \neq 0$ $x_1 = 0$, за $a = 0$ нема решења.

ђ) За $a \neq 0$ $x_1 = 9a$, за $a = 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

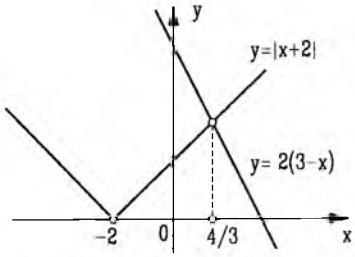
е) За $a \neq 0$ решење је $x_1 = a$; за $a = 0$ решење је свако $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

734. а) Пошто је:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x \leq -2, \end{cases}$$

1° за $x < -2$ имамо једначину $-x - 2 = 2(3 - x)$. Њено решење је $x_1 = 8$, међутим оно не задовољава услов $x < -2$.

2° За $x \geq -2$ добија се једначина $x+2=2(3-x)$. Њено решење је $x_1=\frac{4}{3}$. То је, истовремено, и једино решење дате једначине. Геометријска интерпретација дата је на слици.



Сл. уз зад. 734 а)

б)$x_1=1, x_2=5$; в) $x_1=0$.

735. а) Посматрајмо два случаја: (1) $x \geq -2$ - тада је $x+2-3=2x-6$, па је $x_1=5$ и (2) $x<-2$ - тада је $-x-2-3=2x-6$, одакле је $x=\frac{1}{3}$ - што није решење, обзиром да не задовољава услов $x<-2$. Дакле, једино решење једначине је број 5.

б) $x_1=-5, x_2=\frac{1}{3}$; в) $x_1=1, x_2=3$; г) $x_1=-2, x_2=2$; д) $x_1=1, x_2=7$; ђ) $x_1=-7, x_2=-1, x_3=7$; е) $x_1=0$; ж) $x \in [6,+\infty)$; з) $x_1=-7, x_2=7$; и) $x_1=-1, x_2=1$; ј) $x_1=-2$; к) $x_1=\frac{5}{7}$; л) $x_1=-4, x_2=8$; љ) $x_1=1, x_2=\frac{11}{2}$; м) $x \geq 2$.

736. Из $\frac{3+x}{7+x}=\frac{2}{3}$ налази се $x=5$.

737. Нека то буде кроз x година. Тада је $27+x=4(3+x)$, тј. $27+x=12+4x$, $-3x=-15$, одакле је $x=5$. Дакле, мајка ће бити старија од ћерке четири пута кроз 5 година.

738. Нека је t тражено време. Тада је $\frac{t}{15}+\frac{t}{20}+\frac{t}{30}=1$, па је $t=6\ h$ и 40 минута.

739. из $0,75x=0,51(x+12)$ добија се $x=25.5\ l$.

740. $30kg, 24kg$ и $10,2kg$.

741. Нека је s пут од Београда до Панчева, t укупно време вожње у одласку и повратку и v_1, v_2 и v_{sr} брзине аутобуса у одласку и повратку и средња брзина. Тада је $\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}=t$ и $v_{sr}=\frac{2s}{t}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{x_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$. Из $35=\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{v_2}}$ налази се $\frac{1}{v_2}=\frac{2}{35}-\frac{1}{30}=\frac{1}{42}$, па је $v_2=42\ km/h$.

742. Тај број је 765.

743. По услову задатка је $5 \cdot \overline{abcde7}=\overline{7abcde}$. Ако број $\overline{abcde}$ означимо са x, тада је $5(10x+7)=700000+x$, одакле је $x=14285$. Тражени шестоцифрени број је 142857.

744. Посматрајмо табелу:

	Иван	Марко
пре	$2x$	x
сада	$4x$	$x+2x$
кроз 15 година	$4x+15$	$3x+15$

Према томе, биће $4x+15+3x+15=100$, тј. $x=10$. Дакле, Марко сада има 30 година.

745. Из $\frac{3}{7}x+4=\frac{x+4}{2}$ се добија $x=28$.

746. Било је 255.

747. Нека је z износ који је антикварница платила за први предмет. Тада је $1\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}(2250 - x) = 3150$, одакле је $x = 900$, а $2250 - x = 1350$ динара.

748. 176 ученика.

749. Ако је x дужина воза, биће $\frac{x}{7} = \frac{378 + x}{25}$, одакле је $x = 147m$, а брзина $75,6km/h$.

750. Ако је x износ снижења и a број посетилаца пре поскупљења биће: $a \cdot 150 = \frac{3}{2}a(150 - x) \cdot \frac{4}{5}$, одакле се добија $x = 25$ динара.

751. Нека је тај човек рођен $\overline{19xy}$ године. Тада је $1995 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y$, одакле је $x = \frac{85 - 2y}{11}$. Обзиром да је $0 \leq x, y \leq 9$, решење је $x = 7$, $y = 4$, па је тај човек рођен 1974. године.

752. Брзина велике казаљке је 1 круг/час, а брзина мале $\frac{1}{12}$ круг/час. Казаљке ће се поклопити ако је $t - 1 = \frac{t}{12}$, тј. $t = \frac{12}{11}\,h$, тј у $13\frac{1}{11}\,h$.

753. 24 km, $6\frac{2}{3}\,h$. **754.** Осам динара. **755.** 10 динара.

756. а) $(4, 1)$; б) $(7, 3)$; в) нема решења; г) $(6 + 2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$; д) $(2, 3)$; ђ) $(2, 1)$; е) нема решења.

757. а) $(1, 1)$; б) $(2, 1)$; в) $(1, 1)$; г) $(2, 1)$.

758. а) $(2, 2)$; б) $(-1, 1)$. **759.** а) $(1, 1)$; б) $(-1, -1)$.

760. а) $(1, 2)$; б) $(3, 7)$; в) $(\frac{20}{3}, \frac{95}{18})$; г) $(4, 10)$.

761. а) Увођењем смена $\frac{1}{x} = u$ и $\frac{1}{y} = v$, добијамо систем:

$$\begin{cases} 3u + 5v = 16 \\ 5u - 3v = 4 \end{cases}$$

чија су решења: $u = 2$, $v = 2$, па је $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;
б) $(2, 5)$; в) $(2, 3)$; г) $(7, 3)$; д) $(5, 1)$; ђ) $(2, 1)$; е) $(5, 3)$; ж) $(7, 4)$.

762. а) Систем има јединствено решење; б) бесконачно много решења; в) нема решења, јер је $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$; г) нема решења; д) има решења; ђ) нема решења.

763. Систем две линеарне једначине са две непознате има бесконачно много решења ако је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, тј. у датом задатку ако је $2 = \frac{m}{-3} = \frac{3}{4n}$, одакле је $m = -6$ и $n = \frac{3}{8}$, па се систем своди на једну једначину $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$, ($x$-произвољно). Дакле, решење система се своди на облик $(x, \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})$, $x \in \mathbf{R}$.

764. На основу услова $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ систем неће имати решење, тј. за дати задатак ако је $\frac{a}{2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{7}{4}$. Други услов $\frac{-6}{3} \neq \frac{7}{4}$ је испуњен. Из $\frac{a}{2} = \frac{-6}{3}$ следи $a = -4$. Дакле, за $a = -4$ дати систем неће имати решење. Једначине система гласе: $-4x - 6y = 7 \wedge 2x + 3y = 4$.

765. Коришћењем једног од метода за решавање система једначина добијамо да је: $x = \frac{2b + 3}{a + 10}$, $y = \frac{15 - ab}{2(a + 10)}$, $a \neq -10$.

1° На основу услова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ систем има јединствено решење. Из $\frac{a}{5} \neq -\frac{4}{2}$ следи $a \neq -10$, а из $-\frac{4}{2} \neq \frac{3}{b}$ добијамо $b \neq -\frac{3}{2}$.

2° За $a = -10$, $b = \frac{3}{2}$ систем има бесконачно много решења при чему су она облика $(x, \frac{10x+3}{4})$.

3° Систем нема решења ако је: $a = -10$, $b =\neq \frac{3}{2}$.

766. а) За $a = -1$ нема решења; за $a = 1$ решења су парови облика $(x, 1-x)$, $x.\in \mathbf{R}$; за $a \neq \pm 1$ решење је $(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1})$.

б) Ако је $a \neq -1$, систем нема решења. Ако је $a = -1$ решења су $(x, -1-x)$, $x \in \mathbf{R}$.

в) Ако је $a \neq 1$, систем има јединствено решење $x = -2$, $y = 2(1+a)$. Ако је $a = 1$, систем има бесконачно много решења, при чему су она облика $(x, 2-x)$, $x \in \mathbf{R}$.

г) За $a = -3$ нема решења. За $a \neq -3$ решење је $(\frac{a}{2(a+3)}, \frac{1}{a+3})$.

д) Ако је $a + b \neq 0$, систем има јединствено решење $(1, a-b)$. Ако је $a + b = 0$, решења су сви парови облика $(x, a(x+1))$, $x \in \mathbf{R}$.

ђ) (a, b) за $a \neq b$; (x, x), $x \in \mathbf{R}$, за $a = b$;

е) $(\frac{a}{2}, 0)$ за $b \neq 3$; $(x, \frac{a-2x}{3})$, $x \in \mathbf{R}$, за $b = 3$.

ж) За $a + b = 0$, $a \neq 0$ нема решења; за $a = b = 0$ решења су $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$; за $a + b \neq 0$ решење је $(\frac{2ab}{a+b}, \frac{b-a}{a+b})$.

767. а) За $a = 1$ има бесконачно много решења облика $(\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. За $a = -1$ систем је немогућ (нема решења), а за $a \neq \pm 1$ решење је $(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2+a+1}{a+1})$.

б) За $a \neq \pm 6$ решење је $(\frac{2}{a+6}, \frac{3}{a+6})$; за $a = 6$ решења су $(t, \frac{1-3t}{2})$, $t \in \mathbf{R}$, док за $a = -6$ нема решења.

в) За $a \neq \frac{10}{13}$ решење је $(0, 0)$ и за $a = \frac{10}{13}$ решења су $(t, \frac{-13}{2}t)$, $t \in \mathbf{R}$.

г) За $a \neq \pm 1$ решење је $(0, 1)$, за $a = \pm 1$ решења су $(t, 1 \pm t)$, $t \in \mathbf{R}$.

768. а) $(2, 1)$ б) $(1, 1)$ или $(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7})$.

769. а) $(8, 13)$ или $(2, 1)$; б) $(2, 1)$ или $(0, -3)$ или $(-6, 9)$; в) увести смену $x+y = u$, $x-y = v$. Добије се $u = 3$, $v = -1$; $x = 1$, $y = 2$;

г) За $a = -b$, $x \geq \frac{|a|}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, за $a \geq |b|$ $x = -\frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, за $b \geq |a|$ $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$, за $a = b \geq 0$, $x = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$;

д) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$; ђ) $(0, 3)$, $\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$; е) $(3, -2)$, $(1, -6)$, $(-5, 6)$; ж) $(2, 0)$, $(-1, -3)$, $(\alpha, \alpha+2)$, $\alpha \in [-3, 0]$.

770. а) Ако прву једначину помножимо са -2 и додамо другој, а затим прву једначину додамо трећој, добићемо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y + z = 1 \\ 6y - z = 9. \end{cases}$$

Ако сада другу једначину додамо трећој, добијамо евивалентан систем "дијагоналног" облика:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -y+z=1 \\ 5y=10. \end{cases}$$

Из треће једначине сада се непосредно налази да је $y=5$, потом из друге $z=3$ и, на крају, из прве $x=1$. Дакле, решење је $(1, 2, 3)$;
б) $(8, 4, 2)$; в) $(1, 2, 2)$; г) $(2, 1, 3)$; д) нема решења; ђ) $(1, 0, -1)$;
е) Систем је "неодређен", јер је трећа једначина збир прве две. Решења су $(10t+1, 7t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.
ж) Нема решења.

771. Из $\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}$ и $\frac{250}{x}=\frac{200}{y}$, налазимо $x=50\ km/h$, $y=40\ km/h$.

772. Нека је x брзина реке, а y брзина чамца у мирној води. Тада је $\frac{20}{y+x}+\frac{20}{y-x}=10$ и $\frac{2}{y-x}=\frac{3}{y+x}$. Налазимо да је $y+x=5$, $y-x=\frac{10}{3}$, па је $x=\frac{5}{6}\ km/h$.

773. Нека Иван има - x, а Марко - y година. Тада је $x=2(2y-x)$ и $x+y=35$. Решење је : $x=20$, и $y=15$.

774. 36 и 27.

775. Из $x+z=2y$, $y+z=3x$, добија се $x:y:z=3:4:5$. Дакле, победила је трећа бригада.

776. Означимо са x, y, z, u, v учинке првог, другог, трећег, четвртог и петог радника, редом. Из услова задатка се добија
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{15}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{4}$. Помножимо последњу једнакост са 2 и додајмо јој прве три. Тада је $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=1$ тј. сви радници, радећи заједно, урадили би посао за три часа.

777. 10 дана.

778. Осам.

779. 100 l у првом, 45 l у другом суду.

780. 60 и 30 литара.

781. 30 km/h и 35 km/h.

782. 4 km.

783. Из $v_1+v_2=70$, $2v_1=6(v_2-v_1)$ налазимо $v_1=30\ km/h$, $v_2=40\ km/h$.

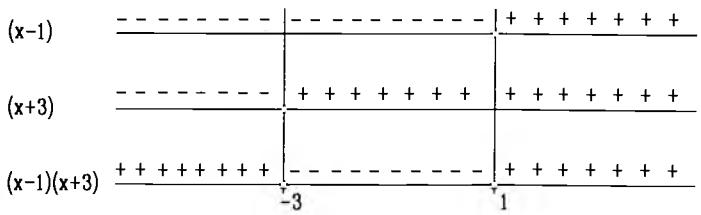
784. Из $60v_1-60v_2=1,2$, $15v_1+15v_2=1,2$ се добија $v_1=0,03\ m/sec$, $v_2=0,05\ m/sec$.

785. а) $x\in(-\infty, 2]$; б) $x\in(\frac{1}{3}, +\infty)$; в) $x\in(-\infty, -\frac{1}{7}]$; г) $x\in(-\infty, -\frac{3}{2}]$; д) $x\in[0, +\infty)$; ђ) $x\in(-\infty, -\frac{4}{5})$; е) $x\in(-\infty, -2]$; ж) $x\in\emptyset$.

786. а) $x\in(-\infty, \frac{10}{9}]$; б) $x\in(-\infty, \frac{23}{7}]$.

787. а) $-\frac{7}{2}<x<0$; б) $x\geq 36$; в) $x\in\left(-\infty, 2\frac{1}{4}\right)\cap[-2, +\infty)$, тј. $x\in\left[-2, 2\frac{1}{4}\right)$; г) $x\in\left[\frac{17}{2}, +\infty\right)$; д) $x\in(4, +\infty)\cap(1, +\infty)\cap\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, тј. $x\in(4, +\infty)$.

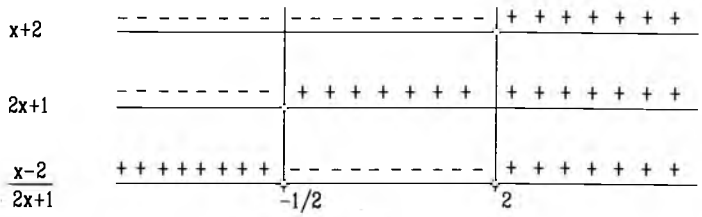
788. а) *Први начин*: Користимо еквиваленцију $AB>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0)$. Помоћу ње имамо $(x-1)(x+3)>0 \Leftrightarrow (x-1>0 \wedge x+3>0) \vee (x-1<0 \wedge x+3<0) \Leftrightarrow (x>1 \wedge x>-3) \vee (x<1 \wedge x<-3) \Leftrightarrow (x>1 \vee x<-3)$.
Други начин: Дата неједначина се може решавати графички (в. сл.)
На првој бројној оси представљен је знак функције $x-1$, на другој функција $x+3$, а на трећој знак производа. Према слици очигледнно је да се решења сви бројеви мањи од -3, као и бројеви већи од 2.



Сл. уз зад. 788

б) $x \in (-1, 2)$; в) $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$; г) $x \in [0, 3]$; д) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; ђ) $x \in [2, 3]$; е) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (1, \infty)$; ж) $x \in [-\frac{5}{2}, 2]$.

789. а) Можемо се користити еквиваленцијом $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow (A < 0 \wedge B > 0) \vee (A > 0 \wedge B < 0)$, или "табеларном" методом (в.сл.). Решења су сви бројеви x за које важи $-\frac{1}{2} < x < 2$.



Сл. уз зад. 789

б) $x < \frac{3}{2}$ или $x > 3$; в) $-3 \leq x < 4$; г) $x < -\frac{5}{4}$ или $x \geq \frac{2}{3}$.

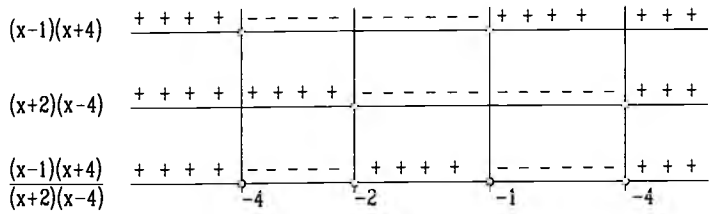
790. а) $\frac{2x-3}{x-4} - 1 \leq 0$, тј. $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$, одакле се налази решење: $-1 \leq x < 4$; б) $x \leq -\frac{5}{2}$ или $x > -1$; в) $-3 < x \leq 8$.

791. а) $\frac{1}{3} < x < 6$; б) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; в) $x < -3 \vee x > 2$.

792. а) За $x \neq 1$ дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{x+1}{x-2} < 2$, тј. $\frac{x+1}{x-2} - 2 < 0$, односно $\frac{5-x}{x-2} < 0$. Решења последње неједначине су сви реални бројеви x за које је $x > 5$ или $x < 2$. Водећи рачуна о услову $x \neq 1$, добија се да је скуп решења дате неједначине: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (5, +\infty)$.
б) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (5, +\infty)$.

793. а) $x \leq -3$ или $-1 \leq x \leq 2$; б) $x < -1$ или $1 < x < 3$; в) $1 < x < 2$ или $2 < x < 3$; г) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ или $x > 3$; д) $\frac{3}{11} < x < \frac{5}{13}$; ђ) $x < -2$ или $x > -1$; е) $x < 1$ или $x > 3$; ж) $x \leq -1$ или $2 < x < 4$ или $4 < x \leq 5$.

794. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{3x^2 - x - 20}{x^2 - 2x - 8} - 2 < 0$, тј. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} < 0$, односно $\frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x-4)} < 0$. Применом "табличног" метода лако се израчунава знак функције на левој страни последње неједначине (в.сл.). Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви x такви да је $x \in (-4, -2) \cup (1, 4)$.



Сл. уз зад. 794

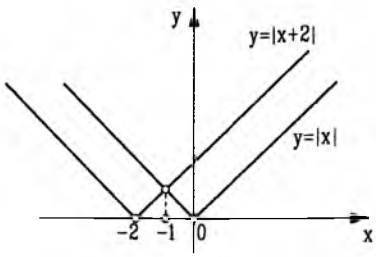
б) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 4) \cup (7, +\infty)$.

795. Дата неједначина је еквивалентна неједначина $a(x-1) + b\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$, односно $(x-1)\left(a - \frac{b}{x}\right) < 0$, тј. $\frac{(x-1)(ax-b)}{x} < 0$. Скуп решења је $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{b}{a}, 1\right)$.

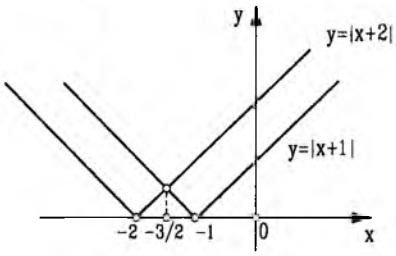
796. $A - B = (x+1)(x-1)^2$, па је а) $x > -1 \wedge x \neq 1$; б) $x = 1 \vee x = -1$; в) $x < -1$.

797. а) За $x < \frac{5}{2}$ имамо $5 - 2x < 1$, тј. $x > 2$, а за $x \geq \frac{5}{2}$ добијамо $2x - 5 < 1$, тј. $x < 3$. У првом случају решења неједначине су бројеви из интервала $\left(2, \frac{5}{2}\right)$, а у другом $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$, па су решења неједначине сви реални бројеви x за које важи $x \in (2, 3)$.
б) $x \leq \frac{1}{6} \vee x \geq \frac{3}{2}$; в) $x < -2 \vee x > 2$; г) $\frac{5}{3} < x < 3$; д) $x \geq -1$; ђ) $x > \frac{9}{2}$; е) $x < -2 \vee x > 5$; ж) $x \leq 2$.

798. а) Решења су: $x > -1$, (в.сл.); б) Решења су: $x > -\frac{3}{2}$, $x \neq -1$, (в.сл.).



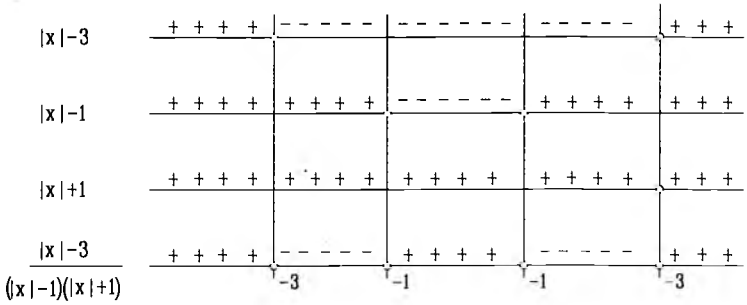
Сл. уз зад. 798а



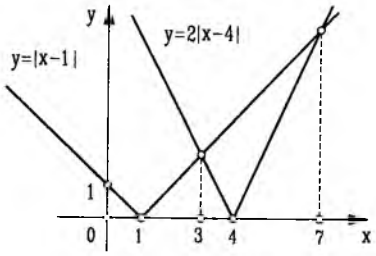
Сл. уз зад. 798б

799. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини: $\frac{|x| - 3}{(|x|-1)(|x|+1)} < 0$. Решење се могу одредити из таблице на слици. Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви x за које важи $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.
б) $x \in (-\infty, -7) \cup (-1, 1) \cup (7, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, -5) \cup (-2, 2) \cup (5, +\infty)$; г) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (5, +\infty)$.

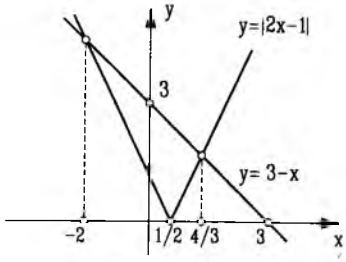
800. а) За $x \neq 1$, $x \neq 4$ дата неједначина еквивалентна је неједначини $|x-1| < 2|x-4|$. За $x < 1$ добијамо $1 - x < -2x + 8$, тј. $x < 7$. За $1 < x < 4$ имамо $x - 1 < 2(4 - x)$, односно $x < 3$ и за $x > 4$ имамо $x - 1 < 2(x - 4)$, одакле се добија $x > 7$. Узимајући у обзир услове, добијамо да је скуп решења $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (7, +\infty)$. "Графичко" решење неједначине $|x-1| < 2|x-4|$ приказано је на слици.
б) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup (9, +\infty)$.



Сл. уз зад. 799



Сл. уз зад. 800а



Сл. уз зад. 802а

801. а) $x \in [\frac{3}{2}, 2)$; б) $x \in (-\infty, 0] \cup (1, 2) \cup [4, +\infty)$; в) $x \in [-\frac{11}{2}, -5)$; г) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup [0, +\infty)$; д) $x \in [-6, -5)$; ђ) $x \in (-5, 0) \cup (1, 5)$.

802. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\sqrt{(2x-1)^2} < 3 - x$, тј. $|2x - 1| < 3 - x$. Имамо два случаја:

1° За $\frac{1}{2} \leq x$ неједначина постаје $2x - 1 < 3 - x$, одакле је $\frac{1}{2} \leq x < \frac{4}{3}$.

2° За $x < \frac{1}{2}$ неједначина је $-2x + 1 < 3 - x$, одакле је $-2 < x < \frac{1}{2}$. Дакле, решење неједначине је $-2 < x < \frac{4}{3}$, (в.сл.);

б) $x < -\frac{9}{7}$ или $x > 1$;

в) Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{|x+2|}{|3-x|} < 2$, тј. $|x + 2| < 2|3 - x|$, за $x \neq 3$.

Решења: $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (8, +\infty)$;

г) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{9}{5}$.

803. а) $17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{4\cdot 14} = 2^{4\cdot 14} = 2^{56}$, $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{5\cdot 11} = 2^{55}$. Одавде је $17^{14} > 31^{11}$.

б) Како је $\frac{1}{51} > \frac{1}{100}, \frac{1}{52} > \frac{1}{100}, \cdots, \frac{1}{99} > \frac{1}{100}$, добићемо $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{99} > \frac{49}{100}$, на основу чега имамо $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > 50 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2}$.

в) Нека је $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{120}{121}$, $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{119}{120}$. Како је $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \cdots, \frac{120}{121} > \frac{119}{120}$, имамо $x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$, па је $x^2 > \frac{1}{121}$, односно $x > \frac{1}{11}$.

г) Користити доказ под в).

804. а) Како је $ab > 0$, то множењем дате неједнакости са ab добија се еквивалентна неједнакост: $a^2+b^2 \geq 2ab$, или $(a-b)^2 \geq 0$, што је увек тачно. Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.
б), в) Доказ идентичан као под а).
г) сабирањем неједнакости $a^2+b^2 \geq 2ab, b^2+c^2 \geq 2bc$, $a^2+c^2 \geq 2ac$ добијамо: $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac)$, односно $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.
д) Сабрати неједнакости $a^2+1 \geq 2a, b^2+1 \geq 2b, c^2+1 \geq 2c$.

805. а) за све реалне бројеве x важи $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x^2}{2(1+x^4)} = \frac{(1-x^2)^2}{2(1+x^4)} \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $|x| = 1$;
б) $(1+2x^4)-(2x^3+x^2) = (x^4-2x^3+x^2)+(x^4-2x^2+1) = (x^2-x)^2+(x^2-1)^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $x = 1$;
в) Применити везу између аритметичке и квадратне средине;
г) Искористити да је $x^2+z^2 \geq 2xz$ и $b^2 = xz$;
д) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \leq 0$.

806. а) $(a+1)^2+2 > 0$; в) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; д) $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = 0$.

807. а) *Први начин.* Ако наведену неједнакост поделимо са abc, добијамо $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6$, а како је $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, закључујемо да је нејенакост тачна.
Други начин. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc = a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-2abc-2abc-2abc = a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$ или ако су бар два од бројева a, b и c једнака 0.
б) Из $(a-b)^2 \geq 0$ следи $a^2-ab+b^2 \geq ab$. Ако помножимо ту неједнакост са $a+b > 0$ добијамо $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.
в) $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{(1+a)+b} + \frac{b}{(1+b)+a} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.
г) $a^4+b^4-a^3b-ab^3 = (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0$.

808. а) Из $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ добијамо $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, односно $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
б) Користећи а) имамо $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$. Последњи израз је аритметичка средина бројева $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{cd}$, па је $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$, односно $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
в) Када у неједнакости б) ставимо да је $d = \frac{a+b+c}{3}$ добијамо

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}, \text{ тј. } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}.$$

Четврти степен обе стране последње неједнакости је $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\cdot\frac{a+b+c}{3}$, и ако обе стране поделимо са $\frac{a+b+c}{3} \neq 0$ добијамо тражену неједнакост $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Једнакост важи за $a = b = c$.

809. а) Сабирањем неједнакости $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ добијамо дату неједнакост;

б) Дата неједнакост је еквивалентна неједнакостима: $\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geq 0$, $a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$, $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$. Једнакост важи за $a=b$;

в) Доказ следи неносредно из следећег низа еквивалентних неједнакости: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})}{\sqrt{ab}}$, $\sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$, одакле је $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Једнакост важи за $a=b$.

г) Приметимо да је $a^2+3=(a^2+2)+1=\sqrt{(a^2+2)^2}+1$. Даље је $\sqrt{(a^2+2)^2}+1 > 2\sqrt{a^2+2}$, односно $\left(\sqrt{a^2+2}+1\right)^2 > 0$.

812. $a=-\frac{1}{4}$. **813.** $b=\frac{2}{3}$. **814.** $a=b=-1$. **815.** $m=2$.

816. а) 1° $b=-2, y=\frac{9}{5}$; 2° $b=3, x=-\frac{4}{5}$; 3° $b^2-2b+1=0$, тј. $(b-1)^2=0$, тј. $b=1, y=\frac{3}{2}x$.

б) 1° $b=1, y=-\frac{4}{3}$; 2° $b=-2, x=\frac{1}{3}$; 3° $b=-1, y=2x$.

817. $f(1)=2+3\cdot 1=5$, $f(2)=8$, $g(1)=3$, $g(2)=4$.

818. За $x=5, y=0$ следи $0=(a-1)\cdot 5-(a+2)$ одакле је $a=\frac{7}{4}$.

819. а) Треба да буде $\frac{3k+5}{4-k} > 0$ и $4-k^2 > 0$, тј. $-\frac{5}{3} < k < 4$ и $-2 < k < 2$, дакле $k \in (-\frac{5}{3}, 2)$; б) $k \in (-1, \frac{1}{2})$.

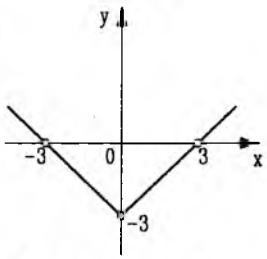
820. а) $a=\frac{3}{5}$; б) $a=0$.

821. Из $a-3=2a+1$ следи $a=-4$.

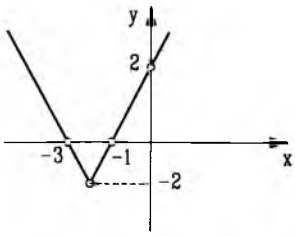
822. а) Да би угао био оштар, тј. да би функција била растућа, мора бити $k>0$, одакле следи $2m-3>0$, односно $m>\frac{3}{2}$.

б) $k<0$, $m<\frac{3}{2}$; в) $k=0$, $m=\frac{3}{2}$.

823. а) Треба да буде $\frac{3k-1}{k-2} > 0$, тј. $k<\frac{1}{3}$ или $k>2$; б) $1<k<\frac{3}{2}$.



Сл. уз зад. 824а

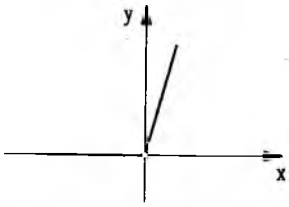


Сл. уз зад. 824б

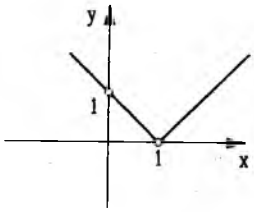
824.

$$\text{а) } |x|-3=\begin{cases} x-3, & \text{за } x \geq 0 \\ -x-3, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } |2x+4|-2=\begin{cases} 2x+2, & \text{за } x \geq -2 \\ -2x-6, & \text{за } x < -2 \end{cases}$$



Сл. уз зад. 824в



Сл. уз зад. 824г

в) $x + |x| = \begin{cases} 2x; & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{за } x < 0 \end{cases}$

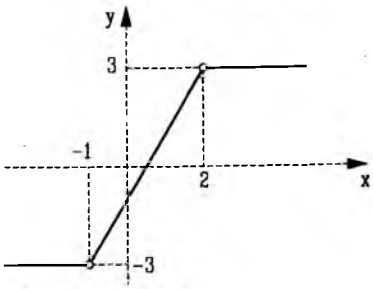
г) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{за } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{за } x < 1. \end{cases}$

825.

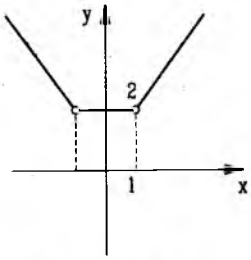
а) $|x + 1| - |x - 2| = \begin{cases} 3, & \text{за } x \geq 2 \\ 2x - 1, & \text{за } -1 \leq x \leq 2 \\ -3, & \text{за } x < -1 \end{cases}$

б) $|x + 1| + |1 - x| = \begin{cases} 2x, & \text{за } x \geq 1 \\ 2, & \text{за } -1 \leq x < 1 \\ -2x, & \text{за } x \leq -1 \end{cases}$

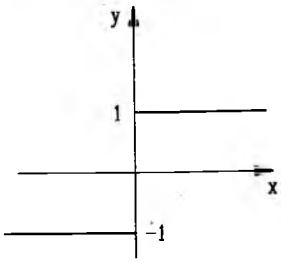
г) $x + \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, & \text{за } x > 0 \\ x - 1, & \text{за } x < 0. \end{cases}$



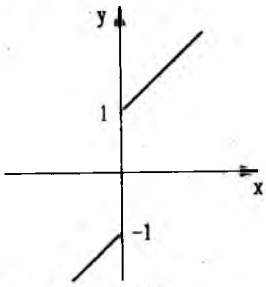
Сл. уз зад. 825а



Сл. уз зад. 825б



Сл. уз зад. 825в



Сл. уз зад. 825г

826. а) За $b \neq 4$, $x \neq -1$ једначина је еквивалентна једначини $4x^2 - 3a = 4x(x+1) + x(b-4)$, тј. $bx = -3a$. За $b \neq 0$ решење је $x_1 = \frac{-3a}{b} \neq -1$, мора да буде $a \neq \frac{b}{3}$. Дакле, решења полазне једначине су: за $b \neq 4$, $b \neq 0$, $a \neq \frac{b}{3}$ - $x_1 = -\frac{3a}{b}$; за $b = 0$, $a = 0$ - решење је сваки реалан број различит од -1; за $b = 4$ нема решења; за $b \neq 0$, $a = \frac{b}{3}$ - нема решења; за $b = 0, a \neq 0$ - нема решења.

б) За $a \neq 1$, $b \neq -1$, $a + b \neq 0$ - решење је $x_1 = 1$; за $a + b = 0$ решење је сваки реалан број $x \neq a$ и $x \neq -b$; за $a = 1$ или $b = -1$, а $a + b \neq 0$ нема решења.

в) За $a \neq \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ решење је $x_1 = \frac{ab}{a-b}$; за $a = b \neq 0$ - нема решења; за $a = -b$ решење је свако $x \neq -a$; за $a \neq b = 0$ и $a = 0 \neq b$ нема решења.

г) За $a \neq 0$ $x_1 = 5$, за $a = 0$ – нема решења.

д) За $a \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq 2b$ $x_1 = \frac{5a+b}{2}$, за $a \neq 0$, $a = 2b$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{3a, 3b\}$, за $a = 0$ или $a = b$ нема решења.

ђ) За $a \neq \pm 3b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ $x_1 = a + 3b$, за $a = 3b$, $a \neq -3b$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, а за $a = 0$ или $b = 0$ или $a = -3b$ нема решења.

827. а) За $a \neq \pm\frac{3}{2}$, $a \neq 3$, $a \neq -\frac{3}{5}$ решење је $x_1 = \frac{3a}{2a+3}$. За $a = -\frac{3}{2}$, $a = 3$, $a = -\frac{3}{5}$ - нема решења, а за $a = \frac{3}{2}$ решења су сви реални бројеви x различити од ± 1.

б) За $m \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ лева и десна страна једначине могу се помножити са $(m-1)(x+2)(x+1)$. Добијамо еквивалентну једначину $(2m-5)(x+1) - 3(m-1)(x+2) = (3x+4)(m-1)$, односно $x(1-4m) = 8m-5$. Последња једначина за $m = \frac{1}{4}$ нема решења, а за $m \neq \frac{1}{4}$ има решење $x_1 = \frac{8m-5}{1-4m}$. Да би овај број био решење полазне једначине треба да буде $\frac{8m-5}{1-4m} \notin \{-1, -2\}$, тј. $m \neq 1$. Дакле, за $m \neq 1$ и $m \neq \frac{1}{4}$ решење је $x_1 = \frac{8m-5}{1-4m}$, а за $m = 1$ или $m = \frac{1}{4}$ - нема решења.

в) За $x \neq \pm 2$ једначина је еквивалентна једначини $(3a-4)(3a+4)x = 2a(3a+4)$, тј. за $a \neq \pm\frac{4}{3}$ $x = \frac{2a}{3a-4}$. Међутим мора да буде $\frac{2a}{3a-4} \neq \pm 2$, одакле се добије $a \neq 1$ и $a \neq 2$. Дакле, за $a \neq \pm\frac{4}{3}$, $a \neq 1$, $a \neq 2$ решење је $x_1 = \frac{2a}{3a-4}$, а ако је $a = 1$ или $a = 2$ или $a = \frac{4}{3}$ - нема решења. Ако је $a = -\frac{4}{3}$ решење је свако x различито од ± 2.

г) За $|a| \neq 1$ решење је $x_1 = \frac{a+1}{2}$, за $|a| = 1$ - нема решења.

828. а) За $x \neq \pm m$ дата једначина еквивалентна је једначини $x(2m-n) = -n(2m-n)$. Решења су: за $m = 2n$ - $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm m\}$; за $m \neq \pm n, m \neq 2n$ $x = -n$; за $0 \neq m \neq \pm n$ нема решења;

б) за $a \neq \pm b$; дата једначина трансформише се у облик $x(a+b) = 3b(a+b)$. Дакле, за $a \neq \pm b$ решење је $x_1 = 3b$, док за $a = b$, или $a = -b$, нема решења;

в) за $m \neq 0, m \neq 2$ једначина је еквивалентна једначини $x(m+3) = 6-m$. За $m \neq -3, m \neq 0, m \neq -2$, решење је $x_1 = \frac{6-m}{m+3}$, а за $m = -3$, или $m = 0$, или $m = 2$ - нема решења.

г) за $m \neq \pm 2$ добијамо еквивалентну једначину $mx = 8m-2$. Решења: за $m \neq 0, m \neq \pm 2$ $x_1 = \frac{8m-2}{m}$; за $m = 0$, или $m = 2$, или $m = -2$ - нема решења;

д) за $m \neq \pm n, m \neq 0, n \neq 0$ решење је $x = \frac{m+n}{2}$; за $m = -n \neq 0$ решења су $x \in \mathbf{R} \setminus \{m, n\}$; за $m = 0$ или $n = 0$ или $m = n$ - нема решења.

829. а) $x = ab$ за $a \neq 0$ и $a \neq \pm b$; б) Једначина нема решење за $m \neq -1$. За $m = -1$ решења су сви $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

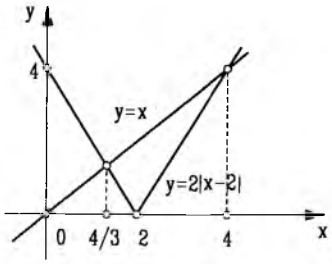
830. а) За $a \neq 2$, $x = \dfrac{4(a+1)}{(a+1)^2+1}$; б) $a > -1$; в) $a = -1$.

831. а) Решење је $x_1 = \dfrac{a}{a+1}$; б) $x > 0$ за $a < -1$ или $a > 0$, $x > 1$ за $a < -1$.

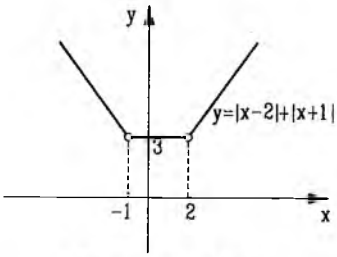
832. а) Први сабирак написати у облику $\dfrac{x-(a+b+c)}{c} + 1$, а затим слично и остала два. Сабирањем добијамо $[x-(a+b+c)]\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = 0$, па је за $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \neq 0$ решење $x = a+b+c$, а уколико је $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 0$ решење је свако x, уз услов да је $a, b, c \neq 0$.
б) За $a, b, c \neq 0$ и $a+b+c \neq 0$, $x = a+b+c$. За $a, b, c \neq 0$ и $a+b+c = 0$ решење је свако x, а нема решења ако је $a = 0$, или $b = 0$ или $c = 0$.

833. Посматрајмо графике функција $y_1 = \dfrac{x-a}{2}$ и $y_2 = |2|x| - a^2|$. Види се да је максималан број решења ове једначине једнак четири и то када је $a < -\dfrac{a^2}{2}$ и $-\dfrac{a}{2} < a^2$. Пошто је, очигледно, $a < 0$, то се из последњих неједнакости добија $-2 < a < -\dfrac{1}{2}$.

834. а) Из $2\sqrt{(x-2)^2} = x$ добијамо $2|x-2| = x$.
1° За $x > 2$ је $2x - 4 = x$, тј. $x_1 = 4$;
2° За $x \leq 2$ је $4 - 2x = x$, тј. $x_2 = \dfrac{4}{3}$.
б) Једначина се може представити у облику $|x-2| - |2x+3| = -1$. Решења су $x_1 = -6$ и $x_2 = 0$.



Сл. уз зад. 834а



Сл. уз зад. 839а

835. а) Како је $x + 3 - 2\sqrt{x+2} = \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$ и $x + 27 - 10\sqrt{x+2} = \left(\sqrt{x+2}-5\right)^2$, то је дата једначина еквивалентна једначини $|\sqrt{x+2}-1| + |\sqrt{x+2}-5| = 4$. Добијамо да је $1 \leq \sqrt{x+2} \leq 5$, одакле следи да су решења сви реални бројеви за који важи $-1 \leq x \leq 23$.
б) $3 \leq x \leq 7$; в) $1 \leq x \leq 26$; г) $2 \leq x \leq 5$; д) $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 5$.

836. а) $1 \leq x \leq 2$, сл.; б) $x = 1$ или $x = \dfrac{11}{2}$, сл.; в) $1 \leq x \leq 2$ или $x = 5$, сл.; г) $x = \pm 4$ или $x = \pm 2$ или $x = 0$, сл.

837. Ако уведемо смену $\dfrac{1}{x} = t$, добијамо једначину $|t| + |t-1| + |2t-1| = \dfrac{4}{3}$, чија су решења $t_1 = \dfrac{1}{3}$, $t_2 = \dfrac{2}{3}$, па је $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{3}{2}$.

838. а) За $a < 3$ - нема решења; за $3 \leq a < 4$ - решења су $x_1 = 3 - a$, $x_2 = a - 3$; за $4 \leq a \leq 5$ - решења су $x_1 = 3 - a$, $x_2 = \dfrac{a-1}{3}$, за $a > 5$ - решења су $x_1 = -\dfrac{a+1}{3}$, $x_2 = \dfrac{a-1}{3}$.
б) За $a < -2$ - нема решења; за $a = -2$ - решења су $x \leq 2$; за $a > -2$ - решење је $x_1 = 1 - \dfrac{a}{2}$;
в) За $a < 0$ - нема решења; за $a = 0$ - решења су $x \geq 0$; за $a > 0$ - решење је $x_1 > -\dfrac{a}{2}$.

839. а) Посматрајмо график функције $y = |x-2| + |x+1|$ и график функције $y = a + 2x$, $a \in \mathbf{R}$ (сл.) Види се да за $a < -1$ - нема решења, за $a = -1$ решења су $x \geq 2$, за $-1 < a \leq 5$ решење је $x_1 = \frac{3-a}{2}$, за $a > 5$ решење је $x_1 = \frac{1-a}{4}$.

б) За $b < -1$ нема решења, за $b = -1$ решења су $x \in (-\infty, -2]$, за $-1 < b < 5$ решење је $x_1 = \frac{b-3}{2}$, а за $b \geq 5$ -$x_1 = \frac{b-1}{4}$.

в) За $a < 0$ - нема решења, за $a = 0$ решења су $x \geq 1$, за $0 < a \leq 4$ решење је $x_1 = \frac{2-a}{2}$ и за $a > 4 - x_1 = \frac{-a}{4}$.

г) За $b = 1$ - $x \geq 2$, за $-1 < b < 1$ - нема решења, за $b = -1$ - $x \leq -2$, за $|b| > 1$ - $x_1 = \frac{2}{b}$.

840. а) $(2, -\frac{1}{a})$ за $a \neq 0, a \neq -3$; нема решења за $a = 0$; $(3y+1, y)$, $y \in \mathbf{R}$, за $a = -3$.

б) $(a+1, a-1)$ за $a \neq 0$, $a \neq 1$; $(x, x-2)$, $x \in \mathbf{R}$, за $a = 0$; $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$, за $a = 1$.

в) Ако је $a = b = 0$, решења су $(x, 1-x)$, $x \in \mathbf{R}$; ако је $b = 0$, $a \neq 0$, нема решења; за $b \neq 0$ решење је $(\frac{b-a}{2b}, \frac{a+b}{2b})$.

г) $((a+b)^2, (a-b)^2)$ за $a \neq 0, a \neq \pm b$; (x, x), $x \in \mathbf{R}$, за $a = 0$, $b \neq 0$; нема решења за $a = \pm b$.

д) $(\frac{-m}{2m+1}, \frac{2m+1}{m+1})$ за $m \neq \pm 1$, $m \neq -\frac{1}{2}$; нема решења за $m = -1$ или $m = -\frac{1}{2}$; $(x, 3 - \frac{1}{x+1})$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, за $m = 1$.

ђ) $(1, h)$ за $a \neq \pm b$; $(x, 1+h-x)$ за $a = b \neq 0$; $(x, x-1+h)$ за $a = b \neq 0$; сви парови (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$, за $a = b = 0$.

841. а) За $b \neq 0$, $a \neq 2$ решење је $(b, -a)$, за $b = 0$ решења су $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 2$ - решења су $(-b - b\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

б) За $b \neq 1$, $a \neq 2$ решење је $(-b, a)$, за $b = 1$ решења су $(-1, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 2$ - решења су $(b - 2 + (1-b)\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

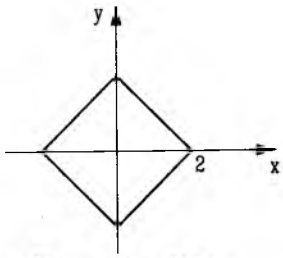
в) за $b \neq 0$, $a \neq 1$ решење је $(b, a-1)$, за $b = 0$ решења су $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 1$ - решења су $(b + b\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

г) за $b \neq -1$, $a \neq 2$ решење је $(-b, a)$, за $a = 2$ решења су $(b + 2 - (b+1)\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $b = -1$ - решења су облика $(1, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

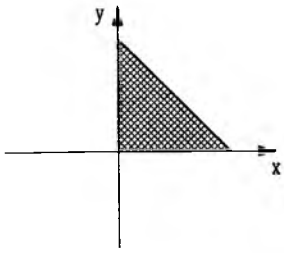
д) за $a \neq 1, b \neq 4$ решење је $(b, \frac{1}{a-1})$. За $a = 1, b \neq 4$ - нема решења, за $b = 4, a \neq 1$ решења су $(5 - (a-1)\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$ и за $a = 1$, $b = 4$ решења су $(5, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

ђ) за $a \neq 0$, $b \neq -\frac{5}{3}$ решење је $(1, a)$, за $a = 0$ решења су $(1, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $b = -\frac{5}{3}$ решења су $(3a^2 + 1 - 3a\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

842. а) – г): видети слике.

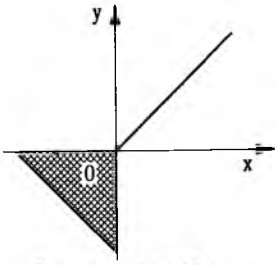


Сл. уз зад. 842а

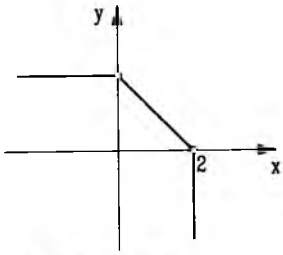


Сл. уз зад. 842б

843. Решење система је $\left(\frac{3n+8}{n^2+6}, \frac{4n-9}{n^2+6}\right)$. Због $x > 0, y < 0$ треба да буде $-\frac{8}{3} < n < \frac{9}{4}$, тј. $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



Сл. уз зад. 842в

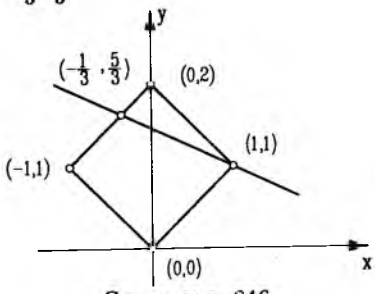


Сл. уз зад. 842г

844. $a = 0, b = 0, c = \frac{9}{4}$, или $a = 2, b = -1, c = 1$.

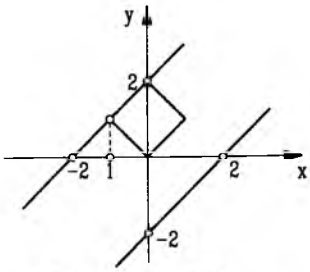
845. Из $9x = n^2(n-1)$, како су n^2 и $n-1$ узајамно прости следи $n = 3k$ или $n = 9k+1$ ($k \in \mathbf{N}$). У првом случају се добија $x = k^2(3k-1), y = k^2(10-3k)$, па је $x, y \in \mathbf{N}$ ако и само ако је $n = 3, n = 6$ или $n = 9$. У другом случају се покаже да не може бити истовремено $x \in \mathbf{N}$ и $y \in \mathbf{N}$.

846. Решења су $(1, 1)$ или $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$, (в.сл.).

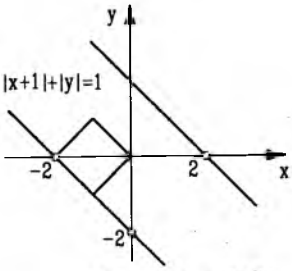


Сл. уз зад. 846

847. а) Решења су облика $(\alpha, -2-\alpha)$, $\alpha \in [-2, -1]$, (в.сл.);
б) Решења су облика $(\alpha, \alpha+2)$, $\alpha \in [-1, 0]$, (в.сл.).



Сл. уз зад. 847а



Сл. уз зад. 847б

848. а) Означимо: $\frac{3}{x+2y+z} = a$, $\frac{4}{5x-y+2z} = b$, $\frac{5}{3x+2y+z} = c$. Сада је $2a+b+c = 4$, $a+2b+c = 4$, $3a+3b-2c = 4$. Решење овог система је $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Из $x+2y+z = 3$, $5x-y+2z = 4$, $3z+2y+z = 5$ добија се да је решење датог система $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.
б) $(1, 0, -1)$.

849. а) Увести смене: $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{y}{b} = y'$, $\frac{z}{c} = z'$. Решење је $(-a, b, c)$.

б) $(bc,\ ac,\ ab)$.

в) Сваку од једначина поделити са abc и увести смене: $\frac{x}{a}=x'$, $\frac{y}{b}=y'$, $\frac{z}{c}=z'$. Решење је $(a,\ 2b,\ 3c)$.

850. а) $(\frac{a-9b-2}{11}, \frac{-5a+9b+10}{11}, a, b)$ $a,b\in\mathbf{R}$;

б) $(-1,3,-2,2)$: в) $(2,1,-3,1)$; г) нема решења; д) $(1,2,3,4,-4,-3,-2,-1)$.

851. Када саберемо једначине, добијемо $2(x+y+z)^2=288$, одакле је $x+y+z=\pm 12$, што можемо заменити у дате једначине. Добијају се два система, чија су решења $(2,4,6)$ и $(-2,-4,-6)$.

852. Означимо са x,y,z,u једночасовни учинак прве, друге, треће и четврте цеви. Тада је

$$\begin{cases} x+y+z+u=\frac{1}{4} \\ x+y+u=\frac{1}{6} \\ y+z+u=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Из прве и друге једначине следи $z=\frac{1}{12}$, а из прве и треће $x=\frac{1}{20}$, па је $z+x=\frac{2}{15}$, односно прва и трећа цев напуне базен за 7,5 часова.

853. Нека је m број страна и n број ученикових марака. Тада је $20m<n$, $23(m-1)\geq n$ и $21m+n=500$. Заменом n из једначине добијамо $20m<500-21m$ и $23(m-1)\geq 500-21m$. Како је m цео број из прве неједначине следи $m\leq 12$, а из друге $m\geq 12$, па је $m=12$.

854. а) За $a=-2$ решење је $(0,-2)$, за $a=-1$ решење је $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$. За $a\neq -1, a\neq -2$ - нема решења;

б) За $a=2$ решење је $(0,2)$, за $a=-1$ решење је $(-1,-2)$. За $a\neq -1, a\neq 2$ - нема решења.

855. Елиминацијом y из датих једначина добијамо $z=12x$, како је $z>0$ и $x>0$ биће $z>x$.

856. а) Дати систем се може написати у облику:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12} \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18} \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{13}{36}.$$

После примене смене: $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b, \frac{1}{z}=c$, налазимо $x=4, y=6, z=9$; б) $\left(\frac{35}{4},-210,\frac{35}{9}\right)$.

857. Означимо са x почетну количину траве и са y дневни прираст траве (у количинама дневних порција), тада је $x+50y=40\cdot 50$, $x+30y=60\cdot 30$, одакле је $x=1500$, $y=10$. Из $1500+10\cdot z=z\cdot 20$ налазимо да 20 крава мора пасти $z=150$ дана, а из $1500+10\cdot 75=u\cdot 75$, налази да 75 дана на ливади може пасти $u=30$ крава.

858. а) $x>\frac{a-4}{5-a}$, за $a<5$, $x<\frac{a-4}{5-a}$, за $a>5$, $a=5$ – нема решења;

б) $x>\frac{m+2}{n+1}$, за $n>-1$; $x<\frac{m+2}{n+1}$, за $n<-1$; свако x за $n=-1$ и $m<-2$; нема решења за $n=-1$, $m\geq -2$;

в) $x>a+b$ за $a>b$; $x<a+b$ за $a<b$; $a=b$ - нема решења;

г) $x<\frac{2b}{a}$ за $a>0$, $x>\frac{2b}{a}$, за $a<0$;

д) $x>\frac{2}{(a+1)^2}$ за $a>-1$, $x<\frac{2}{(a+1)^2}$ за $a<-1$;

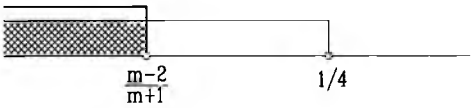
ђ) $x>a(a+1)$ за $a>0$, $x<a(a+1)$ за $a<0$;

е) $x\leq\frac{a-2}{a-1}$ за $a<1$ или $a>2$, $x\geq\frac{a-2}{a-1}$ за $1<a<2$, $x\in\mathbf{R}$ за $a=1$ или $a=2$.

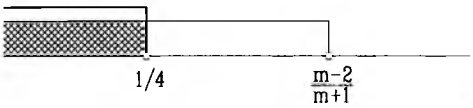
859. Решења прве неједначине система су: за $m < -1$ - $x > \frac{m-2}{m+1}$; за $m > -1$ $x < \frac{m-2}{m+1}$; за $m = -1$ она се своди на $0 \cdot x < -3$ и она нема решења. Решења друге неједначине су $x < \frac{1}{4}$. Сада треба утврдити када је (за $m \neq -1$) испуњено $\frac{m-2}{m+1} \geq \frac{1}{4}$, односно $\frac{m-2}{m+4} < \frac{1}{4}$. Нека је, најпре $m > -1$. Тада је неједначина $\frac{m-2}{m+1} \geq \frac{1}{4}$ еквивалентна неједначини $4(m-2) \geq m+1$, тј. $m \geq 3$, док је за $-1 < m < 3$ $\frac{m-2}{m+1} < \frac{1}{4}$. Ако је $m < -1$, неједначина $\frac{m-2}{m+1} \geq \frac{1}{4}$ еквивалентна је неједначини $4(m-2) \leq m+1$, тј. $m \leq 3$. Овај услов је сагласан услову $m < -1$, што значи да је за све $m < -1$ испуњен услов $\frac{m-2}{m+1} \geq \frac{1}{4}$. Резимирајмо закључке до којих смо дошли:

1° $m < -1$, $x > \frac{m-2}{m+1}, x < \frac{1}{4}$,

2° $-1 < m \leq 3$, $x < \frac{m-2}{m+1}, x < \frac{1}{4}$,



3° $m > 3$, $x < \frac{m-2}{m+1}, x < \frac{1}{4}$.



а) $m < -1$ - нема решења; б) $m = -1$ - нема решења; в) $-1 < m \leq 3$ - $x < \frac{m-2}{m+1}$; г) $m > 3$ - $x < \frac{1}{4}$.

860. а) Прва неједначина система еквивалентна је неједначини $x(a-1) < a^2 - 1$, а њена решења су: (1) за $a < 1$ $x > a+1$, (2) за $a = 1$ - нема решења, (3) за $a > 1 : x < a+1$.
Друга неједначина система еквивалентна је неједначини $(a-4)x < 2(a-4)$, па су њена решења: (1) за $a < 4 : x < 2$, (2) за $a = 4$ - нема решења, (3) за $a > 4 : x > 2$.
Како је $a+1 > 2$, за $a > 1$, то су решења датог система неједначина: 1° за $a < 1 : x > 2$; 2° за $a = 1$: нема решења; 3° за $1 < a < 4 : 2 < x < a+1$; 4° за $a = 4$: нема решења; 5° за $a > 4 : x < 2$.
б) За $a < -3 : x < 2$; за $a = -3$ и $a = 0$ - нема решења; за $-3 < a < 0 : 2 < x < 2 - a$ и за $a > 0 : x > 2$.
в) За $c < -2 : x < 2$; за $c = -2$ и $c = 1$ - нема решења; за $-2 < c < 1 : 2 < x < 3 - c$ и за $c > 1 : x > 2$;
г) за $c < -1 : x > 2$; за $c = -1$ и $c = 2$ - нема решења; за $-1 < c < 2 : 2 < x < c + 3$; за $c > 2 : x < 2$.

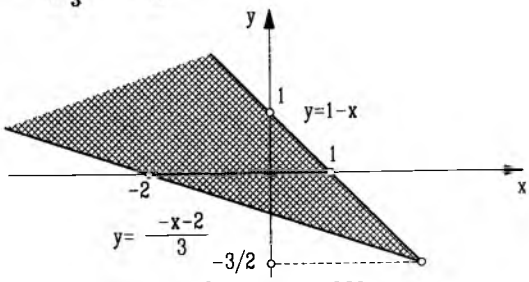
861. а) Решења прве неједначина су: за $a > 3 : x < \frac{2-a}{3-a}$, за $a = 3 : x \in \mathbf{R}$, за $a < 3 : x > \frac{2-a}{3-a}$, а решења друге неједначине су $x < \frac{1}{3}$. Како је $\frac{2-a}{3-a} > \frac{1}{3}$ ако је $a < \frac{3}{2}$ или $a > 3$, то су решења датог система:

(1) за $a \leq \frac{3}{2}$ - нема решења; (2) за $\frac{3}{2} < a < 3$ - $x \in \left(\frac{2-a}{3-a}, \frac{1}{3}\right)$;

(3) за $a \geq 3$ - $x < \frac{1}{3}$;

б) за $m \leq 0$ - $x > \frac{11}{3}$, за $0 < m < \frac{3}{2}$ - $x \in \left(\frac{11}{3}, \frac{3m+1}{m}\right)$ и за $m \geq \frac{3}{2}$ - нема решења.

862. (а) $-3-2y \leq x \leq 1-y \wedge y \geq -\frac{3}{4}$. Геометријска интерпретација дата је на слици. б) $2-x \leq y \leq 2x+1 \wedge x \geq \frac{1}{3}$; в) $x \geq max\{y-7, 3y+2\}$.



Сл. уз зад. 862

863. а) Једначина се може написати у облику $(a-1)(a-2)x = (a-2)(a-3)$. За $a \neq 2$, $a \neq 1$ $x = \frac{a-3}{a-1}$, за $a = 2$ решење је свако x, а за $a = 1$ нема решења.
1° $a = 3$, 2° $a < 1$ или $a > 3$, 3° $1 < a < 3$, $a \neq 2$;
б) за $a \neq \pm 1$ $x = \frac{a+3}{a-1}$, за $a = -1$ решење је свако x, а за $a = 1$ нема решења. 1° $a = -3$, 2° $a < -3$ или $a > 1$, 3° $-3 < a < 1$, $a \neq -1$.

864. а) За $a \neq 5$ - $x_1 = \frac{a-4}{5-a}$ 1° $x_1 > 0$ је испуњено за $4 < a < 5$, 2° $a = 4$, 3° $a < 4 \vee a > 5$;
б) за $a \neq -1$ - $x_1 = \frac{a+2}{a+1}$ 1° $a < -2 \vee a > -1$; 2° $a = -2$; 3° $-2 < a < -1$.
в) за $a \neq -1$ - $x_1 = \frac{2}{(a+1)^2}$, па је $x_1 > 0$ за све $a \neq -1$.
г) за $a \neq 0$ - $x_1 = a(a+1)$, па је: 1° $a < -1 \vee a > 0$, 2° $a = -1$; 3° $-1 < a < 0$.

865. За $a \neq 0$, $a \neq -1$ - једначина је еквивалентна једначини $x(a+1)^2 - a(a+1)^2 = xa(a+1) - a$, тј. $x(a+1) = a^2(a+2)$, одакле је, пошто је $a \neq -1$ $x_1 = \frac{a^2(a+2)}{a+1}$. Знак решења је исти као знак израза $\frac{a+2}{a+1}$, па је $x_1 > 0$ за $a < -2 \vee -1 < a < 0 \vee a > 0$, а $x_1 = 0$ за $a = -2$ и $x_1 < 0$ за $-2 < a < -1$.

866. За $m \neq 3$ $x = \frac{15-2m}{2(m-3)}$, $y = \frac{3(13-2m)}{2(m-3)}$; $x > 0$ и $y < 0$ је за $6,5 < m < 7,5$.

867. Решење је $\left(\frac{k+16}{7}, \frac{8-3k}{7}\right)$. Услов је испуњен за $k \in \left(-23, \frac{8}{3}\right)$.

868. За $k = -1$ нема решења; за $k \neq -1$ је $x = \frac{1}{k+1}, y = \frac{k}{k+1}$ и тада је $x > 2y$ ако и само ако је $-1 < k < \frac{1}{2}$.

869. а) За $p = 0$ нема решења; за $p \neq 0$ решење је $(\frac{1}{p}, \frac{p-1}{p})$; б) $p < 0$, или $p \geq \frac{1}{2}$.

870. а) За $b \neq 1, b \neq -3$ решење је $(\frac{1}{b-1}, \frac{b+1}{b-1})$; за $b = 1$ нема решења; за $b = -3$ решења су $(t, \frac{1}{4} - t), t \in \mathbf{R}$; б) $b \in [0, 1)$.

871. а) За $b \neq 0, a \neq 1$ решење је $(b, a-1)$; за $b = 0$ решења су облика $(0, t), t \in \mathbf{R}$; за $a = 1$ решења су облика $(bt + b, t), t \in \mathbf{R}$. б) Ако у дату неједначину заменимо $x_0 = b, y_0 = a - 1$, добијамо после сређивања еквивалентну неједначину $\frac{2b-3}{b-4} \leq 1$, чија су решења $b \in [-1, 4), (b \neq 0, b \neq \frac{3}{2})$.

872. За $p \neq \pm 2$ решење је $(\frac{6}{p+2}, \frac{3}{p+2})$, за $p = 2$ решења су $(3 - 2t, t), t \in \mathbf{R}$, док за $p = -2$ нема решења. б) $-5 < p < -2$, или $-2 < p < 1$.

873. а) Систем има јединствено решење за $k \neq 1$: $(3k - 1, -1)$. Услов важи за $k \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

б) Систем има јединствено решење за $k \neq 2$: $(-1, 3k-2)$. Услов важи за $k \in (\frac{1}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$.

874. Систем има јединствено решење за $m \neq \pm 1$: $(\frac{2m}{1+m}, \frac{1-m}{1+m})$. Услов важи за $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

875. а) Посматрати аритметичку и геометријску средину бројева a^2c, b^2a и c^2b.
б) Аритметичка средина за бројеве $x + 1, 1$ и 1 није мања од геометријске, па је $\frac{(x+1)+1+1}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (x+1)}$ или $\frac{x}{3} + 1 \geq \sqrt[3]{1+x}$. Једнакост важи ако и само ако је $x = 0$.
в) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}\frac{bc}{a}} = 2b$. На исти начин се покаже $\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a$, $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$, а затим се леве и десне стране ових неједнакости саберу.
г) Аритметичка средина бројева a, b, c није мања од хармонијске.
д) Аритметичка средина бројева $\frac{b+c}{2}, \frac{b+a}{2}, \frac{a+c}{2}$ је већа или једнака од хармонијске.
ђ) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$. Ова, као и многе друге од поменутих, неједнакости може се уопштити - тако за све позитивне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

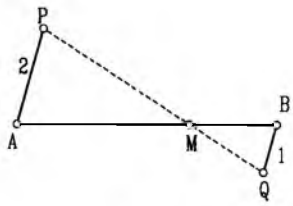
876. а) $|x + y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{2 + 2xy} = \sqrt{4} = 2$, јер због $x^2 + y^2 \leq 2$ из $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \leq 2 - 2xy$, следи $2xy \leq 2$.
в) Нека је $a = 1 + k$ и $b = 1 - k$. Тада је $a^4 + b^4 = (1+k)^4 + (1-k)^4 = 2(k^4 + 6k^4 + 1) \geq 2$, јер је $k^4 + 6k^2 \geq 0$.
ђ) Како је $(x - y - \sqrt{2})^2 = (x-y)^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) \geq 0$, биће $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$. Кориштени су услови $x - y > 0$ и $xy = 1$.
е) $x^2 + y^2 - \frac{4}{a} = x^2 + y^2 - \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} \geq 0$.

877. Упутство: применити однос квадратне и аритметичке средине.

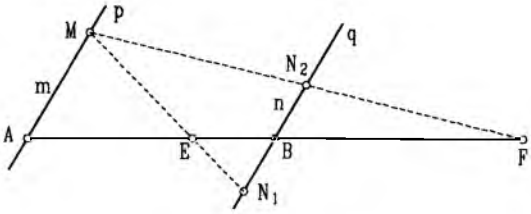
878. Нека је t време за које први аутомобил стиже у B. Укупан његов пут ће бити $AB = \frac{u+v}{2} \cdot t$. Ако је T време за које други аутомобил стиже на циљ, биће $T = \frac{\frac{AB}{2}}{u} + \frac{\frac{AB}{2}}{v} = \frac{AB}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v})$, одакле је $AB = T \cdot \frac{2uv}{u+v}$. Сада имамо $\frac{u+v}{2} \cdot t = T \cdot \frac{2uv}{u+v}$, тј. $\frac{T}{t} = \frac{(u+v)^2}{4uv} \geq 1$, јер је $(u+v)^2 \geq 4uv$ због $(u-v)^2 \geq 0$. Дакле $t \leq T$, где једнакост важи ако и само ако је $u = v$.

Глава VII – Сличност

879. Нека су P и Q тачке такве да је $AP = 2$, $BQ = 1$ и $AP||BQ$ (в. сл.). Тада је M пресек дужи AB и PQ.

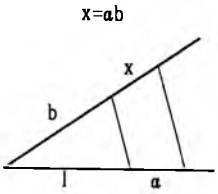


Сл. уз зад. 879

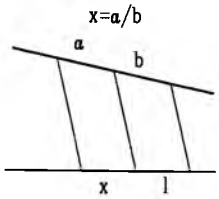


Сл. уз зад. 880

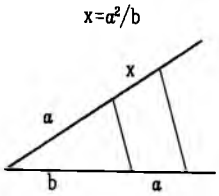
880. $p||q$, $AM = m$, $BN_1 = BN_2 = n$, $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{m}{n}$ (в.сл.).



Сл. уз зад. 882а



Сл. уз зад. 882б



Сл. уз зад. 882в

882. Једнакости написати у облику пропорције: а) $x : a = b : 1$; б) $x : 1 = a : b$; в) $x : a = a : b$ (в.сл.).

883. Нека је AB дата дуж, l произвољна права која садржи тачку A и A_1, A_2, A_3 тачке такве да важи $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, (в.сл). Нека праве које садрже тачке A_1 и A_2 и паралелне су са правом A_3B секу дуж AB у тачкама C и D. Тада тачке C и D деле дуж AB на три једнака дела.

884. На основу Талесове теореме, према датој слици, имамо размере $AC : CD = BC : CE = AB : DE$. Одавде ћемо изарачунати тражене дужине.

а) Из $AC : CD = BC : CE$ добијамо $CE = \dfrac{CD \cdot BC}{AC} = \dfrac{4 \cdot 24}{12} = 8$;

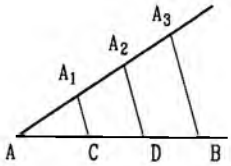
б) Из $AC : CD = BC : CE$, на основу особина пропорција, добијамо $(AC - CD) : (BC : CE) = AC : BC$, односно $AD : BE = AC : BC$. Одавде је $BE = \dfrac{AD \cdot BC}{AC} = \dfrac{3 \cdot 25}{15} = 5$.

в) Слично, као под б): $BE = \dfrac{AD \cdot CE}{CD} = 3$, па је $BC = CE + BE = 10$.

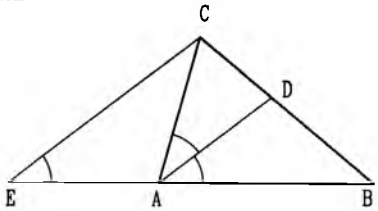
г) $AD = AC - CD = 12$, па је $CE = \dfrac{6 \cdot 8}{12} = 4$; д) $AC = CD + DA = 10$.

885. Из услова задатка следи $AC : CD : DB = 10 : 15 : 21$ и $AC + CD + DB = 92$. Ако означимо $AC = 10t$, $CD = 15t$ и $DB = 21t$, онда добијамо $t = 2$, па следи $AC = 20, CD = 30, DB = 42$.

886. Нека је D пресек симетрале угла A и странице BC и E пресек праве која садржи тачку C, а паралелна је правој AD, са правом AB, (в.сл.). Тада су углови код темена C и E троугла ACE једнаки половини угла A троугла ABC, тј. тај троугао је једнакокраки.



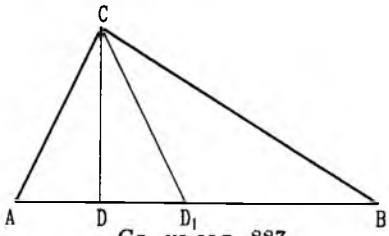
Сл. уз зад. 883



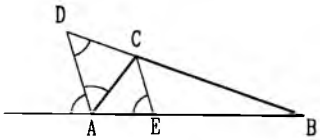
Сл. уз зад. 886

Зато је $AC = AE$. Даље, због $AD \| CE$, на основу Талесове теореме добијамо $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

887. Нека је $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, где је CD дата полуправа, а CD_1 симетрала угла C (в.сл.). Тада је због особине симетрале $\frac{AD_1}{DB} = \frac{AC}{CB}$, па би било $\frac{AD}{DB} = \frac{D_1B}{BD_1}$. Одатле следи да је неопходно да буде $D = D_1$.



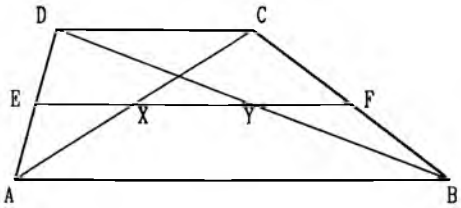
Сл. уз зад. 887



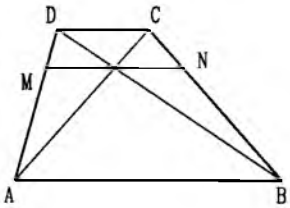
Сл. уз зад. 889

888. Из $\frac{AC}{AE} = \frac{AN}{AM}$ и $\frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN}$ и $\frac{BC}{BD} = \frac{BN}{BM}$ следи $\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD}$, па је $AE = BD$.

889. Нека је D пресек симетрале спољашњег угла код темена A троугла ABC са правом BC и E пресек паралеле са AD, која садржи тачку C, са правом AB, (в.сл). Тада су углови код темена C и E троугла ACE једнаки половини спољашњег угла код темена A троугла ABC, па следи $AE = AC$. Даље, због $AD \| CE$, следи $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

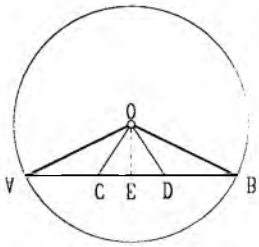


Сл. уз зад. 890



Сл. уз зад. 891

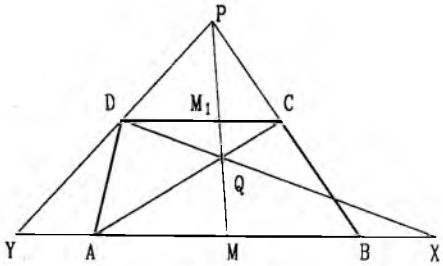
890. Нека су $AB = a$ и $CD = b$ основице трапеза $ABCD$, E и F средишта страница AD и BC, редом, и нека су X и Y пресеци дијагонала AC и BD са правом EF (в.сл.). На основу Талесове теореме добијамо $\frac{DE}{DA} = \frac{EY}{AB}$, $\frac{AE}{AD} = \frac{EX}{DC}$, одакле следи $EY = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ и $EX = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} = b$, па је $XY = EY - EX = (a - b)/2$.



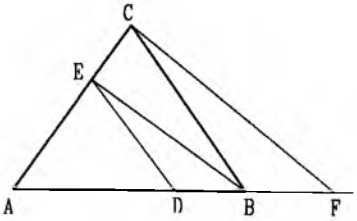
Сл. уз зад. 892

891. Нека је O пресек дијагонала датог трапеза. Тада на основу Талесове теореме добијамо $\frac{MO}{AB} = \frac{DM}{DA}$ и $\frac{MO}{DC} = \frac{AM}{AD}$, одакле сабирањем добијамо $\frac{MO}{AB} + \frac{MO}{CD} = \frac{DM + AM}{AD} = 1$, па одатле следи $MO = \frac{ab}{a+b}$. Аналогно је $ON = \frac{ab}{a+b}$, па добијамо $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

892. Означимо са E подножје нормале из O на AB (в.сл.). Тада је OE висина, а OC медијана у троуглу AOD. Како је бисектриса угла AOD између медијане и висине, то је $\sphericalangle AOC < \sphericalangle COD$, док је $\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOB$.

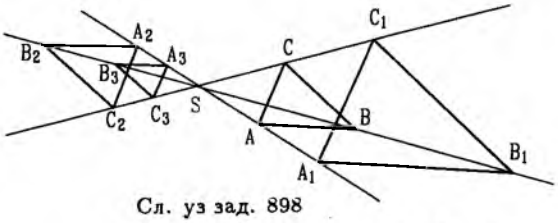


Сл. уз зад. 893



Сл. уз зад. 894

893. Нека је M_1 пресек правих PM и CD (в.сл.). Користећи чињенице $AB \| CD$ и $AM = MB$ добијамо $\frac{MY}{M_1D} = \frac{PY}{PD} = \frac{PB}{PC} = \frac{MB}{M_1C} = \frac{MX}{M_1D}$. Према томе, $MX = MY$, тј. тачка M је средиште дужи XY.



Сл. уз зад. 898

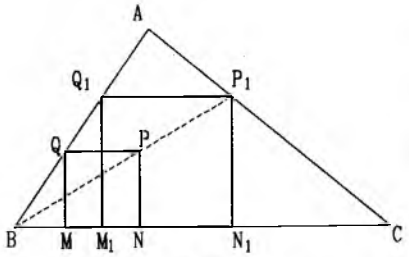
894. Из $BC \| ED$ добијамо $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, а из $FC \| BE$ добијамо $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AE}$, (в.сл.). Према томе, $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AB}$, одакле следи $AB^2 = AD \cdot AF$.

895. $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{CD}{BC} + \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$.

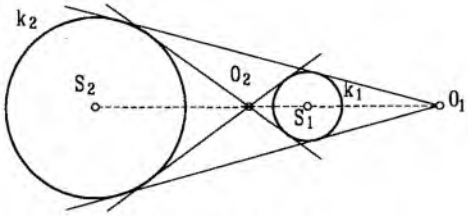
898. Троугао ABC се хомотетијама $\mathcal{H}_{O,2}$, $\mathcal{H}_{O,-1}$ и $\mathcal{H}_{O,-1/2}$ слика редом у троуглове $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, (в.сл).

899. Средишта страница квадрата су темена новог квадрата. Тачке симетричне тачки O у односу на средишта страница датог квадрата су хомотетичне тим средиштима при хомотетији $\mathcal{H}_{O,2}$.

900. Нека је $MNPQ$ произвољан квадрат такав да $M, N \in BC$ и $Q \in AB$, (в.сл.). Нека је P_1 пресек праве BP и праве AC. Хомотетија са центром B и коефицијентом $\frac{BP_1}{BP}$ пресликава квадрат $MNPQ$ у тражени квадрат $M_1N_1P_1Q_1$.



Сл. уз зад. 900



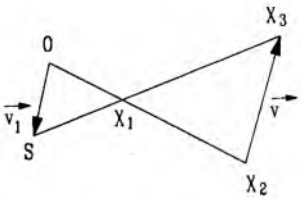
Сл. уз зад. 902

902. Ако су кругови дисјунктни, центри хомотетија су пресек заједничких спољашњих и пресек заједничких унутрашњих тантгенти, (в.сл.). Размотрите случај када се кругови секу.

903. Центар хомотетије је средиште дужи одређене центрима кругова, а коефицијент те хомотетије једнак је -1.

904. Упутство. Одредити центар хомотетије за кругове k_1 и k_2, а затим том хомотетијом пресликати троугао $A_1B_1C_1$ у троугао $A_2B_2C_2$.

905. Нека је X_1 произвољна тачка фигуре F_1, X_2 склика тачке X_1 при хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$, X_3 тачка одређење са $\overrightarrow{X_2X_3} = \vec{v}$ и S тачка одређена условом $\overrightarrow{OS} = \vec{v} = -\frac{OX_1}{X_1X_2}\vec{v}$. Тада су тачке C, X_1 и X_3 колинеарне, (в.сл.), и важи $\frac{SX_3}{SX_1} = \frac{OX_2}{OX_1} = k$. Према томе, фигура F_3 је хомотетична фигури F_1 при хомотетији $\mathcal{H}_{s,k}$.



Сл. уз зад. 905

906. Нека је O центар хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}$ и нека су X и Y произвољне тачке праве p, а X_1 и Y_1 слике тих тачака при хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$. Тада важи $\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{X_1O} + \overrightarrow{OY_1} = k\overrightarrow{XO} + k\overrightarrow{OY} = k(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY}) = k\overrightarrow{XY}$. Према томе, тачке X_1 и Y_1 припадају правој p_1, која је паралелна са правом p. Лако се доказује да је свака тачка праве p_1 слика неке тачке праве p. Нека је M_1 произвољна тачка праве p_1, и нека је тачка M одређена условом $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1}$. Тада је $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{X_1M_1} = k\overrightarrow{XM}$. Према томе, тачка M припада правој p, а њена слика при датој хомотетији је тачка M_1.

907. Нека је $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија и нека је K круг са центром S и полупречником R, X произвољна тачка тог круга и S_1 и X_1 слике тачака S и X при датој хомотетији. Као у претходном задатку добијамо $\overrightarrow{S_1X_1} = k\overrightarrow{SX}$. Према томе, тачка X_1 припада кругу K_1 са центром S_1 и полупречником kR. Лако се доказује да је свака тачка круга K_1 слика тачке круга K.

908. а) Из $12 : 9 = 8 : 6$, односно $6 \cdot 12 = 9 \cdot 8$, следи $AC : BC = AC' : AB'$. Одговарајући одсечци су пропорционални, па је $BB' \| CC'$;
б) $BB' \| CC'$; в) Из $21 : 6 \neq 17 : 9$, односно $21 \cdot 9 \neq 6 \cdot 17$, следи $AC : AB \neq AC' : AB'$. BB' није паралелно са CC'.

909. $a = 18cm$.

910. $h' = \dfrac{a'}{a} \cdot h = 16$.

911. Да, јер важи $\dfrac{27}{36} = \dfrac{36}{48} = \dfrac{48}{64} = \dfrac{3}{4}$.

912. 32, 48, 56.

913. $19\,cm$ и $23\,cm$.

914. $a_1 = 30$, $b_1 = 25$, $c_1 = 20$, $O_1 = 75$.

915. $O_1 = 24\ cm$.

916. Како је $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (као унакрсни) и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (као углови над луком AD), следи да су торуглови ABS и CDS слични.

917. $a = 10$, $b = 12$, $c = 18$, $d = 20$.

918. $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{75}{48} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$. Одавде имамо да је $\dfrac{O_1}{O_2} = \dfrac{5}{4}$, па како је $O_1 = 28$, биће $O_2 = \dfrac{112}{5}\ cm$.

919. $x = \dfrac{a}{d} \cdot h = 15m$.

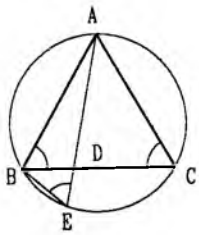
920. $x : 250 = y : 320 = z : 450 = 1 : 10000$, $x = 2,5$, итд.

921. $x = \dfrac{h}{a}(a - m) = 6cm$.

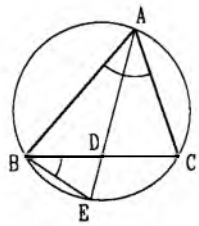
922. Сличност троуглова OAB и OCD следи из једнакости и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle ODC$.

923. Из сличности троуглова ABC и CDA имамо $\dfrac{AC}{16} = \dfrac{4}{AC}$, одакле је $AC = 8cm$.

924. Приметимо да је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACB$ (периферијски углови над истим луком), в.сл. Зато је и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AEB$. Осим тога $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAB$. Зато важи $\triangle ABE \sim \triangle ADB$, одакле следи $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$ и коначно $AB^2 = AD \cdot AE$.



Сл. уз зад. 924



Сл. уз зад. 928

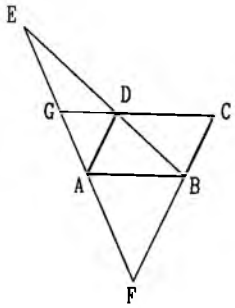
925. Ако дужина страница сличног правоугаоника означимо са x и y, биће $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{2} = k$, тј. $x = 5k$, $y = 2k$. Из једнакости мерних бројева обима и површине тог правоугаоника добијамо: $2(5k + 2k) = 5k \cdot 2k$; тј. $k = \dfrac{7}{5}$, одакле је $x = 7$ и $y = \dfrac{14}{5}$.

926. $x = 4cm$.

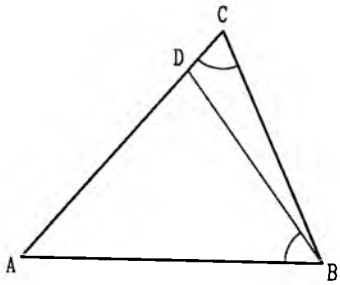
927. $O_1 = 69cm$.

928. Троуглови ABE и BDE имају заједнички угао код темена E. Осим тога $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EBC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle EAB$, (в.сл.). Зато је $\triangle ABE \sim \triangle BDE$, одакле следи $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DE}{BE}$, тј. $BE^2 = AE \cdot DE$.

929. Лако се доказује да важе следеће релације (в.сл.). $\triangle EGD \sim \triangle EAB$, $\triangle EAD \sim \triangle EFB$, $\triangle GDA \sim \triangle ABF$. Из ових сличности добијамо $\frac{EG}{AE} = \frac{GD}{AB} = \frac{AD}{FB} = \frac{AE}{EF}$, одакле следи $AE^2 = EF \cdot EG$.



Сл. уз зад. 929



Сл. уз зад. 933

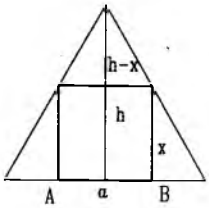
930. Из сличности троуглова BEC и DCF имамо $\frac{a}{4} = \frac{9}{a}$, одакле је $a = 6cm$.

931. $a = 31,5cm$. Упутство. Искористити сличност троуглова AED и FEC.

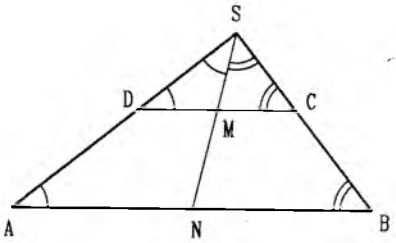
932. $\frac{3}{4}b$.

933. $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, па је $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{DB}$, одакле је $DB = \frac{ac}{b}$.

934. Имамо да је $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}$, где је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Одавде је $x = a(2\sqrt{3} - 3)$.



Сл. уз зад. 934



Сл. уз зад. 935

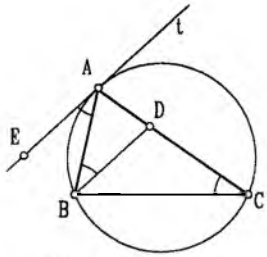
935. Продужимо бочне стране AD и BC трапеза $ABCD$ до њиховог пресека S (в.сл.). $\triangle DSM \sim \triangle ASN$, па је $\frac{AN}{DM} = \frac{SN}{SM}$, одакле је $\frac{AN - DM}{DM} = \frac{MN}{SM}$, па је због $MN = AN - DM$, $DM = SM$ и $\triangle SMD$ једнакокраки. Исто важи и за $\triangle SMC$. Како је $\sphericalangle SMC = 2\sphericalangle A$, $\sphericalangle SMD = 2\sphericalangle B$. то је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$.

936. $\triangle ABD \sim \triangle CC_1B$, где је C_1 подножје висине и C. Одавде је $\frac{BD}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{BC}$.

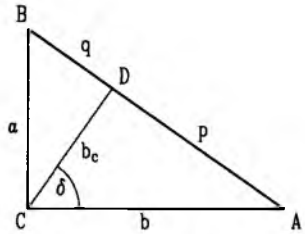
937. *Први начин*: $\triangle AOB_1 \sim \triangle BOA_1$. *Други начин*: Четвороугао ABA_1B_1 је тетивни, па је потенција тачке O: $AO \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$.

938. $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BCA$ (в.сл.), па је $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ и $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, тј. $AB^2 = AC \cdot AD$.

939. 1° Како је троугао код темена A заједнички за троуглове ABC и ACD, то је троугао ABC сличан троуглу DAC, одакле је $c : b = b : p$, односно $b = \sqrt{cp}$. На исти начин се доказује да је $a = \sqrt{cq}$.



Сл. уз зад. 938



Сл. уз зад. 939 и 940

2° Како је угао δ једнак углу код темена B као углови са нормалним крацима то је $\triangle ADC \sim \triangle BDC$, па имамо пропорцију $h_c : p = q : h_c$, односно $h_c = \sqrt{pq}$.

940. Из $b : p = c : b$, тј. $b^2 = pc$, и $a : q = c : a$, тј. $a^2 = qc$ следи да је $a^2 + b^2 = qc + pc = (p+q)c = c \cdot c = c^2$ (в.сл.).

941. Ако је a основица, h висина и b крак троугла, из $b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ и $b = \sqrt{ah}$ имамо $a - 2h = 0$, тј. $a = 2h$.

944. $CD = 3$. **945.** $16 : 25$.

946. а) Ставити $y^2 = bc$, конструисати y, па применити Питагорину теорму.

947. Ставити: а) $x^2 = 4 \cdot 2$; б) $x^2 = 5 \cdot 3$. **948.** $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, па је $\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{CB}$.

949. Из $t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ и $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ сабирањем налазимо $t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$, па је $c^2 = \frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2)$ и $c = 2\sqrt{13}$.

950. $24cm$.

951. Нека је x одстојање центра круга од дуже тетиве. По Питагориној теореми је: $r^2 = x^2 + 12^2$ и $r^2 = (x+3)^2 + 9^2$, одакле је $x^2 + 144 = x^2 + 6x + 90$, па је $x = 9cm$ и $r = 15cm$.

952. $40cm$.

953. Како је $\sphericalangle DBC$ прав, то је CD пречник круга. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 120°$, то је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 60°$. Четвороугао $ABCD$ је једнакокраки трапез, па је $AD = BC = 1cm$ и $DB = \sqrt{3}cm, CD = 2cm$.

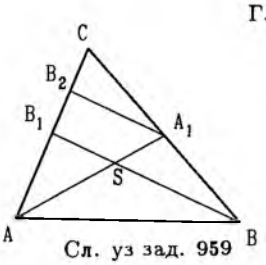
954. Нека су $BD = 40t$ и $BE = 41t$ висина, односно тежишна дуж које одговарају хипотенузи AC правоуглог троугла ABC ($AB < BC$). Тада је и $AE = CE = 41t$, а како је је из троугла $BDE : DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 9t$, то је $AD = AE - DE = 32t$. Из сличности троуглова ABD и BDC сада налазимо $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{32t}{40t} = \frac{4}{5}$.

955. Неопходно је да крак c буде $c = \frac{a+b}{2}$. Добија се $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

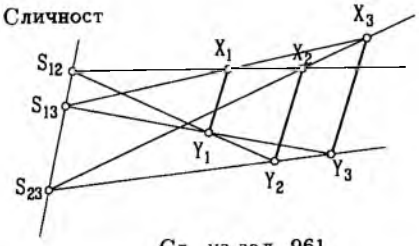
956. б) $BC = \sqrt{20}cm$, $r = \frac{4}{\sqrt{5}}cm$.

957. $AD = 25cm$, $DC = 7cm$. **958.** $15cm$ и $7cm$.

959. Нека права која садржи тачку A_1, а паралелна је са BB_1 сече страницу AC у тачки B_2, (в.сл). Тада је $\frac{B_1B_2}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C} = \beta$, па следи $\alpha = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB_1}{B_1B_2 + B_2C} = \frac{AB_1}{B_1B_2 + \frac{1}{\beta}B_1B_2} = \frac{\beta}{\beta+1}\frac{AB_1}{B_1B_2}$. Користећи ову једнакост и Талесову теорему добијамо: $\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta}$.



Сл. уз зад. 959



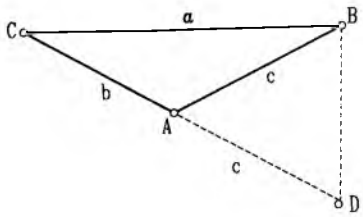
Сл. уз зад. 961

960. Применити претходни задатак.

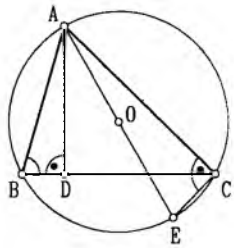
961. а) Нека су X_1 и Y_1 произвољне тачке фигуре F_1, X_2 и Y_2 њихове слике у F_2 при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{23},k_{23}}$. Тада важи $\overrightarrow{X_2Y_2} = k_{12}\overrightarrow{X_1Y_1}$ и $\overrightarrow{X_3Y_3} = k_{23}\overrightarrow{X_2Y_2}$, одакле следи $\overrightarrow{X_3Y_3} = k_{12}k_{23}\overrightarrow{X_1Y_1}$. Према томе, фигура F_3 хомотетична је фигури F_1 са коефицијентом хомотетије $k_{12}k_{23}$.

б) Тачка S_{23} се при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{23},k_{23}}$ пресликава у себе. Нека је S тачка која се при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{12},k_{12}}$ пресликава у S_{23}. Тада су колинеарне тачке S_{12}, S, S_{23} и S_{31}, S_{23}, S, па следи да тачке S_{12}, S_{23} и S_{31} припадају једној правој, (в.сл.).

962. На продужетку странице AC одредимо тачку D тако да $AD = c$ (в.сл.).Из $a^2 = b^2+bc$ следи $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, па је $\triangle BAC \sim \triangle BCD$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA + \sphericalangle DBA$.



Сл. уз зад. 962



Сл. уз зад. 964

963. Нека је AD симетрала угла код темена A. Из сличности троуглова $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$ следи $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$, а одавде $a = \sqrt{b^2+bc}$.

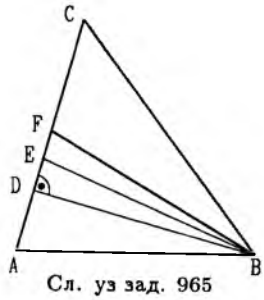
964. Нека је D подножје висине из A и AE пречник описаног круга (в.сл.). Тада је $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ и одавде $AB : AD = AE : EC$, тј. $cb = 2rh_a$.

965. Нека су BD, BE и BF, редом, висина, симетрала и медијана (в.сл.) у $\triangle ABC$. Претпоставимо да је $AB < BC$. Тада је $\sphericalangle A > \sphericalangle C$, $\sphericalangle CBD > \sphericalangle ABD$, одакле је $\sphericalangle CBD > \frac{1}{2}(\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD) = \frac{1}{2}\sphericalangle B$, тј. $\sphericalangle CBD > \sphericalangle CBE$. Дакле, тачка E је између D и C. Даље имамо $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} < 1$, $AE < EC$, одакле је $AE < \frac{1}{2}(AE+EC) = \frac{1}{2}AC$, па је $AE < AF$ и F је између E и C. Дакле, важи $D - E - F$.

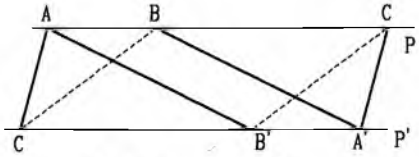
966. 1° Ако је $p \| p'$ из $AB' \| BA'$ следи $AB = B'A'$ и на исти начин $AC = C'A'$. Одакле одузимањем (или сабирањем) добијамо $CB = B'C'$ и одавде $BC' \| CB'$.

2° Ако се праве p и p' секу у тачки S (в.сл.), из $AB' \| BA'$ следи $\frac{SA}{SB} = \frac{SB'}{SA'}$ и слично $\frac{SC}{CA} = \frac{SA'}{SC'}$. Множењем ових релација добијамо $\frac{SC}{SB} = \frac{SB'}{SC'}$, одакле $BC' \| CB'$.

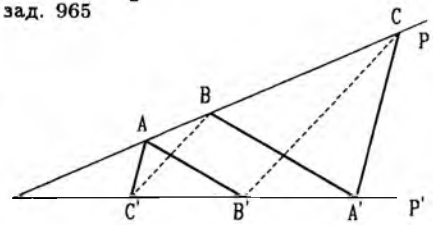
968. Конструишимо најпре једнакостранични троугао $A_1'B_1'C_1'$ такав да $C_1' \in AB$, $B_1' \in AC$ и $\sphericalangle(C_1'B_1'A) = 45°$. Тада је A_1 пресек правих AA_1' и BC, $AB_1 \| A_1'B_1'$ и $B_1C_1 \| B_1'C_1'$. (в.сл.)



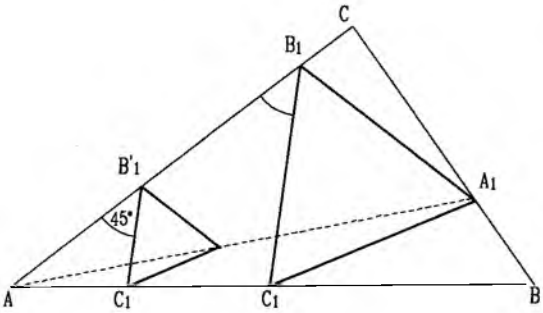
Сл. уз зад. 965



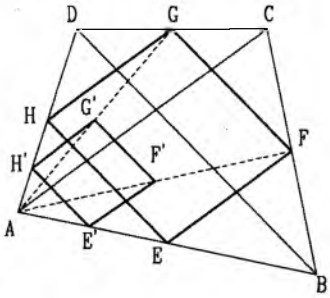
Сл. уз зад. 966(1°)



Сл. уз зад. 966(2°)



Сл. уз зад. 968



Сл. уз зад. 969

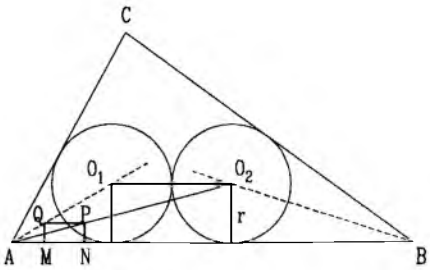
969. Нека је $E'F'G'H'$ ромб чије су странице паралелне дијагоналама датог четвороугла, а темена E' и H' су на страницама AB, односно AD (в.сл.). AF' сече BC у F, а AG' сече CD у G. $EFGH$ је тражени ромб.

970. Средиште O_1 мора се налазити на симетрали $\sphericalangle A$, а средиште O_2 на симетрали $\sphericalangle B$. (в.сл.) Ако са R означимо дужине полупречника круговас, биће $O_1O_2 = 2R$. Конструишемо правоугаоник $MNPQ$ тако да његова страница MN припада основици AB троугла ABC и да је $MN = 2MQ$, где Q припада симетрали $\sphericalangle A$. Права AP сече симетралу $\sphericalangle B$ у тачки O_2, а тачку O_1 налазимо на симетрали $\sphericalangle A$ тако да је $O_1O_2 \| AB$.

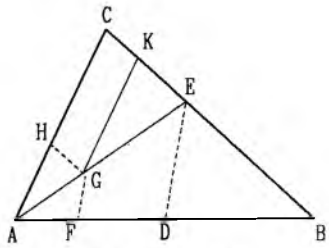
972. Нека је F-произвољна тачка на AB, а K тачка на CB тако да је $CK = AF$ и G тачка тако да је $FG = FA$ и $KG \| AC$. Четвороугао $AFGH$ где је $GH \| KC$ и $HEAC$ је хомотетичан траженом четвороуглу са центром хомотетије у тачки A, па је E пресек правих AG и BC. Задатак увек има јединствено решење.

973. $\dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

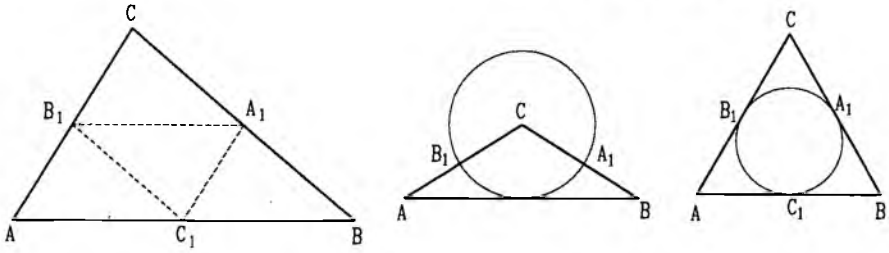
974. Круг који полови странице троугла требало би да пролази кроз тачке A_1, B_1 и C_1- средишта страница троугла ABC (в.сл.). Како су ови троуглови слични са коефицијентом сличности $\frac{1}{2}$ то су њихови полупречници описаних кругова у односу $1:2$.



Сл. уз зад. 970



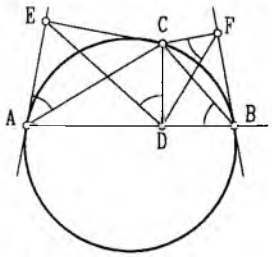
Сл. уз зад. 972



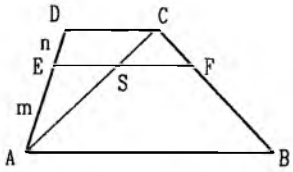
Сл. уз зад. 974

Иначе, услов задатке је могуће остварити на два начина (в.сл.).

975. Тачке D и E припадају кругу над пречником AC, а тачке D и F припадају кругу над пречником BC. Према томе, четвороуглови $ADCE$ и $BDFC$ су тетивни, (в.сл.). Имајући то у виду и користећи једнакост угла између тангенте и тетиве и периферијског угла над тетивом, добијамо $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle DFC$, тј. $\sphericalangle EDC = \sphericalangle DFC$. Аналогно доказујемо $\sphericalangle FDC = \sphericalangle DEC$. Из једнакости ових углова следи да је $\triangle EDC \sim \triangle DFC$, па даље добијамо $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CD}$, тј. $CD^2 = CE \cdot CF$.



Сл. уз зад. 975



Сл. уз зад. 977

976. Нека је O пресек дијагонала трапеза. Из сличности троуглова OAB и OCD добијамо $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$.

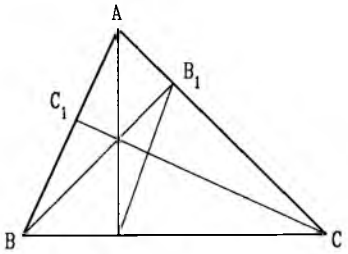
977. Нека је S пресек дужи AC и EF, (в.сл.). Тада је $\dfrac{ES}{DC} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{m}{m+n}$, $\dfrac{SF}{AB} = \dfrac{CS}{AC} = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{n}{m+n}$, одакле добијамо $EF = ES + SF = \dfrac{m}{m+n}CD + \dfrac{n}{m+n}AB = \dfrac{mCD + nAB}{m+n}$.

978. Нека је O_1 центар круга k_1, а O_2 центар круга k_2. Троугао SA_2B_2 хомотетичан је

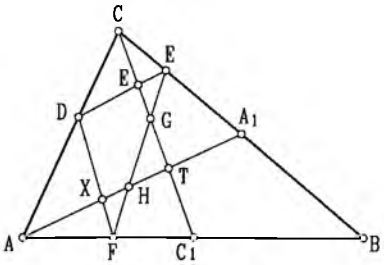
троуглу SA_1B_1 у односу на центар хомотетије S и са коефицијентом $-\frac{OS_2}{OS_1}$. Зато важи $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2B_2$.

979. Нека су h, u, v висине које редом одговарају страницама a, b, c једног троугла, а h_1, u_1, v_1 висине које одговарају страницама a_1, b_1, c_1 другог троугла, при чему важи $\frac{h}{h_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = k$. Како је $ah = bu = cv$ и $a_1h_1 = b_1u_1 = c_1v_1$ то добијамо $\frac{ah}{a_1h_1} = \frac{bu}{b_1u_1} = \frac{cv}{c_1v_1} = \frac{a}{a_1}k = \frac{b}{b_1}k = \frac{c}{c_1}k$. Из последње једнакости добијамо $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, а одатле следи да су дати троуглови слични.

980. Четвороугао ABA_1B_1 је тетиван, јер тачке A_1 и B_1 припадају кругу над пречником AB. Зато је и $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1$, (в.сл.). Даље добијамо $\sphericalangle ABC = 90° - \sphericalangle BAA_1 = 90° - \sphericalangle BB_1A_1 = \sphericalangle A_1B_1C$, а како троуглови ABC и A_1B_1C имају заједнички угао код темена C, то су ти троуглови слични.



Сл. уз зад. 980



Сл. уз зад. 983

981. Из претходног задатка добијамо и $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ и $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$. Према томе $\Delta A_1B_1C \sim \Delta A_1BC_1$, а одатле следи $\frac{A_1B_1}{A_1B} = \frac{A_1C}{A_1C_1}$, тј. $A_1B_1 \cdot A_1C_1 = A_1B \cdot A_1C$.

982. Искористити релацију $RM^2 = AM \cdot MB$ и сличност троуглова AMQ и BMP, из које се добија $AM \cdot MB = MP \cdot MQ$.

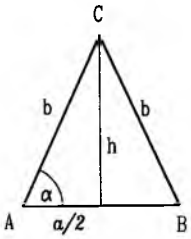
983. Нека је T тежиште троугла ABC, X пресек правих AA_1 и DF, Y пресек правих CC_1 и DE, а G и H пресеци дужи EF са тежишним дужима CC_1 и AA_1, редом, (в.сл.). Тада важи (зашто?) $\frac{EG}{EF} = \frac{EY}{ED} = \frac{A_1T}{AA_1} = \frac{1}{3}$. Према томе, $EG = \frac{1}{3}EF$ и аналогно $FH = \frac{1}{3}EF$.

984. а) Нека је $r_1 > r_2$ и M подножје нормале из тачке O_2 на дуж O_1T_1. Тада је четвороугао $O_2T_2T_1M$ правоугаоник, па је $T_1T_2 = MO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1M^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. б) Нека је T додирна тачка круга k и праве T_1T_2. На основу резултата под а) је $T_1T = 2\sqrt{r_1x}, T_2T = 2\sqrt{r_2x}$ и $T_1T_2 = \sqrt{r_1r_2}$. Из $2\sqrt{r_1x} + 2\sqrt{r_2x} = 2\sqrt{r_1r_2}$ следи да је $x = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$.

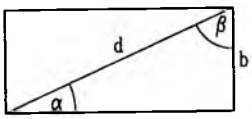
985. Нека су E и F подножја нормала из темена D и C на основицу AB. По Питагориној теореми је $AC^2 - AF^2 = CB^2 - FB^2$ и $DB^2 - EB^2 = AD^2 - AE^2$. Сабирањем левих и десних страна ових релација добијамо $AC^2 + BD^2 = AD^2 + CB^2 + AF^2 - FB^2 + EB^2 - AE^2 = AD^2 + CB^2 + AB(AF - FB + EB - AE) = AD^2 + CB^2 + AB \cdot 2EF = AD^2 + CB^2 + AB \cdot 2CD$.

Глава VIII – Тригонометрија правоуглог троугла

987. Како је $AD = \frac{a}{2} = 5$ и $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, односно $h = 12$, биће (в.сл.) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\sec\alpha = \frac{13}{5}$; $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{b}{h}$, тј. $\mathrm{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$.



Сл. уз зад. 987



Сл. уз зад. 988

988. а) $d = 10cm, \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ (в.сл.);
б) $\sin\beta = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\beta = \frac{4}{3}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{3}{4}$.

989. $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ $\sin\beta = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\beta = \frac{4}{3}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{3}{4}$.

990. Из $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, односно $\frac{1}{2} = \frac{16}{c}$ следи да је $c = 32cm$, а из $b^2 = 32^2 - 16^2, b = 16\sqrt{3}cm$.

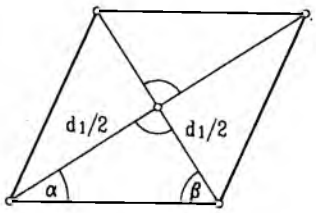
991. Друга катета је $\sqrt{x^2 - x}$. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{x}}{x}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, \mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{x-1}$.

992. Како је $d = a\sqrt{2}$ и $D = a\sqrt{3}$ (в.сл.) следи да је: $\sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{d}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

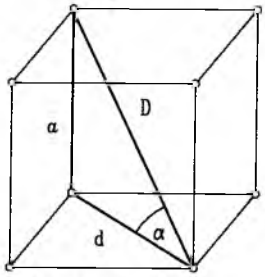
993. Како је $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ и $H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, то је (в.сл.):

а) $\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{1}{3}h} = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

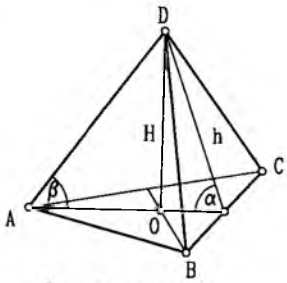
б) $\sin\beta = \frac{H}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \cos\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \mathrm{tg}\beta = \frac{H}{\frac{2}{3}h} = \sqrt{2}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Сл. уз зад. 989



Сл. уз зад. 992



Сл. уз зад. 993

994. а) $\cos 62°$; б) $\sin 41°$; в) $\mathrm{ctg} 28°$; г) $\mathrm{tg} 27°$;
д) $\cos(40° - \alpha) = \cos(90° - (50° + \alpha)) = \sin(50° + \alpha)$;
ђ) $\sin(30° - \alpha) = \sin(90° - (60° + \alpha)) = \cos(60° + \alpha)$;
е) $\mathrm{tg}(45° + \alpha) = \mathrm{tg}(90° - (45° - \alpha)) = \mathrm{ctg}(45° - \alpha), \alpha < 45°$;
ж) $\mathrm{ctg}(30° + \alpha) = \mathrm{ctg}(90° - (60° - \alpha)) = \mathrm{tg}(60° - \alpha), \alpha < 60°$;

з) $\mathrm{ctg}(10^\circ + \alpha), \alpha < 80^\circ$.

995. а) $\sin 47^\circ 30' = \sin(90^\circ - 42^\circ 30') = \cos 42^\circ 30'$;
б) $\cos(30^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ - (60^\circ + \alpha) = \sin 60^\circ + \alpha)$.

996. а) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}$;

в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{10} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{5}$; г) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{15} = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{30}\right) = \mathrm{tg}\frac{11\pi}{30}$.

997. а) Како је $\beta = 90^\circ - \alpha$, тада је $\frac{\cos\beta}{\alpha} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$;
б) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\beta} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = 1$;
в) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1$.

998. а) Како је $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то је: $\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{1 + \cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha} =$
$\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$; б) -2.

999. а) Како је $\sin 42^\circ = \sin(90^\circ - 48^\circ) = \cos 48^\circ$, то је:

$$\frac{2\cos 48^\circ + \sin 42^\circ}{3\cos 48^\circ} = \frac{2\cos 48^\circ + \cos 48^\circ}{3\cos 48^\circ} = 1;$$

б) 2.

1000. а) Како је $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$, то је: $\frac{\sin\frac{3\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{8}}{5\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}} = \frac{\cos\frac{\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{8}}{5\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}} =$
$\frac{4\cos\frac{\pi}{8}}{6\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{2}{3}$; б) 1.

1001. а) $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$.

1002. а) 3; б) $2\sqrt{3}$. **1003.** а) 0; б) 0. **1004.** а) 1; б) 0.

1005. а) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1006.** а) 3; б) $\frac{2}{3}$; в) 0; г) 8.

1007. а) $\cos\alpha = \frac{9}{41}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{40}{9}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{9}{40}$; б) $\sin\alpha = \frac{221}{229}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{221}{60}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{60}{221}$;
в) $\sin\alpha = \frac{7}{25}, \cos\alpha = \frac{24}{25}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$; г) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}, \cos\alpha = \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{m}$.

1008. Како је $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, из $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$ добија се $\cos^2\alpha = \frac{16}{9}\sin^2\alpha$ (1). Из (1) у $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ биће $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Но, како је α оштар угао то је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

1009. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{k\sqrt{n^2 - k^2}}{n}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{n\sqrt{n^2 - k^2}}{k(n^2 - k^2)}$.

1010. 7.

1011. Из $\sin^2 15° = 1 - \cos^2 15°$ добијамо да је $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1012. $\cos 22°30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **1013.** $\frac{9}{5\sqrt{5}}$.

1014. а) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - cos^3 x} = \frac{tg^3 x + 1}{tg^3 x - 1} = \frac{2^3+1}{2^3-1} = \frac{9}{7}$; б) $\frac{21}{40}$.

1015. $A = \frac{\sin^2 x + \sin x\cos x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{3\sin x\cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \frac{3\sin^2 x + \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{3\sin x\cos x - 4\sin^2 x - 3\cos^2 x} =$
$\frac{3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x + 2}{3\mathrm{tg}x - 4\mathrm{tg}^2 x - 3} = \frac{3\cdot 3^2 + 3 + 2}{3\cdot 3 - 4\cdot 3^2 - 3} = -\frac{16}{15}$.

1016. а) $\frac{6}{19}$; б) $\frac{3}{4}$.

1017. а) Из $\frac{\sin z}{\cos z} = 2$ и $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ добија се: $\sin^2 z = \frac{4}{5}$ и $\cos^2 z = \frac{1}{5}$. Следи да је $\sin^4 z + \cos^4 z = \frac{17}{25}$. б) $\frac{13}{25}$; в) $\frac{25}{21}$.

1018. Када се бројилац и именилац поделе са $\cos\alpha \neq 0$ добија се $\frac{3\mathrm{tg}\alpha - 1}{\mathrm{tg}\alpha + 2} = 1$, одакле је $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

1019. Ако се једнакост $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = p$ квадрира, добија се $\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{ctg}\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha = p^2$, одакле је $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = p^2 - 2$.

1020. Ако се $\sin x + \cos x = s$ квадрира, онда је $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = s^2$ (1). После замене $\sin x\cos x = p$ у (1) добија се $1 + 2p = s^2$, односно $p = \frac{1}{2}(s^2 - 1)$.

1021. $A = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x - (1-\cos^2 x)^2(2 - 2\cos^2 x - 3) = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-1 - 2\cos^2 x) = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x + 1 + 2\cos^2 x - 2\cos^2 x - 4\cos^4 x + cos^4 x + 2\cos^6 x = 1$.

1022. Из дате једнакости $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ следи $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta$, односно $\sin^2\alpha = \cos^2\beta$. Како је $sin\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$, то је $\sin\alpha = \cos\beta$. Даље је $\sin\alpha = \sin(90° - \beta)$. Дакле $\alpha + \beta = 90°$, тј. троугао је правоугли.

1023. $\frac{2 - \mathrm{cosec}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - 1} - \mathrm{cosec}^2\alpha + 1 = \frac{1 - (\mathrm{cosec}^2\alpha - 1)}{\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} - 1} - (\mathrm{cosec}^2\alpha - 1) = \frac{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}{\frac{1 - \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}} - \mathrm{ctg}^2\alpha =$
$\frac{\mathrm{ctg}\alpha(1 - \mathrm{ctg}\alpha)(1 + \mathrm{ctg}\alpha)}{1 - \mathrm{ctg}\alpha} - \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{ctg}\alpha$.

1024. Користећи основне идентитете, дати израз може се написати као:
$(1 - \sin^2\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \cos^2\alpha\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha$.

1025. $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1026. $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$ за $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1027. Вредност израза је једнака 3, осим за $x = \frac{\pi}{4}$.

1028. *Први начин*:
$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
Други начин:

$$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Трећи начин:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Leftrightarrow sin^2\alpha=sin^2\alpha.$$

1029. $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)$
$\Leftrightarrow\left(\frac{1+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right).$

1030. $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha.$

1031. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=3\sin^4\alpha+3\cos^4\alpha-2\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1.$

1032. $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$
$\sin^3\alpha\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos^3\alpha\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$

1033. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$
$2\mathrm{tg}^2\alpha.$

1034. Ако се други сабирак идентитета на левој страни трансформише добија се: $\frac{\cos^2x(\sin x+\cos x)}{\sin^2x-\cos^2x}=\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}$. Даље је: $\frac{\sin^2x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x-\cos x}=$
$\sin x+\cos x.$

1035. *Први начин:*

$$\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha-1-\sin\alpha)+1}{\cos^3\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Други начин:

Ако се идентитет напише у облику $\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$ и изврши трансформација леве стране, добија се: $\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$
$\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

После трансформације десне стране, добија се:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}.$$

Како се после трансформација леве и десне стране добија иста вредност, идентитет је доказан.

1036. Трансформишемо леву страну:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Трансформишемо десну страну:

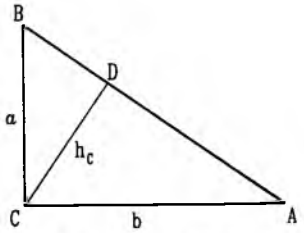
$(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha) = (1+\cos\alpha)\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = (1+\cos\alpha)\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

Дата идентичност је тачна, јер су лева и десна страна једнаке.

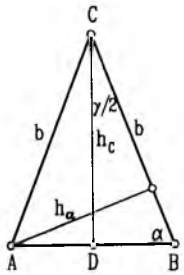
1047. а) $a = c\sin\alpha = 327{\cdot}0,485 \approx 158,6cm$ и $b = c\sin 61° = 327{\cdot}0,875 \approx 286$. $\beta = 90° - \alpha = 61°$. б) $a = 39,33cm$, $b = 59,72cm$, $\beta = 56°38'$.

1048. Из правоуглог троугла ADC (в.сл.) добијамо: $\dfrac{h_c}{b} = \sin\alpha$, односно $b = \dfrac{h_c}{\sin\alpha} = \dfrac{5,4}{\sin 27°36'} = \dfrac{5,4}{0,463} \approx 11,66cm$. Даље је $a = 6,1cm, c = 13,16cm$ и $\beta = 62°24'$.

1049. $c = 254,7cm$.



Сл. уз зад. 1048



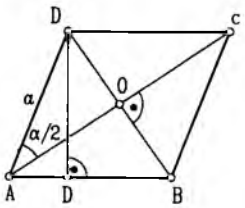
Сл. уз зад. 1050

1050. Из $\triangle ABD$ (в.сл.): $\dfrac{\gamma}{2} = 90° - \alpha, a = \dfrac{c}{2\cos\alpha}, h_c = \dfrac{c}{2}\mathrm{tg}\alpha$. Површина $\triangle ABC$ је $P = \dfrac{c\cdot h_c}{2} = \dfrac{c^2\mathrm{tg}\alpha}{4}$. Када се замене дате вредности, добија се: $\gamma = 110°, a = 56,16cm$, $h_c = 32,2cm$ и $P = 1481,2cm^2$.

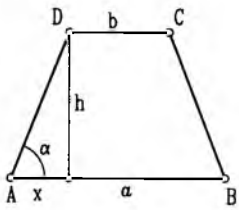
1051. $c = 23,97cm$, $h_c = 12,34cm$, $h_a = 17,19cm$, $\gamma = 89cm$. $P = 147,86cm^2$. (в.сл.).

1052. $a = 3000,27cm$, $h_a = 1869,1cm$, $h_c = 2832,29cm$, $\alpha = 70°44'$ и $P = 2803967,1cm^2$ (в.сл.).

1053. Нека је $AC = d_1, BD = d_2, ED = h$ (в.сл.). Из правоуглог троугла AOD следи: $d_1 = 2a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $d_2 = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (1). Из правоуглог троугла AED је $h = a\sin\alpha$ (2). Заменом датих вредности за a и α у (1) и (2) добија се: $d_1 = 24\cdot\cos 19° \approx 24\cdot 0,9456 \approx 22,69$, $d_2 = 24\cdot\sin 19° \approx 24\cdot 0,32557 \approx 7,81$ и $h = 12\sin 38° \approx 12\cdot 0,61566 \approx 7,39$.



Сл. уз зад. 1053

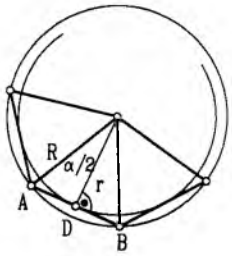


Сл. уз зад. 1055

1054. Из $P = ah$ следи $h = \dfrac{P}{a}$. Из $\sin\alpha = \dfrac{h}{a}$ добија се $a = \sqrt{\dfrac{P}{\sin\alpha}}$.

1055. Како је $x = \dfrac{a-b}{2}$ (в.сл.), из $c = \dfrac{x}{\cos\alpha}$ ($\triangle AED$) добија се да је $c = 4cm$. Даље је $h = c\sin\alpha = 2\sqrt{3}\,cm$ и $P = \dfrac{a+b}{2}\cdot h = 16\sqrt{3}cm^2$.

1056. Сваки правилан n-угао може се поделити на n подударних једнакокраких троуглова са углом $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ на врху (в.сл.). Из правоуглог троугла BOD где је $\frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n}$, хипотенуза $R = OB$ и катете $r = OD$, $\frac{a}{2} = BD$ следи: $\frac{a}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$, или $a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. Површина троугла је $P_\triangle = \frac{a}{2}\cdot h = R^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$, а површина целог многоугла од n страница биће $P = n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot 2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$.



Сл. уз зад. 1056, 1057, 1058

1057. За елементе правоуглог троугла ADO (в.сл.) важи: $\frac{a}{2} = r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$, или $a = 2r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Површина троугла ABO је $P_\triangle = \frac{a}{2}\cdot r = r^2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$, а површина целог многоугла од n страница $P = n\cdot r^2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

1058. Из $\triangle BOD$ (в.сл.) следи да је $r = \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Површина троугла $P_\triangle = \frac{a}{2}\cdot r = \frac{a^2}{4}\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Површина целог многоугла је $P = n\frac{a^2}{4}\mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Из $\triangle BOD$ (в.сл.) је $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$, односно $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

1059. $\alpha = 45^\circ$, $R = 1,96\,cm$, $r = 1,81\,cm$, $P = 10,86\,cm^2$.

1060. $\alpha = 24^\circ$, $a = 0,81\,cm$, $r = 1,91\,cm$, $P = 12,2\,cm^2$.

ТЕСТОВИ

У овом делу Збирке дато је девет тестова који садржином одговарају одређеним поглављима из градива првог разреда. Предвиђено је да се за сваки тачно урађени задатак добија 10 поена, тако да један тест максимално доноси 100 поена. Погрешно урађен задатак доноси -1 (минус један) поен. Време за израду једног теста је 90 минута. Одличним се могу сматратим резултати 80 – 100 поена, врло добрим 65 – 80, добрим 50 – 65 и довољним 35 – 50 поена.
Када се професори одлуче за састављање другачије варијанте тестова, у којима би задаци били различите тежине, могуће је број бодова по задатку одредити по некој другој шеми – на пример као што је то рађено за неке тестове у Математичкој гимназији: 1. и 2. задатак по 6 поена, 3–5. задатак по 8 поена, 6–8. задатак по 12 поена и 9. и 10. задатак по 14 поена (збир је 100 поена), с тим што је овде за погрешно решење одузимано по 25% поена по задатку.

Тест 1. ЛОГИКА, СКУПОВИ, КОМБИНАТОРИКА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Која од следећих таблица одговара формули $F = p \Rightarrow \neg q$?

A)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

B)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

C)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

D)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

E)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

N).

2. У скупу природних бројева посматрају се реченице:

(I) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 10)$,

(II) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$,

(III) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$.

Тачне су:

A) све; **B)** само I; **C)** само III; **D)** само II и III; **E)** само I и III; **N).**

3. Исказ $p \wedge \neg q \wedge r$ има вредност $\top$ у случају:

A) $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \top$; **B)** $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \bot$;
C) $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$, $\tau(r) = \top$; **D)** $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$, $\tau(r) = \bot$;
E) $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \bot$; **N).**

4. Која од својстава рефлексивност, симетрија, антисиметрија, транзитивност има релација $\bot$ (нормалност правих у равни)?

A) ниједно; **B)** само симетрију;
C) само симетрију и транзитивност;
D) само рефлексивност и симетрију;
E) само рефлексивност и антисиметрију; **N).**

5. Ако је $f(x) = \dfrac{x}{3} - 1$, тада је $f(3x + 1)$ једнако:

A) $x + \dfrac{1}{3}$; **B)** $x - \dfrac{2}{3}$; **C)** $x - 1$; **D)** $3x + 1$; **E)** x; **N).**

6. Дати су скупови $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge -4 < x \leq 5\}$ и $B = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge 2 < x \leq 7\}$. Колико елемената има скуп $A \cap B$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** више од 3; **N).**

7. Дате су реченице:

(I) Да би број био већи од 5, довољно је да буде већи од 10.

(II) Да би број био мањи од 3, неопходно је да буде мањи од 1.

(III) Да би број био већи од 100, неопходно је и довољно да буде већи од 90.

Тачне су:

A) све; **B)** ниједна; **C)** само I; **D)** само II; **E)** само I и III; **N).**

8. Ако је $f(x) = x - 1$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ тада је $(f \circ g)(x)$ једнако:

A) $\frac{1-x}{x}$; **B)** $\frac{1}{x-1}$; **C)** x; **D)** $\frac{1}{x}$; **E)** $\frac{x-1}{x}$; **N)**.

9. Колико има различитих троцифрених бројева од цифара 0, 2, 4, 6, 8?

A) 125; **B)** 90; **C)** 120; **D)** 14; **E)** 100; **N)**.

10. Вредност израза $\frac{100!}{99!} - \frac{99!}{98!}$ једнака је:

A) 100; **B)** 99; **C)** 9900; **D)** 98; **E)** 1; **N)**.

Тест 2. ЛОГИКА, СКУПОВИ, КОМБИНАТОРИКА

1. Исказ $p \vee \neg q \vee \neg r$ има вредност $\perp$ у случају (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \top$; **B)** $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \top$;
C) $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \perp$; **D)** $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(r) = \top$;
E) $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(r) = \perp$; **N)**.

2. Која од следећих реченица има значење: "Сви природни бројеви су позитивни" (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $(\forall x)(x \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\forall x)(x > 0)$; **B)** $(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x > 0)$;
C) $(\forall x)(x \in \mathbf{N}) \wedge (\exists x)(x > 0)$; **D)** $\neg(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x > 0)$;
E) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x > 0)$.

3. Дати су скупови $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ и $B = \{2,4,5,6,8\}$. Колико елемената има скуп S такав да је $A \cap S = \{3,4\}$ и $B \cup S = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 5; **E)** 6.

4. У скупу $\{0,1,2,3,4\}$ дефинисана је релација $x \rho y \Leftrightarrow x + y = 4$. Која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ на овом скупу (заокружити слово испред тачног одговора):

A) ниједно; **B)** само симетричност;
C) само антисиметричност; **D)** рефлексивност и симетричност;
E) сва четири својства.

5. Ако је $f(2x-1) = (x-1)^2$, тада је $f(3)$ једнако (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 1; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 9; **E)** 0.

6. Ако је $f(x) = 5x - 1$, тада је инверзна функција функције f (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5x-1}$; **B)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - 1$; **C)** $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}$;

D) $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{5}$; **E)** ни један од одговора A), B), C) , D).

7. Нека су p и q искази. Које од датих формула су таутологије (заокружити слово испред сваке такве формуле):

1) $\neg p \wedge p$; **2)** $\neg p \vee p$; **3)** $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$;
4) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; **5)** $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

8. Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (иза тачне реченице написати знак $\top$, а иза нетачне знак $\perp$):

(1) Да би број био дељив са 2 довољно је да буде дељив са 4 .....

(2) Да би број био дељив са 4 довољно је да буде дељив са 2 .....

(3) Да би број био дељив са 2 неопходно је да буде дељив са 4 .....

(4) Да би број био дељив са 4 неопходно је да буде дељив са 2 .....

(5) Да би број био дељив са 2 неопходно је и довољно да буде дељив са 4 .....

9. Светла на семафору могу бити: црвено, жуто или зелено. Ако у једној улици има 7 семафора, на колико разних начина у сваком тренутку могу бити распоређена светла на семафорима (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 21; **B)** 10; **C)** 3^7; **D)** 7^3; **E)** $3 \cdot 7^3$.

10. Колико има четвороцифрених природних бројева код којих је производ цифара једнак 6 (заокружити слово испред тачног одговора)?

A) 16; **B)** 12; **C)** 4; **D)** 10; **E)** 18.

Тест 3. РАЗМЕРЕ, ПРОПОРЦИЈЕ, ПРОЦЕНТИ

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Износ од 180 динара треба поделити на три дела у односу 4 : 5 : 9. Најмањи од добијених делова је (у динарима):

A) 30; **B)** 36; **C)** 40; **D)** 45; **E)** 50; **N)**.

2. Седам цеви напуне базен за 35 часова. За које ће време пет цеви напунити базен (претпоставља се да цеви једнаком брзином пуне базен)?

A) 25; **B)** 49; **C)** 54; **D)** 35; **E)** 50; **N)**.

3. На плану израђеном у размери 1 : 1000 њива је представљена правоугаоником дужине $13,25cm$ и ширине $4cm$. Површина њиве (у хектарима) је:

A) 0,53; **B)** 5,3; **C)** 53; **D)** 0,053; **E)** 530; **N)**.

4. Ако 5 ученика за 5 минута поједе 5 сладоледа, колико ће сладоледа појести 25 ученика за 25 минута?

A) 25; **B)** 75; **C)** 5; **D)** 100; **E)** 125; **N)**.

5. У једној продавници 8 јабука се продаје за 10 динара, а у другој 10 јабука за 15 динара. За колико процената је цена у другој продавници виша него у првој?

A) $2\frac{1}{2}\%$; **B)** 5%; **C)** 12%; **D)** 20%; **E)** 25%; **N)**.

6. Ако продавачица сладоледа сваког сата прода 20 сладоледа и на сваком сладоледу заради 40 пара, колико часова треба да ради да би зарадила 80 динара?

A) 160; **B)** 64; **C)** 100; **D)** 10; **E)** 16; **N)**.

7. Колико литара воде треба додати у 12 литара 25%-ног раствора амонијака да би се проценат амонијака у раствору смањио на 20%?

A) $3l$; **B)** $2,5l$; **C)** $2,25l$; **D)** $2l$; **E)** $1,5l$; **N)**.

8. На колику суму нарасте улог од 100 динара са 20% годишње камате после две године?

A) 112 дин.; **B)** 160 дин.; **C)** 172 дин.; **D)** 144 дин.; **E)** 120 дин.; **N)**.

9. На складишту има кафе по цени од 120 динара по килограму и од 92 динара по килограму. Треба направити мешавину која ће се продавати по 112 динара по килограму. Ове две врсте треба помешати у односу:

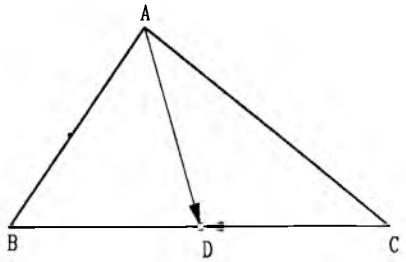
A) 5 : 4; **B)** 3 : 2; **C)** 5 : 2; **D)** 4 : 3; **E)** 5 : 3; **N)**.

10. Један посао 12 радника би завршило за 8 дана. За колико дана ће бити завршен остатак после ако након 2 дана рада 3 радника напусте посао?

A) 7 дана; **B)** 8 дана; **C)** 9 дана; **D)** 9,5 дана; **E)** 10,5 дана; **N)**.

Тест 4. ВЕКТОРИ, ТРОУГАО, ЧЕТВОРОУГАО, МНОГОУГАО, КРУГ

1. Тачка D је средиште дужи BC (на слици). Којем од наведених вектора је једнак збир $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ (заокружити слово испред тачног одговора)?



Сл. уз зад. 1, Тест 4.

A) $\overrightarrow{BA}$; **B)** $\overrightarrow{AC}$; **C)** $\overrightarrow{AB}$; **D)** $\overrightarrow{CA}$; **E)** $\overrightarrow{DB}$;

2. Центар описаног круга троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) пресек висина троугла; **B)** пресек тежишних дужи;

C) пресек симетрала углова; **D)** пресек симетрала страница;

E) средиште најдуже странице троугла.

3. Један унутрашњи угао троугла је α. Туп угао троугла под којим се секу симетрале друга два унутрашња угла тог троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $90° - \frac{\alpha}{2}$; **B)** $90° + \frac{\alpha}{2}$; **C)** 2α; **D)** $90° + \alpha$; **E)** $180° - \alpha$.

4. Унутрашњи угао једног правилног многоугла је 150°. Колико дијагонала има тај многоугао? (заокружити слово испред тачног одговора)?

A) 54; **B)** 44; **C)** 60; **D)** 65; **E)** 77.

5. Нека су M, P, Q, R редом средишта страница AB, BC, CD и DA трапеза $ABCD$ $(AB \| CD)$. Дати су искази:

(I) $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$;

(II) $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$;

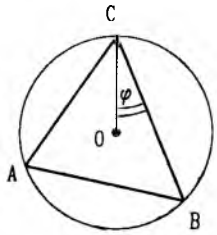
(III) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CP}$;

(IV) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}$.

Тачни су (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само I и III; **B)** само II и IV; **C)** само I и IV;
D) само II и III; **E)** само IV.

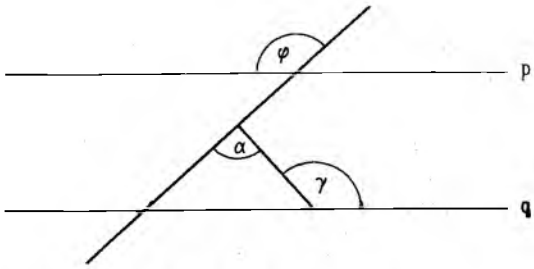
6. Тачка O је центар круга на слици. Ако је $\sphericalangle BCO = \varphi$, тада је $\sphericalangle BAC$ једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 6, Тест 4.

A) $90° + \varphi$; **B)** $90° + 2\varphi$; **C)** $90° - 2\varphi$; **D)** $180° - 2\varphi$; **E)** $90° - \varphi$.

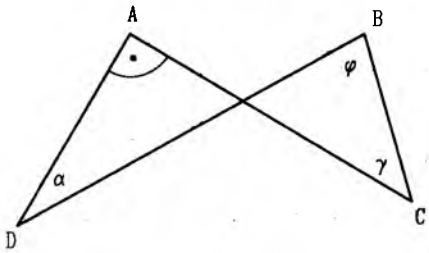
7. На слици су праве p и q паралелне. Тада је угао α једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 7, Тест 4.

A) $180° - \gamma$; **B)** $\beta - \gamma$; **C)** $180° - \beta$; **D)** $90° + \beta - \gamma$; **E)** $\beta + \gamma - 180°$.

8. На слици је угао код темена A прав. Тада је збир углова β и γ једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 8, Тест 4.

A) 2α; **B)** $90° + \alpha$; **C)** $180° - \alpha$; **D)** $180° - 2\alpha$; **E)** $90° - \alpha$.

9. Око круга је описан једнакокраки трапез чији је оштар угао 30°. Ако је дужина средње линије трапеза $4cm$, дужина полупречника уписаног круга трапеза је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $1cm$; **B)** $2cm$; **C)** $1,5cm$; **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}cm$; **E)** $\sqrt{3}cm$.

10. Угао при врху једнакокраког троугла ABC ($AB = AC$) је 40°. Дуж AB је пречник круга k са центром O. Круг k сече страницу BC у тачки D, а страницу AC у тачки E. Величина угла DOE је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 35°; **B)** 20°; **C)** 30°; **D)** 40°; **E)** 45°.

Тест 5. ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

1. Праве p и q секу се у тачки O. Дати су искази:

(I) Постоји осна симетрија која праву p пресликава у праву q.

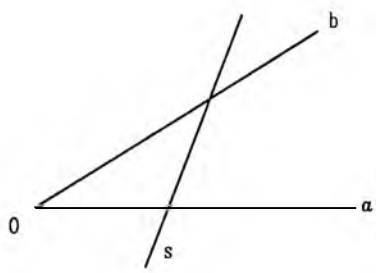
(II) Постоји транслација која праву q пресликава у праву p.

(III) Постоји ротација која праву p пресликава у праву q.

Тачни су (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само III; **B)** сви искази; **C)** само I и III; **D)** ниједан; **E)** само II и III.

2. Дати уґао aOb пресликати осном симетријом у односу на дату праву s:



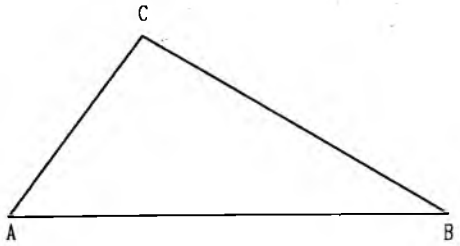
Сл. уз зад. 2, Тест 5.

3. Извршити ротацију датог троугла ABC око тачке A за 60°.

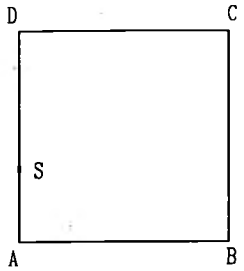
4. Дати квадрат $ABCD$ пресликати централном симетријом у односу на дату тачку S.

5. Који од следећих четвороуглова има тачно једну осу симетрије (заокружити слово испред тачног одговора):

A) трапез; **B)** квадрат; **C)** правоугаоник; **D)** ромб; **E)** делтоид.



Сл. уз зад. 3, Тест 5.

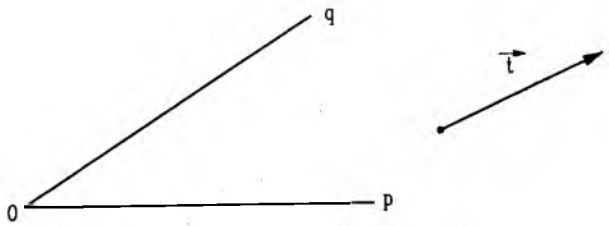


Сл. уз зад. 4, Тест 5.

6. Дати су четвороуглови: квадрат, ромб, правоугаоник, једнакокраки трапез и делтоид. Колико од ових пет четвороуглова су централно симетрични (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 1 ; **B)** 2 ; **C)** 3 ; **D)** 4 ; **E)** 5 ;

7. Транслацијом за дати вектор $\vec{t}$ пресликати дати угао pOq.



Сл. уз зад. 7, Тест 5.

8. Нека су a и b две различите праве. Посматрамо исказе:

(I) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако су праве паралелне.

(II) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако се праве секу.

(III) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако су праве мимоилазне.

Тачни су искази (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само I; **B)** само I и II; **C)** само I и III; **D)** сви; **E)** ниједан.

9. Инверзна изометријска трансформација транслацији $T_{\vec{v}}$ је .....

10. Дате су тачке X, P, Q. Уцртати тачке X_1, X_2 и X_3 такве да је X_1 симетрична тачки X у односу на PQ, X_2 се добија транслацијом тачке X за $\overrightarrow{PQ}$ и X_3 се добија ротацијом тачке X око тачке P за угао XPQ.

Сл. уз зад. 10, Тест 5.

Тест 6. ПОЛИНОМИ. ТРАНСФОРМАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ИЗРАЗА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Ако је $ab \neq 0$ и $a^2 \neq b^2$, израз $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$ једнак је изразу:

A) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$; **B)** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$; **C)** $\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab(b-a)}$; **D)** $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$; **E)** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(b-a)}$; **N)**.

2. Нека је $a=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}$ и $c=b^2$ $(b \neq 0)$. Тада је вредност израза a једнака:

A) $b+b^2$; **B)** $\frac{b+b}{b^2}$; **C)** $\frac{1}{b}+b$; **D)** $b^2+\frac{1}{b}$; **E)** $1+\frac{b}{2b}$; **N).**

3. Ако је $ab \neq 0$ и $a \neq b$, израз

$$\left[\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\right] : \frac{a^3-b^3}{ab}$$

једнак је изразу:

A) $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$; **B)** $\frac{1}{ab}$; **C)** $a-b$; **D)** $\frac{a-b}{ab}$; **E)** $\frac{a+b}{ab}$; **N).**

4. Остатак дељења полинома $3x^5-2x^4+12x^3-12x+55$ биномом $x+1$ је:

A) 56; **B)** 50; **C)** 55; **D)** 54; **E)** 60; **N).**

5. Вредност израза $\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) : \frac{a^3+b^3}{ab}$ за $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{6}{5}$ је:

A) $-\frac{5}{2}$; **B)** $\frac{25}{6}$; **C)** $\frac{3}{5}$; **D)** $-\frac{9}{10}$; **E)** $\frac{117}{100}$; **N).**

6. За све $x \in \mathbf{R}$ разломак $\frac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}$ једнак је:

A) $1+x-x^2$; **B)** 1; **C)** $\frac{1+x^2}{1+x}$; **D)** $1+x+x^2$; **E)** $1-x+x^2$; **N).**

7. Најмањи заједнички садржалац (НЗС) полинома $(x+y)^2$, $x-y$ и x^2-y^2 је:

A) $(x+y)^2(x-y)(x^2-y^2)$; **B)** $(x+y)^2(x-y)^2$; **C)** $(x+y)(x-y)$;
D) $(x+y)^2(x-y)^2(x^2-y^2)^2$; **E)** $(x+y)^2(x-y)^2(x^2-y^2)$; **N).**

8. Израз $\frac{2+2x}{6-3x} : \frac{x^2-1}{4-x^2}$ $(x \neq \pm 2,\ x \neq \pm 1)$ је једнак изразу:

A) $\frac{2(x+2)}{3(x-1)}$; **B)** $\frac{2(2-x)}{(x-1)(x+1)}$; **C)** $\frac{2(x-2)}{3(x+1)}$; **D)** $\frac{2(x+2)}{3(x+1)}$; **E)** $\frac{2(x+1)^2}{3(x-2)^2}$; **N).**

9. За колико је квадрат разлике израза x и y мањи од збира квадрата тих истих израза?

A) $-2xy$; **B)** $2xy$; **C)** $4xy$; **D)** $-4xy$; **E)** 0; **N).**

10. Израз $\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2$ једнак је изразу:

A) $2a^2$; **B)** $\frac{a^2}{2}$; **C)** $a^2+|a|^2$; **D)** a^2; **E)** $\frac{a^2+|a|^2}{4}$; **N).**

Тест 7. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ, СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Скуп решења неједначине $3(x+2) > 3(x+1)+2$ је:

A) $\emptyset$; **B)** $[0,+\infty)$; **C)** $\mathbf{R}$; **D)** $(0,1)$;
E) Ниједан од одговора A, B, C, D, није тачан; **N)**.

2. Једначина $\dfrac{x+a}{a+b}+\dfrac{x+b}{a-b}=\dfrac{2(ax+b^2)}{a^2-b^2}+1$, $a,b\in R$, $|a|\neq|b|$:

A) Има јединствено решење које не зависи од a.

B) Има јединствено решење које не зависи од b.

C) Нема решења.

D) Има бесконачно много решења.

E) Има јединствено решење $x_1=\dfrac{b^3}{a^3+b^3}$. **N)**.

3. Ако је $4-a<\dfrac{b+3}{2}$, која од следећих реченица мора бити тачна?

A) $a>2b$; **B)** $a>4(b+3)$; **C)** $a<\dfrac{11-b}{2}$; **D)** $a<\dfrac{b-2}{2}$; **E)** $a>\dfrac{5-b}{2}$; **N)**.

4. Ако је $5x+2y=25$ и $42-4x=6y$, тада је $3y+2x$ једнако:

A) 16; **B)** 18; **C)** 21; **D)** 24; **E)** 28; **N)**.

5. Ако је (x,y,z) решење система једначина $x+y+z=0$, $2x+y+3z=-5$, $-x+2y-z=6$, тада је $x-y+z$ једнако:

A) -2; **B)** -4; **C)** 0; **D)** 4; **E)** 5; **N)**.

6. Дата је једначина $(k^2-1)x+k-1=0$ ($k\in\mathbf{R}$) и искази:

(I) За $k=1$ дата једначина има бесконачно много решења.

(II) За $k=-1$ дата једначина има више од једног решења.

(III) За $k\notin\{-1,1\}$ дата једначина има јединствено решење.

Тачни су

A) само I и III; **B)** само I и II; **C)** сви искази; **E)** само II; **E)** само I. **N)**.

7. Производ свих решења једначине $\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2+|x-2|}=0$ је:

A) 24; **B)** 2; **C)** 6; **D)** 12; **E)** 0; **N)**.

8. Скуп решења неједначине $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$ је:

A) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$; **B)** $(0, +\infty)$;

C) $(-\infty, -1) \cap (\frac{1}{2}, +\infty)$; **D)** $(\frac{1}{2}, +\infty)$;

E) Ниједан од одговора A, B, C, D, није тачан; **N)**.

9. Дат је систем једначина $cx + y = 1$, $x + cy = c$, $(c \in \mathbf{R})$. За колико различитих вредности реалног параметра c дати систем је неодређен (има бесконачно много решења)?

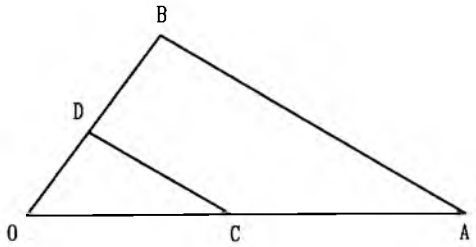
A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4; **N)**.

10. Колико различитих реалних решења има једначина $1 + \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{3x+2}{x(x+2)}$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** више од 3; **N)**.

Тест 8. ХОМОТЕТИЈА, СЛИЧНОСТ

1. У троуглу OAB на слици је $CD \| AB$. Ако је $OD = 4cm$, $DB = 6cm$, $CD = 8cm$ и $CA = 12cm$, израчунати дужине дужи OC и AB.
Одговор: $OC = \ldots\ldots\ cm$, $AB = \ldots\ldots\ cm$.



Сл. уз зад. 1, Тест 8.

2. Обим једног троугла једнак је $32cm$, а дужине његових страница се односе као $5:5:6$. Површина овог троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $48cm^2$; **B)** $50cm^2$; **C)** $34\sqrt{2}cm^2$; **D)** $45cm^2$; **E)** $28\sqrt{3}cm^2$.

3. Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (иза тачне реченице написати знак $\top$, а иза нетачне знак $\perp$):

(1) Свака два једнакостранична троугла су слични .....

(2) Свака два једнакокрака троугла су слична ако је један угао једног троугла једнак неком углу другог троугла .....

(3) Свака два једнакокрако-правоугла троугла су слични .....

(4) Површине сличних троуглова односе се као њихови обими .....

(5) Два правоугла троугла су слични ако су им катете пропорционалне .....

4. Катете правоуглог троугла су дужине $15cm$ и $20cm$. Дужина висине која одговара хипотенузи у том троуглу је: (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $10\sqrt{2}cm$; **B)** $17,5cm$; **C)** $12cm$; **D)** $5\sqrt{5}cm$; **E)** $10cm$.

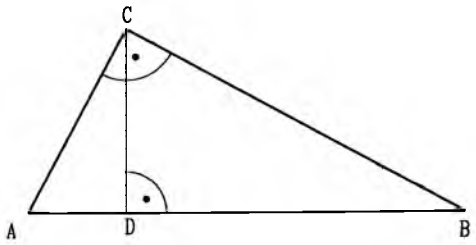
5. Нека су AA_1 и BB_1 висине троугла ABC и H ортоцентар тог троугла. Ако је $HA_1 = 3cm$, $HB_1 = 2cm$ и $HB = 5cm$, дужина AH једнака је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $\frac{10}{3}cm$; **B)** $7,5cm$; **C)** $1,2cm$; **D)** $5cm$; **E)** $4cm$.

6. Тетиве MN и PQ круга k секу се у тачки S. Ако је $NS = 4cm$, $MS = 6cm$ и $QS = 3cm$, дужина PS је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $8cm$; **B)** $\frac{9}{2}cm$; **C)** $2cm$; **D)** $10cm$; **E)** $4cm$.

7. Израчунати дужину дужи BD на слици, ако је $AC = 5cm$ и $CD = 3cm$. Одговор: $BD =$ ..... cm.



Сл. уз зад. 7, Тест 8.

8. Дат је квадрат $ABCD$ странице $8cm$. Круг k садржи темена A и D и додирује страницу BC. Полупречник круга k има дужину (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $5cm$; **B)** $4\sqrt{2}cm$; **C)** $4cm$; **D)** $5\sqrt{2}cm$; **E)** $6cm$.

9. У унутрашњости угла xOy дата је тачка M која је на одстојању $2cm$ од крака Ox и $3cm$ од крака Oy. Ако је $\sphericalangle xOy = 60°$, дужина дужи OM је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $3,5cm$; **B)** $4cm$; **C)** $\frac{6}{\sqrt{3}}cm$; **D)** $2\sqrt{2}cm$; **E)** $5cm$.

10. У правоугли трапез чије су паралелне странице дужине $6cm$ и $2cm$ уписан је круг. Дужина полупречника тог круга је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $3cm$; **B)** $\sqrt{2}cm$; **C)** $\sqrt{3}cm$; **D)** $1,5cm$; **E)** $2cm$.

Тест 9. ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Катете једног правоуглог троугла имају дужине $6cm$ и $8cm$. Ако је α један оштар угао тог троугла, збир $\cos\alpha + \sin\alpha$ има вредност:

A) 1; **B)** $\frac{9}{5}$; **C)** $\frac{7}{5}$; **D)** $\frac{25}{12}$; **E)** $\frac{5}{7}$; **N)**.

2. Ако је $\mathrm{tg}x = 4$ $(0° < x < 90°)$, вредност израза $\frac{3\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ је:

A) $\frac{10}{11}$; **B)** $\frac{46}{35}$; **C)** 0; **D)** 4; **E)** $\frac{10}{7}$; **N)**.

3. Вредност израза $3\mathrm{ctg}60° - \mathrm{tg}60°$ је:

A) $3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; **B)** 2; **C)** $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$; **D)** 0; **E)** 1; **N)**.

4. Ако за неки оштар угао α важи $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, тада је $\mathrm{tg}\alpha$ једнако:

A) $\frac{40}{9}$; **B)** $\frac{32}{41}$; **C)** 1; **D)** $\frac{9}{41}$; **E)** $\frac{9}{40}$; **N)**.

5. Нека је x оштар угао $(x \neq 45°)$. Израз $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ је једнак изразу:

A) $\frac{1 - \sin x\cos x}{\sin x - \cos x}$; **B)** $\frac{1 + \sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$; **C)** $\frac{1 - \sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$;
D) $\frac{1 + \sin x\cos x}{\sin x - \cos x}$; **E)** $\frac{1}{\sin x - \cos x}$; **N)**.

6. Основица ромба има дужину a, а оштар угао тог ромба је α. Висина овог ромба има дужину:

A) $\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\alpha$; **B)** $a\cos\alpha$; **C)** $a\mathrm{tg}\alpha$; **D)** $a\sin\alpha$; **E)** $a\mathrm{ctg}\alpha$; **N)**.

7. Ако је $a = \sin 32°$ и $b = \cos 58°$, тада је:

A) $a = b$; **B)** $a^2 + b^2 = 1$; **C)** $a + b = 1$; **D)** $a^2 - b^2 = 1$; **E)** $a - b = 1$; **N)**.

8. У једнакокраком троуглу крак је два пута дужи од основице. Ако је α угао између кракова, онда је $\sin\frac{\alpha}{2}$ једнако:

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **D)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$; **E)** $\frac{\sqrt{15}}{5}$; **N)**.

9. Израз $\frac{\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)} + \frac{1+\sin\alpha}{2\cos\alpha}$ $(0° < \alpha < 90°)$ једнак је изразу:

A) $\frac{1}{\sin\alpha}$; **B)** $\frac{1}{\cos\alpha}$; **C)** $\frac{2}{\sin\alpha}$; **D)** $\frac{2}{\cos\alpha}$; **E)** $\mathrm{tg}\alpha$; **N)**.

10. Ако је $\mathrm{tg}\alpha = 2$ $(0° < \alpha < 90°)$, вредност $\cos\alpha$ једнака је:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **D)** $\frac{2}{3}$; **E)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$; **N)**.

РЕШЕЊА ТЕСТОВА

Тест 1

1. C. **2.** D. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** D. **7.** C. **8.** A. **9.** E. **10.** E.

Тест 2

1. B. **2.** E. **3.** C. **4.** B. **5.** A. **6.** D. **7.** 2, 3, 5. **8.** $\top$, $\perp$, $\perp$, $\top$, $\perp$. **9.** C. **10.** A.

Тест 3

1. C. **2.** B. **3.** A. **4.** E. **5.** D. **6.** D. **7.** A. **8.** D. **9.** C. **10.** B.

Тест 4

1. C. **2.** D. **3.** B. **4.** A. **5.** B. **6.** E. **7.** E. **8.** B. **9.** A. **10.** D.

Тест 5

1. C. **5.** E. **6.** C. **8.** A. **9.** $T_{-\vec{v}}$.

Тест 6

1. E. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** A. **6.** E. **7.** C. **8.** A. **9.** B. **10.** D.

Тест 7

1. C. **2.** D. **3.** E. **4.** C. **5.** B. **6.** A. **7.** D. **8.** A. **9.** C. **10.** B.

Тест 8

1. $OC = 8cm$, $AB = 12cm$. **2.** A. **3.** $\top$, $\perp$, $\top$, $\perp$, $\top$. **4.** C. **5.** A. **6.** A. **7.** $BD = 2,25cm$. **8.** A. **9.** B. **10.** D.

Тест 9

1. C. **2.** B. **3.** D. **4.** E. **5.** A. **6.** D. **7.** A. **8.** A. **9.** B. **10.** C.

Ivana ♡
David ♡

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Ивановић, Р. Петровић: *Неједнакости. О неким метричким особинама тетраедра.* Материјали за младе математичаре, св. 13, Друштво математичара Србије, Београд, 1981.

[2] З. Каделбург, С. Крстић, П. Младеновић: *Математика 1, збирка решених задатака за* I *разред гимназија и техничких школа.* Друштво математичара Србије, Београд, 1991.

[3] З. Каделбург, П. Младеновић: *Савезна такмичења из математике.* Материјали за младе математичаре, св. 23, Друштво математичара Србије, Београд, 1987.

[4] Л. Милин, Ж. Ивановић: *Збирка решених задатака из тригонометрије*, „Научна књига", Београд, 1984.

[5] П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић: *Математика за* I *разред гимназија и средњих стручних школа.* Завод за издавање уџбеника Нови Сад и „Научна књига", Београд, 1991.

[6] В. Мићић, З. Каделбург: *Увод у теорију бројева.* Материјали за младе математичаре, св. 15, II издање, Друштво математичара Србије, Београд, 1989.

[7] П. Младеновић: *Комбинаторика.* Материјали за младе математичаре, св. 22, Друштво математичара Србије, Београд, 1989.

[8] П. Младеновић, С. Огњановић: *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа.* Материјали за младе математичаре, св. 17, Друштво математичара Србије, Београд, 1987.

[9] Ж. Адамар: *Элементарная геометрия.* Т.I, Москва, 1957.

[10] В. Г. Болтянский, И. В. Сидоров, М. И. Шабунин: *Лекции и задачи по элементарной математике.* „Наука", Москва, 1971.

[11] С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, Е. Г. Борчугова: *Сборник задач по элементарной алгебре, изд. 2-ое.* „Просвещение", Москва, 1973.

[12] П. С. Моденов: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики* „Советская наука", Москва 1957.